

## Zur Geometrie der Zahlen.

(Mit Projektionsbildern auf einer Doppeltafel.)

(Verhandlungen des III. Internationalen Mathematiker-Kongresses. Heidelberg 1904.  
S. 164—173.)

Im folgenden möchte ich versuchen, in kurzen Zügen einen Bericht über ein eigenartiges, zahlreicher Anwendungen fähiges Kapitel der Zahlentheorie zu geben, ein Kapitel, von dem Charles Hermite einmal als der „introduction des variables continues dans la théorie des nombres“ gesprochen hat. Einige hervorstechende Probleme darin betreffen die Abschätzung der kleinsten Beträge kontinuierlich veränderlicher Ausdrücke für ganzzahlige Werte der Variablen.

Die in dieses Gebiet fallenden Tatsachen sind zumeist einer geometrischen Darstellung fähig, und dieser Umstand ist für die in letzter Zeit hier erzielten Fortschritte derart maßgebend gewesen, daß ich geradezu das ganze Gebiet als die *Geometrie der Zahlen* bezeichnet habe.

(Fig. 1.) Die erste Figur illustriert für die Ebene dasjenige Theorem, welches mit Recht als das *Fundamentaltheorem* der Geometrie der Zahlen bezeichnet werden kann, weil es fast in jede Untersuchung auf diesem Gebiete hineinspielt.

In der Ebene denken wir uns irgendwelche Parallelkoordinaten  $x, y$  eingeführt, wobei noch für jede Achse der Einheitsmaßstab beliebig gewählt sein kann. Die Punkte mit ganzzahligen Koordinaten  $x, y$  bilden das *Zahlengitter* in  $x, y$ . Dieses Gitter kann auf mannigfaltige Weise durch ein Gerüst von kongruenten homothetischen Parallelogrammen gestützt werden, welche die Ebene lückenlos überdecken und als deren Ecken die Punkte des Gitters erscheinen. Bei einer vollständigen und einfachen Überdeckung der Ebene kommt danach sozusagen auf jeden Gitterpunkt ein homologes Gebiet von einem Flächeninhalt  $\iint dx dy = 1$ .

Nun denken wir uns irgendeine geschlossene konvexe Kurve, welche im Nullpunkt einen Mittelpunkt haben soll; sie darf auch geradlinige Stücke aufweisen. Das von ihr umschlossene Gebiet dilatieren wir vom

Nullpunkte aus (bzw. wir ziehen es zusammen) nach allen Richtungen in gleichem Verhältnisse zu einer solchen homothetischen, d. h. ähnlichen und ähnlich gelegenen, der grün umrandeten Figur, welche im Inneren den Nullpunkt als einzigen Gitterpunkt enthalten, ihren Rand aber durch wenigstens einen weiteren Gitterpunkt schicken soll. Ziehen wir weiter diese grüne Figur vom Nullpunkte aus im Verhältnisse 1:2 zusammen und konstruieren um jeden anderen Gitterpunkt das homologe Gebiet, so erhalten wir offenbar lauter solche Gebiete, die nicht ineinander eindringen. Da nun bei lückenloser Überdeckung der Ebene im Durchschnitt auf einen Gitterpunkt ein Flächeninhalt  $= 1$  kommt, so muß der Flächeninhalt eines solchen rot umgrenzten Gebiets  $< 1$  bzw.  $= 1$  sein, falls diese roten Gebiete ebenfalls die Ebene lückenlos ausfüllen. Das von der grünen Kurve umschlossene Gebiet hat daher einen Inhalt  $\leq 4$ . Treiben wir es endlich zu einem homothetischen Gebiete genau vom Inhalte 4 auf, so kommen wir zu dem Fundamentaltheoreme:

*Ein konvexes Gebiet mit einem Mittelpunkt im Nullpunkt vom Flächeninhalt 4 enthält stets wenigstens einen weiteren Gitterpunkt.*

Die Formeln in der Figur geben den analytischen Ausdruck dieses Theorems. Genügt eine Funktion  $f(x, y)$  den Bedingungen (1)—(4) und ist  $J$  der Flächeninhalt des Gebiets  $f \leq 1$ , so kann man stets solche ganze Zahlen  $x, y$ , die nicht beide Null sind, finden, wofür die Funktion  $f \leq 2J^{-\frac{1}{2}}$  ausfällt. (1) besagt, daß  $f$  wesentlich positiv, (2), daß es homogen von der ersten Dimension ist, (3), daß das Gebiet  $f \leq 1$  einen Mittelpunkt hat, und wird die Länge der Verbindungsstrecke zweier Punkte mit den relativen Koordinaten  $x, y$  durch  $f(x, y)$  definiert, so besagt (4), daß in einem Dreiecke die Summe zweier Seitenlängen niemals kleiner als die Länge der dritten Seite sein soll.

(Fig. 2.) Eine ausgezeichnete Anwendung dieses Satzes erläutert die nächste Figur. Bekanntlich tragen die gewöhnlichen Kettenbruchentwicklungen für Funktionen einer Variablen einen einfacheren Charakter als die analogen Entwicklungen für reelle Größen. Eine Funktion  $f(z)$ , die für  $z = \infty$  einen Pol hat, läßt sich in einen Kettenbruch (1) entwickeln, worin  $F_0(z)$  und die Nenner  $F_1(z), F_2(z), \dots$  ganze rationale Funktionen sind. Die Näherungsbrüche dieses Kettenbruchs lassen sich von vornherein charakterisieren, ohne daß es nötig wäre, sie erst sukzessive durch die Entwicklung ausfindig zu machen. Als Näherungsbruch tritt hier jeder solche Quotient  $P(z)/Q(z)$  zweier teilerfremden ganzen Funktionen auf, für welchen der Ausdruck (2), nach fallenden Potenzen von  $z$  entwickelt, mit einer Potenz von negativem Exponenten beginnt. Während eine sehr weitgehende Analogie zwischen den Eigenschaften der ganzen

Funktionen und der ganzen Zahlen besteht, schien zu dem genannten Satze ein entsprechender in der Arithmetik zu fehlen. Dieses Analogon finden wir darin, daß für eine beliebige reelle Größe  $a$  die sämtlichen gekürzten Brüche  $x/y$ , welche die Ungleichung (3) erfüllen, für welche also  $(x - ay)y$  in den Grenzen  $-\frac{1}{2}$  und  $\frac{1}{2}$  liegt, sich als die Näherungsbrüche einer bestimmten Kettenbruchentwicklung (4) mit ganzzahligem  $g_0$  und lauter positiven ganzzahligen  $g_1, g_2, \dots$  anordnen.\*)

Sind, um etwas allgemeinere Umstände zu betrachten,  $\xi, \eta$  zwei binäre lineare Formen in  $x, y$  mit beliebigen reellen Koeffizienten und einer Determinante  $= 1$  (im speziellen würden wir  $\xi = x - ay, \eta = y$  annehmen), so besteht ein sehr anschaulicher Zusammenhang zwischen den sämtlichen möglichen Auflösungen der Ungleichung  $|\xi\eta| < \frac{1}{2}$  in ganzen Zahlen  $x, y$  ohne gemeinsamen Teiler.\*\*\*) Wir zeichnen die Geraden  $\xi = 0, \eta = 0$ , etwa rechtwinklig zueinander, und die beiden Hyperbeln  $\xi\eta = \frac{1}{2}$  und  $\xi\eta = -\frac{1}{2}$ . Wir legen eine beliebige Tangente an den Hyperbelast im ersten  $\xi, \eta$ -Quadranten und konstruieren dazu die Spiegelbilder in den drei anderen Quadranten, so daß wir ein Tangentenparallelogramm mit den Diagonalen  $\xi = 0, \eta = 0$  erhalten. Ein solches Parallelogramm enthält nun stets wenigstens eine primitive (d. h. aus ganzen relativ primen Zahlen  $x, y \neq 0, 0$  bestehende) Lösung der Ungleichung  $|\xi\eta| < \frac{1}{2}$ , und es enthält höchstens zwei verschiedene solcher Lösungen, wobei dann die Determinante aus den Koordinaten  $x, y$  dieser Lösungen stets  $\pm 1$  ist. Zwei entgegengesetzte Systeme  $x, y$  und  $-x, -y$  betrachten wir hier nicht als verschieden. Umgekehrt gibt es zu jeder primitiven Lösung  $x, y$  eine solche Form jenes Tangentenparallelogramms, wobei es nur diese Lösung (und  $-x, -y$ ) enthält, und andererseits, wofern dafür nicht  $\xi = 0$  ist, auch eine solche Form, wobei es diese und außerdem noch eine zweite primitive Lösung mit kleinerem  $|\xi|$  enthält. Deformieren wir nun das Tangentenparallelogramm kontinuierlich, indem wir die Tangenten an den bezüglichen Hyperbelasten entlang gleiten lassen, so erhalten wir abwechselnd die rot und grün gezeichneten Formen mit einer und mit zwei primitiven Lösungen, und es tritt die Gesamtheit der primitiven Auflösungen der diophantischen Ungleichung  $|\xi\eta| < \frac{1}{2}$ , geordnet nach

\*) Wie die Aussage hier gefaßt ist, darf  $a$  nicht gerade die Hälfte einer ungeraden ganzen Zahl sein.

\*\*) Wir nehmen hier an, daß  $\xi\eta$  nicht gerade mit der Form  $\frac{1}{2}(X^2 - Y^2)$  arithmetisch äquivalent ist.

abnehmendem  $|\xi|$  (und wachsendem  $|\eta|$ ), — die zu den Formen  $\xi, \eta$  gehörige Diagonalkette — hervor.

(Fig. 3). Mit den nicht homogenen diophantischen Ungleichungen hat sich wohl zuerst Tschebyscheff beschäftigt und darüber ein Theorem folgender Art entwickelt: Sind  $a, b$  zwei beliebige reelle Größen, so kann man stets ganze Zahlen  $x, y$  finden, wofür die Ungleichung (1) gilt. Statt des Faktors  $\frac{1}{4}$  rechts hat Tschebyscheff hier eine etwas ungünstigere Konstante. Die am weitesten führenden Schlüsse in dieser Richtung knüpfen an die nun folgenden Zeichnungen an:

$\xi, \eta$  mögen wieder zwei lineare Formen in  $x, y$  mit beliebigen reellen Koeffizienten und einer Determinante  $= 1$  bedeuten. Mit Hilfe zweier aufeinanderfolgenden Glieder der vorhin besprochenen Diagonalkette zu  $\xi, \eta$  können wir ein System homologer Parallelelogramme um die einzelnen Gitterpunkte als Mittelpunkte, die roten Parallelelogramme, konstruieren, deren Diagonalen parallel den Linien  $\xi = 0, \eta = 0$  sind und wobei nicht zwei ineinander eindringen, wobei aber jedes an vier (bei lückenloser Überdeckung der Ebene an sechs oder acht) andere Parallelelogramme angrenzt. Dabei können sich noch zwei verschiedene Möglichkeiten darbieten, die in der oberen und der unteren Zeichnung zur Darstellung gebracht sind, indem ein Parallelelogramm entweder mit jeder Seite an ein benachbartes oder nur mit zwei Seiten jedesmal an je zwei benachbarte anstößt. Die roten Parallelelogramme lassen nun (im allgemeinen) noch Lücken zwischen sich. Wir dilatieren sie von ihren Mittelpunkten zu homothetischen Parallelelogrammen in demjenigen bestimmten Verhältnis, wobei sie jedesmal über die Hälfte anstoßender Lücken hinauswachsen, und wir erhalten dadurch die grün gezeichneten Parallelelogramme, welche nun die ganze Ebene vollständig, aber zum Teil mehrfach überdecken. Dabei zeigt es sich, daß diese neuen Bereiche keine Partie der Ebene mehr als zweifach überdecken, und ist infolgedessen der Flächeninhalt  $\iint dx dy$  eines grünen Parallelelogramms  $\leq 2$ . Diese Tatsache führt zu folgendem Satze:

*Sind  $\xi_0, \eta_0$  irgend zwei reelle Werte, so kann man stets solche ganze Zahlen  $x, y$  finden, daß die Ungleichung (3) gilt. Der vorhin formulierte Satz über den Ausdruck  $x - ay - b$  ist nur ein Spezialfall dieser allgemeineren Aussage. —*

Das arithmetische Fundamentaltheorem über konvexe Gebilde läßt sich mit Leichtigkeit auf den Raum, sowie auf Mannigfaltigkeiten beliebiger Dimension übertragen. Eine seiner wertvollsten Anwendungen findet das Theorem zu einfachen Beweisen der Dirichletschen Sätze über die Einheiten in den algebraischen Zahlkörpern.

Im Raume werden wir so für das parallelepipedische Punktgitter der ganzzahligen Systeme von 3 Variablen  $x, y, z$  den Satz haben: *Ein konvexer Körper mit einem Mittelpunkt im Nullpunkt und von einem Volumen  $\iiint dx dy dz \leq 8$  enthält stets wenigstens einen weiteren Gitterpunkt.*

Auf diesen Satz gründen wir wirklich brauchbare *Methoden zur Ermittlung der sämtlichen Einheiten in einem gegebenen kubischen Zahlkörper.*

(Fig. 4.) Handelt es sich zunächst um einen kubischen reellen Körper mit *negativer* Diskriminante, wobei die zwei konjugierten Körper einander konjugiert komplex sind, so existiert in dem Körper eine völlig bestimmte positive Fundamenteinheit von möglichst kleinem Betrage  $> 1$ . Das Verfahren zur Gewinnung dieser Einheit läßt sich an der oberen Zeichnung in Figur 4 klarmachen. Es sei  $\xi$  eine Basisform des gegebenen Körpers,  $\eta, \zeta$  seien die konjugierten Formen in den konjugierten Körpern. Sind  $\lambda, \mu$  positive Parameter, so geben uns die Gleichungen  $\xi = \pm \lambda$  zwei Ebenen,  $|\eta| = \mu$  eine elliptische Zylinderfläche. Wir können die zwei Parameter  $\lambda, \mu$  derart bestimmen, daß der begrenzte zylindrische Raum (1) (der rote Zylinder in der Figur) sowohl auf einer Basisfläche einen Gitterpunkt  $A$  wie auf der Mantelfläche einen Gitterpunkt  $B$  (und natürlich gleichzeitig auch die in bezug auf den Nullpunkt diametral gegenüberliegenden Gitterpunkte  $A', B'$ ) aufweist. Nun bedürfen wir eines neuen Gitterpunktes  $C$ , um hernach aus den Koordinaten von  $A, B, C$  eine hier nützliche lineare Substitution zu entnehmen. Wir variieren den elliptischen Zylinder (1) als solchen, indem wir in den zwei Basisflächen diejenigen parallelen Durchmesser festhalten, deren Ebene durch  $B, B'$  geht, dagegen die zu ihnen konjugierten Durchmesser dilatieren und entsprechend den ganzen zylindrischen Raum ausdehnen, bis wir einen neuen Gitterpunkt  $C$  auf seiner Mantelfläche auftreten sehen. In diesem Zustande (mit den schwarz gezeichneten Rändern) bezeichnen wir den Zylinder als einen *extremen*. Wir finden, daß die Determinante aus den Koordinaten von  $A, B, C$  gleich  $\pm 1$  ist, wenn sie nicht unter besonderen Umständen Null ist. Von jedem extremen Zylinder können wir nun zu einem benachbarten schmälern extremen Zylinder fortschreiten. Wir ziehen die ursprünglichen Basisflächen homothetisch von der Achse aus zusammen, bis ihre Ränder durch  $A, A'$  gehen, wodurch diese Punkte auf die Mantelfläche treten, und können dann, ohne daß Gitterpunkte ins Innere des Zylinders eintreten, den Zylinder ausziehen, die Basisflächen parallel mit ihrer Anfangslage vom Nullpunkte entfernen, bis sie von neuem auf Gitterpunkte  $D, D'$  stoßen, und von diesem weiteren Zustande aus können wir dann wie vorhin einen extremen Zylinder herstellen. Danach existiert eine bestimmte *Kette von extremen Zylindern*, und die

Betrachtung der auf ihren Basisflächen auftretenden Gitterpunkte führt mit Sicherheit eben zur Auffindung der Fundamenteinheit in dem gegebenen kubischen Zahlkörper. —

Das allgemeine Theorem über konvexe Körper, auf Parallelepipede angewandt, führt zur Folgerung: *Sind  $\xi, \eta, \zeta$  irgend drei lineare Formen in  $x, y, z$  mit beliebigen reellen Koeffizienten und einer Determinante  $\pm \Delta$ , wobei  $\Delta > 0$  ist, so kann man für die Variablen  $x, y, z$  stets solche ganze Zahlen, die nicht sämtlich Null sind, finden, daß dadurch die Beträge aller drei Formen  $\leq \sqrt[3]{\Delta}$  ausfallen.*

Liegt nun ein kubischer Körper mit positiver Diskriminante vor, dessen konjugierte Körper also sämtlich reell sind, und handelt es sich um die Ermittlung aller Einheiten im Körper, so seien  $\xi, \eta, \zeta$  konjugierte Basisformen in dem Körper und seinen zwei konjugierten Körpern. Wir fassen alsdann die Gesamtheit aller solchen „extremen“ Parallelepipede mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt und mit Seitenflächen parallel den Ebenen  $\xi = 0, \eta = 0, \zeta = 0$  ins Auge, welche im Inneren vom ganzen Gitter nur den Nullpunkt enthalten, aber auf allen Seitenflächen mit besonderen Gitterpunkten versehen sind. Es existieren hier unendlich viele Parallelepipede von diesem Charakter, sie besitzen eine bestimmte Verkettung untereinander, und die Kenntnis dieser führt uns mit Sicherheit zur Aufstellung aller Einheiten im gegebenen Zahlkörper. Den Übergang von einem extremen Parallelepiped zu seinen benachbarten in der Kette vermittelt ein einfacher Algorithmus, der sich vor allem nach der Art richtet, wie die Gitterpunkte auf den Seitenflächen des Parallelepipeds in Hinsicht auf deren Mittellinien liegen. In dieser Beziehung bieten sich wesentlich drei Möglichkeiten dar, die in den Figuren (I), (II), (III) zum Ausdruck gebracht sind. In den Fällen (I) und (II) erweist sich die Determinante aus den Koordinaten von  $A, B, C$  gleich 1, im Falle (III) ist sie Null und fällt dabei der Schwerpunkt des Dreiecks  $ABC$  in den Nullpunkt.

(Fig. 5.) Ich hebe noch das folgende anziehende Problem hervor, welches auch in der Theorie von der Struktur der Kristalle eine Stelle findet:

*Wir denken uns einen beliebigen Grundkörper im Raume vorgelegt. Lauter mit ihm kongruente und parallel orientierte Körper in unendlicher Anzahl seien so angeordnet, daß ihre Schwerpunkte ein parallelepipedisches Punktsystem bilden und daß nicht zwei der Körper ineinander eindringen. Unter welchen Umständen schließen sich die Körper so dicht als überhaupt möglich zusammen, sind also die zwischen ihnen vorhandenen Lücken auf ein Minimum an Volumen reduziert?*

Für den Fall, daß der Grundkörper ein *Oктаeder* ist, gibt Fig. 5 die

Lösung des Problems an. In der fraglichen dichtesten gitterförmigen Lagerung muß jedes einzelne der Oktaeder in bestimmter Weise an vierzehn benachbarte anstoßen. Hier ist, in eine Ebene umgeklappt, das halbe Netz eines der Oktaeder dargestellt und sind in den vier Seitenflächen (durch zur Hälfte rote Berandung) die 7 Partien mit Mittelpunkt angezeigt, in welchen das Oktaeder sich an benachbarte anlegt. Das Minimum des Raumes, welches die Lücken zwischen den Oktaedern noch darbieten, verhält sich zu dem von den Oktaedern eingenommenen Raume in diesem Falle der dichtesten Lagerung wie 1:19. Dieses Resultat gestattet folgende rein arithmetische Einkleidung:

*Sind  $\varphi, \chi, \psi, \omega$  irgend vier lineare Formen in  $x, y, z$  mit beliebigen reellen Koeffizienten, deren Summe identisch Null ist und wobei je drei eine Determinante  $\pm 4\Delta$  ( $\Delta > 0$ ) haben, so kann man stets solche ganze Zahlen  $x, y, z$ , die nicht sämtlich Null sind, finden, daß die Ungleichungen (2) gelten.*

Von diesem Ergebnisse machen wir noch eine bemerkenswerte Anwendung. Es seien  $a, b$  zwei beliebige reelle Größen,  $t$  ein positiver Parameter, so bestimmen die 8 Ebenen (3) ein Oktaeder. Indem noch  $t$  beliebig groß angenommen werden kann, entspringt hieraus diese Folgerung:

*Man kann zwei beliebige reelle Größen  $a, b$  stets durch Brüche  $x/z$  und  $y/z$  mit gleichem Nenner beliebig genau und zugleich derart annähern, daß die Ungleichungen (4) statthaben.*

(Fig. 6.) Wir werfen nun die Frage auf: Wie übertragen sich die Sätze über die Approximation einer reellen Größe durch Zahlen des natürlichen Rationalitätsbereiches auf das Gebiet der komplexen Größen? Man wird hier zunächst auf Approximationen im Zahlkörper der dritten oder der vierten Einheitswurzel ausgehen. Im Körper der dritten Einheitswurzel liegen die Dinge wesentlich einfacher und werden die Sätze sehr ähnlich denen für reelle Größen. Ich will hier nur die verwickelteren Beziehungen im Körper der vierten Einheitswurzel berühren.

Es seien  $\xi, \eta$  zwei lineare Formen mit beliebigen komplexen Koeffizienten und zwei komplexen Variablen  $x + ix', y + iy'$  von einer Determinante  $\Delta \neq 0$ , so richten wir unser Augenmerk auf diejenigen „extremen“ Zahlenpaare  $x + ix', y + iy' \neq 0, 0$  im Zahlkörper von  $i$ , zu welchen nicht ein Zahlenpaar derselben Art angebbar ist, das sowohl  $|\xi|$  wie  $|\eta|$  kleiner werden läßt. Wir können die zwei Zahlen eines Paares mit einer und derselben Einheit  $-1, \pm i$  multiplizieren, das entstehende assoziierte Paar gilt uns hier als nicht verschieden von dem ursprünglichen. Alle vorhandenen extremen Paare lassen sich nun in eine Kette nach der Größe von  $|\xi|$  (und zugleich von  $|\eta|$ ) ordnen. Zwei benachbarte Paare der Kette zusammen sind leicht a priori zu charakterisieren. Nämlich die

zugehörige Determinante (2) ist entweder (A) eine Einheit  $\pm 1, \pm i$  oder (B) gleich  $(1 + i)$ , multipliziert in eine Einheit. Wir benutzen diese zwei Paare als Vertikalreihen der Matrix einer auf  $\xi, \eta$  anzuwendenden Substitution und erhalten dadurch für  $\xi, \eta$  die Ausdrücke (3), worin  $|\rho|, |\sigma|$  beide  $\leq 1$  sind. Indem wir das zweite Paar durch ein assoziiertes ersetzen und eventuell noch  $i$  in  $-i$  umwandeln, können wir  $\rho$  auf den in den Zeichnungen rot markierten Oktanten des Einheitskreises (bzw.  $1/\rho$  auf den konjugierten Oktanten außerhalb dieses Kreises) bringen. Es sind nun die Fälle (A) und (B) zu unterscheiden, auf welche sich die größere bzw. die kleinere Zeichnung bezieht. Im Falle (A) wird jener Oktant durch gewisse Kreise vom Radius 1 bzw.  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  in fünf Stücke zerlegt, die in der Figur fortlaufend mit I—V numeriert sind. Wenn  $\rho$  in ein bestimmtes derselben fällt, kann jedesmal  $\sigma$  nur in diejenigen grünbegrenzten Stücke des Einheitskreises fallen, in welche die nämliche Nummer eingetragen ist. Der kleinste Wert für den Betrag der Determinante  $|1 - \rho\sigma|$  entsteht, wenn  $\rho, \sigma$  den scharfen mit kleinen Kreuzen bezeichneten Ecken der Figur entsprechen. Im Falle (B) kann  $\rho$  nur in das rote Gebiet (I) und  $\sigma$  dann nur in das grüne Gebiet (I) fallen. Als wichtigstes Ergebnis entnehmen wir hieraus:

*Man kann in die Formen  $\xi, \eta$  für  $x + ix', y + iy'$  stets solche ganze Zahlen des Körpers von  $i$ , die nicht beide Null sind, setzen, daß dabei die Ungleichungen (4) gelten. —*

Endlich möchte ich noch einige Worte über *Kriterien für algebraische Zahlen* hinzufügen.

(Fig. 7.) Durch diese Figur suche ich dem bekannten Lagrangeschen *Kriterium für eine reelle quadratische Irrationalzahl* eine neue Seite abzugewinnen. In einem Quadrat von der Seitenlänge 1 sind hier auf der linken vertikalen Seite, der  $y$ -Achse, fortgesetzt Halbierungen vorgenommen, so daß sukzessive alle Punkte erhalten werden, deren Ordinate eine rein dyadische Zahl, d. h. eine rationale Zahl mit einer Potenz von 2 als Nenner ist. Jedem auf der  $y$ -Achse auftretenden Intervall oder Teilpunkt wird nun ein Intervall bzw. ein rationaler Teilpunkt auf der  $x$ -Achse, der unteren horizontalen Seite, dadurch zugeordnet, daß zunächst den Endwerten  $y = 0$  und  $y = 1$  die Endwerte  $x = 0$  und  $x = 1$  entsprechen sollen, und weiter, so oft dort ein Intervall halbiert wird, hier zwischen die Endpunkte  $a/b, a'/b'$  des zugeordneten Intervalls,  $a$  und  $b$ , ferner  $a'$  und  $b'$  als relativ prim gedacht, ein neuer Teilpunkt in  $x = (a + a')/(b + b')$  eingeschaltet wird. Auf der horizontalen Seite treten so als Teilpunkte sukzessive alle Punkte mit rationaler Abszisse auf, und die Zuordnung der gleichzeitig konstruierten Abszissen und Ordinaten liefert uns das Bild

einer beständig wachsenden Funktion  $y = ?(x)$ , zunächst für alle rationalen  $x$ , dann durch die Forderung der Stetigkeit erweitert auf beliebige reelle Argumente im Intervalle  $0 \leq x \leq 1$ , während gleichzeitig  $y$  dieses Intervall beliebig durchläuft. Wenn nun  $x$  eine quadratische Irrationalzahl ist und daher auf eine periodische Kettenbruchentwicklung führt, so entspricht dadurch dem Werte  $y = ?(x)$  eine periodische Dualentwicklung und erweist sich infolgedessen  $y$  als rational. Wir erhalten dadurch die Sätze:

*Ist  $x$  eine quadratische Irrationalzahl, so ist  $y$  rational, aber nicht rein dyadisch. Ist  $x$  rational, so ist  $y$  rein dyadisch. Und diese Sätze sind völlig umkehrbar.*

(Fig. 8.) Die letzte Figur zeigt nun eine Verallgemeinerung dieser Sätze auf *kubische Irrationalitäten*, welche Herr Louis Kollros in seiner Dissertation (Zürich 1904) entwickelt hat:

Einerseits wird hier ein Quadrat, in welchem  $\xi, \eta$  in den Grenzen 0 und 1 laufen, in der Weise behandelt, daß es zuerst durch die Diagonale  $\xi = \eta$  in zwei gleichschenklige rechtwinklige Dreiecke zerlegt wird und in der Folge jedes einmal entstehende gleichschenklige rechtwinklige Dreieck durch die Verbindung von der Spitze nach der Mitte der Hypotenuse in zwei gleichschenklige rechtwinklige Dreiecke aufgelöst wird. Andererseits erfährt gleichzeitig ein zweites Quadrat, in welchem  $x, y$  in den Grenzen 0 und 1 laufen, eine gewisse Schritt für Schritt zugeordnete Zerfällung in Dreiecke: zunächst werden die vier Ecken des Quadrats den vier Ecken des ersten Quadrats mit gleichwertigen Koordinaten und weiter die Linie  $x = y$  der Linie  $\xi = \eta$  zugeordnet, und in der Folge wird, wo dort eine Hypotenuse halbiert und hernach eine geradlinige Verbindung eingeführt wird, hier zwischen die Endpunkte der zugeordneten Strecke, wenn deren Koordinaten  $a/c, b/c$  und  $a'/c', b'/c'$  und  $a, b, c$  sowie  $a', b', c'$  relativ prime Zahlen sind, als ein neuer Teilpunkt der Punkt mit den Koordinaten  $x = (a + a')/(c + c')$ ,  $y = (b + b')/(c + c')$  eingeschaltet und hernach die entsprechende geradlinige Verbindung vorgenommen. Dadurch werden zwei eindeutig umkehrbare Beziehungen (1) festgesetzt, zunächst für alle rationalen  $x, y$  und dyadischen  $\xi, \eta$  und hernach durch die Forderung der Stetigkeit überhaupt für beliebige Argumente und Funktionswerte in den Grenzen 0 und 1. Dabei findet nun Kollros die folgenden Sätze, welche freilich in einem wesentlichen Punkte noch nicht bewiesen sind, deren Richtigkeit aber nach einer Menge von Beispielen in hohem Grade plausibel erscheint:

*Sind 1,  $x, y$  drei unabhängige Zahlen in einem reellen kubischen Körper, so sind  $\xi, \eta$  rational und ist keine der Größen  $\xi, \eta, \xi + \eta, \xi - \eta$  rein dyadisch. Gehören  $x, y$  einem quadratischen Körper an, ohne beide rational*

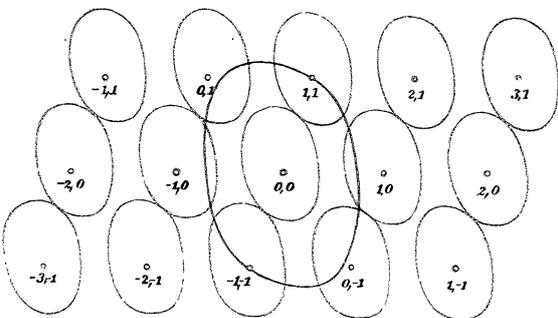
zu sein, so sind  $\xi, \eta$  rational und ist eine der Größen  $\xi, \eta, \xi + \eta, \xi - \eta$  rein dyadisch. Sind  $x, y$  beide rational, so sind  $\xi, \eta$  beide rein dyadisch. Diese Sätze sind vollkommen umkehrbar.

Nimmt man  $y = x^2$ , so erlangt man hierdurch ein vollständiges Kriterium dafür, daß  $x$  eine reelle kubische Irrationalzahl ist. Besonders zu betonen ist, daß diese Sätze für alle kubischen Körper und nicht etwa bloß für solche mit negativer Diskriminante, in welchen nur *eine* Fundamenteinheit vorhanden ist, zuzutreffen scheinen.

Diese Aufzählung von speziellen Ergebnissen aus der Geometrie der Zahlen ließe sich noch weiterführen. Aber ich habe vielleicht mein Ziel bereits erreicht und Sie mögen den Eindruck gewonnen haben, daß es sich hier um Fragen handelt, welche die Fundamente der Größenlehre berühren, welche der Auffassung leicht zugänglich sind und welche uns die Disziplinen der Algebra, Arithmetik, Geometrie in harmonischer Wechselwirkung zeigen.

---

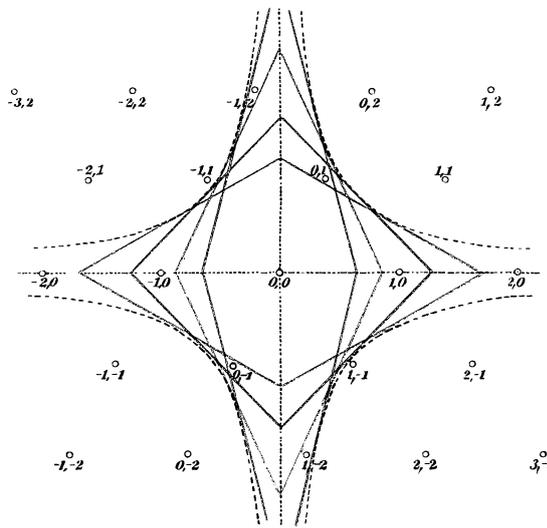
Fig. 1. Zahlengitter und konvexe Kurven.



$$f(x, y):$$

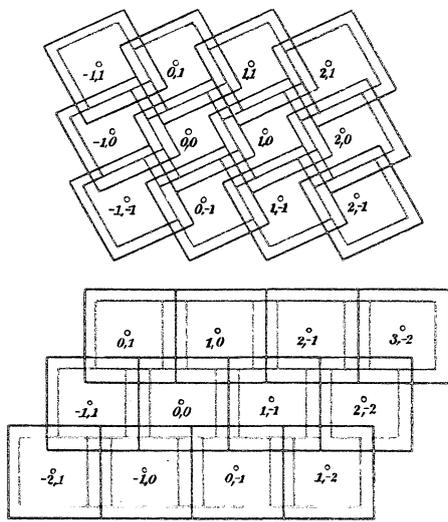
- (1)  $f(x, y) > 0, x, y \neq 0, 0; f(0, 0) = 0,$
- (2)  $f(tx, ty) = tf(x, y), t > 0,$
- (3)  $f(-x, -y) = f(x, y),$
- (4)  $f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2) \geq f(x_1 + x_2, y_1 + y_2),$
- (5)  $f(x, y) \leq 1, \iint f dx dy = J;$
- (6)  $f(x, y) \leq \frac{2}{\sqrt{J}}.$

Fig. 2. Diagonalketten.



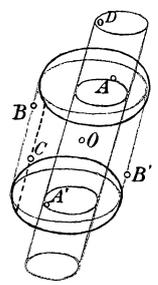
- (1)  $f(z) = c_m z^m + \dots + c_0 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \dots$   
 $= F_0(z) - \frac{1}{F_1(z)} - \frac{1}{F_2(z)} - \dots;$
- (2)  $(P(z) - f(z)Q(z))Q(z).$
- (3)  $\left| \frac{x}{y} - a \right| < \frac{1}{2y^2},$  (4)  $a = g_0 - \frac{1}{g_1} - \frac{1}{g_2} - \dots$
- (5)  $\xi = \alpha x + \beta y, \eta = \gamma x + \delta y, \alpha\delta - \beta\gamma = 1;$
- (6)  $-\frac{1}{2} < \xi\eta < \frac{1}{2}.$

Fig. 3. Inhomogene lineare Ausdrücke.



- (1)  $|x - ay - b| < \frac{1}{4|y|}.$
- (2)  $\xi = \alpha x + \beta y, \eta = \gamma x + \delta y,$   
 $\alpha\delta - \beta\gamma = 1;$
- (3)  $|(\xi - \xi_0)(\eta - \eta_0)| < \frac{1}{4}.$

Fig. 4. Kettenalgorithmen für drei lineare Formen.



- 1° Eine reelle, zwei konjugiert komplexe Formen:
- $$\begin{cases} \xi = \alpha x + \beta y + \gamma z, \\ \eta = (\alpha' + i\alpha'')x + (\beta' + i\beta'')y + (\gamma' + i\gamma'')z, \\ \zeta = (\alpha' - i\alpha'')x + (\beta' - i\beta'')y + (\gamma' - i\gamma'')z; \end{cases}$$
- (1)  $-\lambda \leq \xi \leq \lambda, |\eta| \leq \mu.$

2° Drei reelle Formen:

$$\begin{cases} \xi = \alpha x + \beta y + \gamma z, \\ \eta = \alpha' x + \beta' y + \gamma' z, \text{ Det. } \neq 0; \\ \zeta = \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z, \end{cases}$$

(2)  $|\xi|, |\eta|, |\zeta| \leq \sqrt[3]{|\text{Det.}|}.$

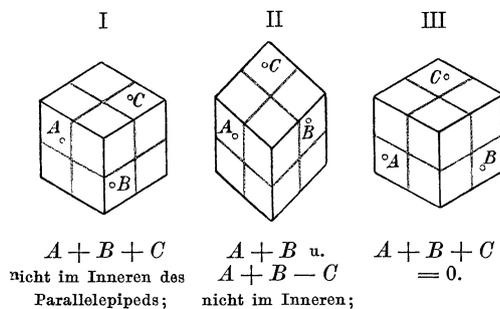
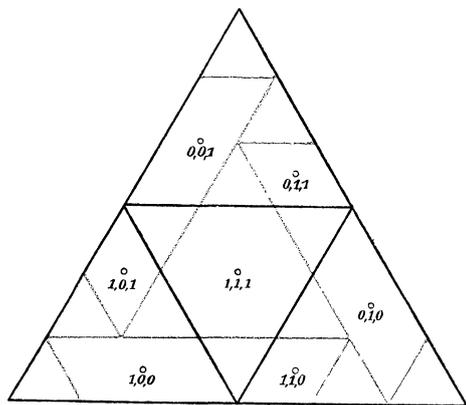
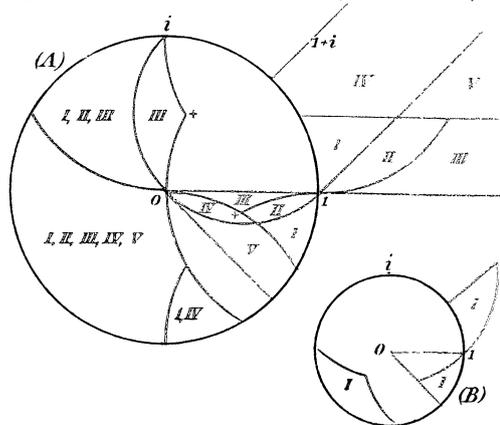


Fig. 5. Dichteste Lagerung von Oktaedern.



- $$\varphi = -\xi + \eta + \zeta, \chi = \xi - \eta + \zeta, \psi = \xi + \eta - \zeta, \omega = \xi + \eta + \zeta,$$
- (1)  $\varphi + \chi + \psi + \omega = 0, \text{ Det. } (\xi, \eta, \zeta) = \Delta;$
  - (2)  $|\varphi|, |\chi|, |\psi|, |\omega| \leq \sqrt[3]{\frac{108}{19}} \Delta.$
  - (3)  $\pm (c - az) \pm \frac{z}{t} = 1, \pm (y - bz) \pm \frac{z}{t} = 1;$
  - (4)  $\left| \frac{x}{z} - a \right|, \left| \frac{y}{z} - b \right| < \sqrt{\frac{8}{19}} \frac{1}{z^{\frac{3}{2}}}, \left( \sqrt{\frac{8}{19}} = 0,648\dots \right)$

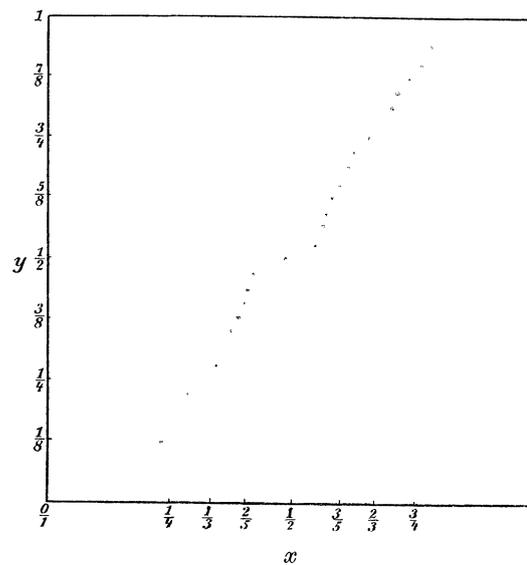
Fig. 6. Lineare Formen im Körper von  $i = \sqrt[4]{1}.$



- (1)  $\xi = (\alpha + i\alpha')(x + ix') + (\beta + i\beta')(y + iy'), \text{ Det. } (\xi, \eta) = \Delta;$   
 $\eta = (\gamma + i\gamma')(x + ix') + (\delta + i\delta')(y + iy'),$
- (2)  $\left| \begin{matrix} x_1 + ix_1' & x_2 + ix_2' \\ y_1 + iy_1' & y_2 + iy_2' \end{matrix} \right|, \begin{cases} \xi = \lambda e^{i\varphi} (X + iX' + e(Y + iY')), \\ \eta = \mu e^{i\psi} (\sigma(X + iX') + Y + iY'), \end{cases}$
- (4)  $|\xi|, |\eta| \leq \sqrt{\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{6}}} |\Delta|.$

Fig. 7.

Kriterium für die reellen quadratischen Irrationalzahlen.

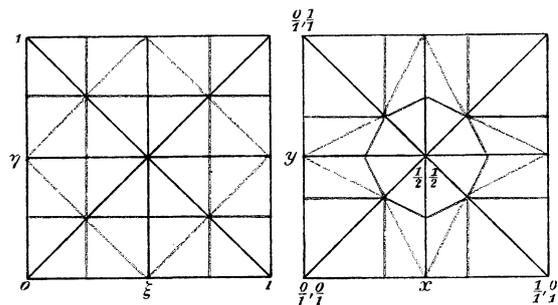


$$\frac{a}{b} \dots \frac{a + a'}{b + b'} \dots \frac{a'}{b'}$$

$x$  quadratische Irrationalzahl,  $y$  rational und nicht dyadisch;  
 $y = ?(x):$   $x$  rational,  $y$  dyadisch.

Fig. 8.

Kriterium für die reellen kubischen Irrationalzahlen.



$$\frac{a}{c}, \frac{b}{c} \dots \frac{a + a'}{c + c'}, \frac{b + b'}{c + c'} \dots \frac{a'}{c'}, \frac{b'}{c'},$$

(1)  $\xi = \varphi(x, y), \eta = \psi(x, y).$

1,  $x, y$  unabhängige Zahlen in einem kubischen Körper;  
 $\xi, \eta$  rational,  
 von den Zahlen  $\xi, \eta, \xi - \eta, \xi + \eta$  keine dyadisch.