nuës solidairement d'indemniser tous ceux en faveur de qui le Testament avoit disposé, & qu'en outre elles seront cassées. 4 On a rejetté comme une subtilité inutile, qui donne lieu à plusieurs difficultés, la règle qu'un homme ne sauroit déceder *pro parte testatus, pro parte intestatus* 5. On a décidé les questions douteuses par rapport aux Substitutions. 6. On a aboli le Droit d'Accroissement, & les Quartes Falcidie & Trébellianique. 7. On a expliqué avec un soin tout particulier les Testamens privilégiés, & l'on en a fixé le nombre. Enfin 8. on a mis dans un ordre convenable la matière des Legs, qui est si difficile & si confuse dans le Droit Romain.

C'est ainsi qu'on s'applique à remplir le plan du Roi, & à mettre en exécution les vuës salutaires de ce Monarque pour le repos & la félicité de ses Peuples.

ARTICLE IX.

DEMONSTRATION *de la Loi d'une suite de termes de la Quantité composée qui est faite par la multiplication des Binomes* $1-x$, $1-x^2$, $1-x^3$, *&c.* (†)

Mr Euler (*) a découvert deux propriétés remarquables dans les Nombres. Il

(†) L'Auteur de cette Pièce a eu l'attention, avant que de la faire imprimer, de la communiquer à M. *Euler*, qui l'a luë avec une extrême satisfaction.

Il a même démontré d'une manière fort ingénieuse, que l'une étoit une conséquence de l'autre. Mais il n'en a prouvé aucune que par induction. J'ai trouvé une Démonstration mathématique de l'une de ces propriétés, & elle est le sujet de cet Ecrit.

Je la dois principalement à l'usage de certains signes que j'expliquerai dans l'Article qui suit.

Explication de quelques Signes.

1. Quand une Suite de différentes Grandeurs a des propriétés qui règnent entre deux ou plusieurs de ses termes placés à des distances fixes les uns des autres dans toute l'étenduë de la Suite, je me sers souvent d'une seule lettre changeante pour en représenter tous les termes: mais je les distingue par des *numeros* que je mets à côté de la lettre, & que j'y joins par un crochet (†) Par exemple, si la lettre *y* me sert pour représenter tous les termes d'une certaine Suite, j'en exprimerai le prémier terme & ceux qui le suivent à divers dégrés de distance de la manière suivante, y (ou $y\acute{0}$), $y\acute{1}$, $y\H{2}$, $y\acute{\H{3}}$, &c. 0, 1, 2, 3, &c. sont ici les *numeros* des termes, & le cro-

(†) Au lieu de ces crochets, qui ne se trouvent pas parmis les caractères d'Imprimerie, on a mis des chiffres avec des accens; & on a été d'autant moins scrupuleux à le faire que l'Auteur se sert de lettres accentuées au lieu de crochet.

crochet qui les fuit, les diftingue des nombres qui fervent à multiplier, ou qui font les Expofans des puiffances. Je prens à difcrétion un des termes de la Suite, comme en étant le commencement. C'eft comme un point fixe d'où je commence mon calcul. Ce terme n'a point de numero, ou a o pour fon numero. y ou $y0'$ eft le même nombre. Les numeros 1, 2, 3, &c. ne marquent autre chofe finon de combien de dégrés tout autre terme eft éloigné de celui-là. Si la Suite s'étend vers les côtés du terme $y0'$, les numeros *pofitifs* $+1$, $+2$, $+3$, &c. ou fimplement 1, 2, 3, &c. marquent les termes qui s'en écartent vers un certain côté; & les numeros *négatifs* -1, -2, -3, &c. marquent ceux qui s'en écartent vers le côté oppofé. Quand je veux exprimer un numero d'une manière indéfinie, je me fers de lettres au-lieu de nombres, comme l'on fait par rapport aux fignes des puiffances; ainfi je mets yp', yq', ou bien $y-p'$, $y-q'$, $y\overline{p+1}'$, $y\overline{q-2}'$, &c. par exemple, $y-2y1'+y2'=0$, eft l'Equation d'une progreffion Arithmétique, $y-3y1'+3y2'-y3'=0$, eft celle d'une Suite dont les fecondes différences font conftantes, &c. Pour éviter l'ufage des crochets, lorfque mes numeros feront des nombres, & non pas des lettres, je me fervirai dans cet écrit des marques fuivantes qui feront le même effet que les précedentes, favoir y, y', y'', y''', &c. pour les numeros pofitifs, & $y^{\backprime}$, $y^{\backprime\backprime}$, $y^{\backprime\backprime\backprime}$, &c. pour les négatifs.

L'usage de ces marques est une espèce de calcul que je puis appeller *calcul des numeros*. Il n'est utile que dans les Equations où il entre deux ou plusieurs différens termes d'une même Suite. On pourroit le réduire à un calcul de différences finies, si l'on aimoit mieux désigner les différences, que les quantités qui différent, par des caractères particuliers. La règle fondamentale de ce calcul est contenuë dans le Principe qui suit.

2. *Dans toute Equation qui exprime une rélation constante entre plusieurs changeantes d'une ou de plusieurs différentes Suites, caractérisées par leurs numeros, si l'on augmente ou qu'on diminuë du même nombre tous les numeros de chacune de ces changeantes, l'Equation demeure.*

Par exemple, si dans l'Equation $y - ay' + by'' = 0$, dans laquelle on suppose que a & b sont deux nombres constans, on ajoute 5, ou en général tout nombre n positif ou négatif, aux numeros de chacun des y, on aura $y^{\mathrm{v}} - ay^{\mathrm{vi}} + by^{\mathrm{vii}} = 0$, ou en général $y\,\overline{n}' - ay\,\overline{n+1}' + by\,\overline{n+2}' = 0$, laquelle Equation, qui en renferme une infinité, est censée être contenuë dans l'Equation donnée. Ce Principe bien compris, porte sa démonstration avec soi. J'aurai occasion d'en faire usage. Je n'ai fait au reste qu'indiquer ces choses en passant, afin qu'on me puisse entendre lorsque j'emploierai de tels signes.

Etat de la question.

3. Si l'on multiplie les Binomes qui composent cette Suite infinie $1-x$, $1-x^2$, $1-x^3$, &c.

&c. les uns par les autres, on peut exprimer un tel produit par une Suite de nombres multipliés par les puissances successives de x. Si les termes de cette Suite de nombres ou de *Coëfficiens* sont 1, z, z', z'', z''', z^{IV}, &c. ceux de la quantité composée égale au susdit produit seront 1, zx, $z'x^2$, $z''x^3$, $z'''x^4$, $z^{\text{IV}}x^5$, &c.

M. Euler a trouvé qu'en mettant à l'écart tous ceux de ces termes qui ont o pour leurs Coëfficiens, les autres composeront cette somme, $1 - 1x - 1x^2 + 1x^5 + 1x^7 - 1x^{12} - 1x^{15} + 1x^{22} + 1x^{26} - 1x^{35} - 1x^{40} +$, &c. Dans la Suite de ces termes il a découvert les propriétés suivantes. I. Que depuis le prémier terme qui est 1, les Coëfficiens des autres termes sont constamment -1, -1, $+1$, $+1$, -1, -1, $+1$, $+1$, &c. II. Que les distances de ces termes de l'un à l'autre, ou les différences des Exposans des puissances de x qui les affectent, forment la Suite 1, 1, 3, 2, 5, 3, 7, 4, 9, 5, &c. composée de deux progressions arithmétiques entrelacées l'une dans l'autre, savoir celle des nombres naturels, 1, 2, 3, 4, 5, &c. qui exprime les dégrés successifs de distance entre deux termes voisins qui ont le même signe, & celle des nombres impairs 1, 3, 5, 7, 9, &c. qui exprime pareillement les dégrés successifs de distance entre deux termes voisins qui ont des signes différens.

Il faut remarquer que tous les termes de la susdite quantité $1 - 1x - 1x^2 + 1x^5 + 1x^7 - 1x^{12} - 1x^{15} +$, &c. en mettant à part le 1 terme qui est 1, se peuvent résoudre en cette Suite infinie de Binomes. $1+x$, $1+x^2$, $1+x^3$, $1+x^4$, &c. dont on fait les deux termes alternativement positifs & négatifs, & qu'on multiplie par la Suite des puissances de x qui multiplient le prémier terme de chaque Binome. Ces puissances sont x^1, x^5, x^{12}, x^{22}, x^{35}, &c. dont les Exposans 1, 5, 12, 22, 35, &c. sont les sommes successives des termes de cette progression Arithmétique, 1, 4, 7, 10, 13, &c. dont la différence est 3.

Cela étant considéré, on peut réduire l'état de la question au Théorème qui suit.

4. Soit S. le produit des Binomes $1-x$, $1-x^2$, $1-x^3$, $1-x^4$, &c. Si l'on nomme i, i', i'', i''', &c. les Binomes successifs $1+x$, $1+x^2$, $1+x^3$, $1+x^4$, &c. & k, k', k'', k''', &c. les termes de la Suite 1, 5, 12, 22, 35, &c. mentionnée ci-dessus, je dis que

$$S = 1 - ix^{k'} - i''x^{k''} + ix'''^{k'''} - i^{iv}x^{k^{iv}} +, \text{ \&c.}$$

C'est ce qu'il faut démontrer.

Principes sur quoi ma Démonstration est fondée.

5. Je nomme m, m', m'', m''', m^{iv}, &c. les Binomes successifs $1-x$, $1-x^2$, $1-x^3$, $1-x^4$, $1-x^5$, &c. Que l'on forme une Table (Table I.) dont les rangs successifs sont composés Coëfficiens des puissances de x qui multiplient les termes des quantités suivantes, 1, m, mm', mmm'', $mm'm''m'''$, &c. Il y a autour de l'angle A, qui est au concours du prémier rang & de la prémière colomne, une colomne & un rang extérieurs, qui sont tous deux composés des mêmes nombres 0, 1, 2, 3, 4, &c.

&c. qui servent de numeros aux rangs & aux colomnes de la Table, de même qu'aux termes qui composent les Suites de chaque colomne & de chaque rang. Les numeros du rang extérieur sont outre cela les Exposans des puissances de x, qui affectent les termes de toute la colomne qui est au-dessous. Les termes de chaque rang qui ne sont remplis qu'avec des points, sont des o. Il n'y a aussi que des o en deça de la prémière colomne.

6. PROBLEME. Un rang quelconque p de la Table I. étant construit, construire le rang suivant $p+1$.

Que l'on pose sur une ligne les termes du rang p. Que sous cette ligne on en pose une seconde, composée des mêmes termes que la prémière, mais avec des signes opposés, & que le prémier terme de la seconde ligne soit sous celui de la prémière qui a pour numero $p+1$. Que l'on ajoute ensemble les termes de ces deux lignes ainsi placées. La somme sera le rang $p+1$.

Car le rang $p+1$ est égal au rang p multiplié par $1-x^{p+1}$. Or on fait cette multiplication en opérant comme je viens de dire.

7. On pourra former par la règle précedente chacun des rangs de la Table I. l'un après l'autre. Cette opération produira la Table II. ci-dessous, dans laquelle les puissances successives de x, marquées au dessus de cette Table, sont celles qui affectent tous les termes de la colomne qui est au dessous. Les rangs marqués à côté par les lettres $1, A, A'$,

 A'',

A'', A''', &c. ſont les mêmes qui compoſent la Table I. Les rangs d'entre-deux marqués $-1x$, $-Ax^2$, $-A'x^3$, $-A''x^4$, $-A'''x^5$, $-$ &c. ſont compoſés des termes des rangs au-deſſus, mais avec des ſignes oppoſés, & les premiers termes en ſont placés ſucceſſivement ſous x, x^2, x^3, &c. ſelon la règle précedente. J'appelle les rangs, 1, A, A', A'', &c. Rangs *poſitifs*, & les rangs $-1x$, $-Ax^2$, $A'x^3$, $-A''x^4$, &c. Rangs *négatifs*. Ainſi dans cette ſeconde Table, chaque rang poſitif eſt la ſomme du rang poſitif & du rang négatif placés immédiatement au deſſus.

8. Dans quelque rang p de la Table I. que ce ſoit, le terme qui a pour numero p & chacun de ceux qui le précèdent, ſont répétés dans toute la partie de la colomne au-deſſous des dits termes.

Cela eſt clair par la formation de la Table (6. & 7.)

9. Si l'on mène dans la Table I. la ligne oblique AB, qui partant de l'angle A traverſe toute la Table ſans s'approcher plus d'un côté que de l'autre, tous les termes poſés dans cette ligne, ſont répétés dans toute la partie inférieure de la colomne qui paſſe par quelqu'un de ces termes. Réciproquement tout terme placé dans la partie de la Table qui eſt ſous AB, ſe trouve dans cette ligne.

Car, par la ſuppoſition, le rang & la colomne de chacun des termes placés dans la ligne AB ont le même numero. Donc par la précedente, ces termes ſont répétés dans tou-

toute la partie inférieure de leur colomne. Et puisqu'il n'y en a aucune dans la Table qui ne passe par quelqu'un des termes de la ligne AB, il n'y a point de terme dans la Table au dessous de AB, qui ne soit dans cette ligne.

10. La Suite des termes placés dans la ligne AB ci dessus, est celle de z qui sont les Coëfficiens des termes de la quantité ci-dessus $1+zx+z'x^2+z''x^3+$, &c. qu'on a supposée (3) être égale au produit $mm'm''m'''m^{IV}$, &c.

Que l'on prenne dans la susdite quantité un terme quelconque, par exemple $z^{VI}x^7$. Je dis que le Coëfficient z^{VI} de ce terme est placé dans le concours de la colomne & du rang qui ont 7 pour leur numero commun, & par conséquent dans la ligne AB. Prémiérement il est clair que ce Coëfficient, qui est celui de x^7 ne peut être que dans la colomne de x^7. On n'a pas besoin de le chercher dans des termes de cette colomne qui sont au dessous de celui qui a 7 pour son numero, car il sera dans celui-ci (9) s'il est dans quelqu'un de ces autres. Enfin on ne doit pas le chercher dans un rang dont le numero est moindre que 7. car le terme $z^{VI}x^7$ est la somme de tous les produits positifs ou négatifs de la classe de x^7 que l'on peut former par la multiplication des termes des Binomes $1-x$, $1-x^2$, $1-x^3$, &c. Or le Binome $1-x^7$ est un de ceux qui forment un tel produit, puisque $-x^7\times 1=-x^7$, & ce Binome n'entre dans la composition d'aucun des rangs dont le numero est moindre que 7. Donc ce Coëfficient z^{VI} est dans le rang aussi bien que dans la colomne qui ont 7 pour leur numero commun. Donc il est dans la ligne AB. La même preuve s'applique à tous les autres termes de la Suite des z.

On pourroit démontrer la même chose d'une manière plus abrégée. Voici comment. Que l'on conçoive le dernier rang de la Table I. qui s'étend à l'infini. Cet *infinitième* rang, qui est le produit de toute la Suite des Binomes $1-x$, $1-x^2$, $1-x^3$, &c. doit renfermer tous les termes de la Suite de z. On peut-même supposer que ce rang étant infini, la partie qui s'étend jusqu'à la ligne AB l'est aussi, & qu'il n'y a pas un des termes, de la Suite des z, qui ne s'y rencontre. Donc, par la proposition précedente, ils sont tous dans la ligne AB.

11. Les termes des rangs positifs de la Table II. qui sont placés sous les prémiers termes des rangs négatifs de la même Table, tels que sont tous les termes contenus dans la ligne CD, sont les mêmes, que ceux qui sont contenus dans la ligne AB de la Table I, & par conséquent ce sont tous les termes de la Suite des z. Cela n'a pas besoin de preuve.

12. Chaque terme d'un rang positif de la Table II. est égal à la somme de tous les termes placés dans la même colomne que ce terme, & qui appartiennent aux rangs négatifs qui précèdent le susdit rang.

Par exemple le terme -1, placé dans le rang

rang A^{vi}, dans la colomne de x^{10}, est égal à la somme destermes $+1$, -2, 0, 0; placés dans la colomne de x^{10}, & qui appartiennent aux rangs négatifs $-A''x^4$, $-A'''x^5$, $-A^{iv}x^6$, $-A^{v}x^7$, qui sont tous ceux de cette espèce qui sont au dessus du rang A^{vi}.

Cela est évident par la formation de la Table.

13. Si l'on compose une Table telle que la Table III où il n'entre que les rangs négatifs de la Table II. placés dans le même ordre, la suite des sommes des colomnes de cette nouvelle Table sera la même que celle des z.

C'est une conséquence manifeste de la précedente.

14 Soit, comme ci-dessus (5), m, m', m'', m''', &c. la même Suite que celle des Binomes $1-x$, $1-x^2$, $1-x^3$, $1-x^4$, &c. Soient aussi (7) 1, A, A', A'' A''', &c. les termes des produits successifs 1, m, mm', $mm'm''$, $mm'm''m'''$, &c. Et soit S la somme du produit infini $mm'm''m'''m^{iv}m^{v}$, &c. Je dis que $S=1-1x-Ax^2-A'x^3-A''x^4-$, &c.

Car, par la supposition, $S=1+zx+z'x^2+z''x^3+z'''x^4+$, &c. Mais, par la précedente la Suite de zx, $z'x^2$, $z''x^3$, $z'''x^4$, &c. est égale à celle des colomnes successives de la Table III. multipliées par x, x^2, x^3, &c. Et les rangs successifs de cette Table sont $-1x$, $-Ax^2$, $-A'x^3$, $-A''x^4$, $-$ &c. Donc puisque la somme des rangs d'une Table est la même que celle de ses colomnes, la quantité $zx+z'x^2+z''x^3+z'''x^4+$, &c. $=-1x$

 $-Ax^2$

$-Ax^2-A'x^3-A''x^4-$ &c. Donc $S=1-1x$
$Ax^2-A'x^3-A''x^4-$ &c.

15 Soient n, n', n'', n''', &c. les termes successifs de la progression Arithmétique n, $n+1$, $n+2$, $n+3$, &c. Soient m, m', m'', m''', &c. ceux de Binomes $1-x^n$, $1-x^{n'}$, $1-x^{n''}$, $1-x^{n'''}$, &c. A, A', A'', A''', &c. ceux des produits m, mm', $mm'm''$, $mm'm''m'''$, &c. & B, B', B'', B''', &c. ceux de ceux-ci, m', $m'm''$, $m'm''m'''$, $m'm''m'''m^{IV}$, &c. Soient enfin $P=1-Ax^n+A'x^{2n}+A''x^{3n}+A'''x^{4n}+$ &c. & $Q=1+Bx^{n'}+B'x^{2n'}+B''x^{3n'}+B'''x^{4n'}+$ &c. Je dis que $P=1+x^n-Qx^{3n+1}$.

Par la supposition, $A=m$, $A'=mB$. $A''=mB'$, $A'''=m-B''$, &c. Donc puisque $m=1x^n$, il s'ensuit que $A=1-x^n$. $A'=B-Bx^n$, $A''=B'-B'x^n$, $A'''=B''-B''x^n$, &c. Donc si l'on substitue dans toutes les parties de la somme égale à P les valeurs de A, A', A'', A''', A^{IV}, &c. tirées de ces Equations, on réduira cette somme à celle des deux colomnes de la Table suivante.

		Col. I.	II.
1	$=$	1	
Ax	$=$	$1x^n$	$-1x^{2n}$
$A'x^{2n}$	$=$	Bx^{2n}	$-Bx^{3n}$
$A''x^{3n}$	$=$	$B'x^{3n}$	$-B'x^{4n}$
$A'''x^{4n}$	$=$	$B''x^{4n}$	$-B''x^{5n}$
$A^{IV}x^{5n}$	$=$	$B'''x^{5n}$	$-B'''x^{6n}$

Mais par la supposition, $B=\overline{1-x^{n+1}}$, $B'=B\times\overline{1-x^{n+2}}$, $B''=B'\times\overline{1-x^{n+3}}$, $B'''=B''\times\overline{1-x^{n+4}}$, &c. Donc si l'on substitue ces

ces valeurs de B, B', B'', B''', &c. dans la Colomne I de la Table ci jointe, sans toucher à celles qui sont dans la Colomne II, on aura

$$P = 1 + x^n - x^{2n} + x^{2n} - x^{3n} + \overline{1 - B}\,x^{3n} + Bx^{3n} - Bx^{4n} + \overline{2 - B'}\,x^{4n} + B'x^{4n} - B'x^{5n} + \overline{3 - B''}\,x^{5n}, \&c.$$

Si

Si l'on efface de cette ſomme tous les termes qui ſe détruiſent par des ſignes contraires, l'Equation ſe réduira à $P = 1 + x^n \overline{-1 - Bx^{n'} - B'x^{2n'} - B''x^{3n'} - B'''x^{4n} - \&c.} \times x^{3n+1} = 1 + x^n - Qx^{3n+1}$. Ce qu'il, &c.

16. En ſuppoſant que les lettres changeantes, n, m, A, B, P, Q, avec leurs numeros gardent leurs ſignifications précedentes, ſoient outre cela i, i', i'', i''', &c. égaux à la Suite des Binomes $1+x^n$, $1+x^{n'}$, $1+x^{n''}$, $1+x^{n'''}$, &c. Soient auſſi l, l', l'', l''', &c. égaux à cette progreſſion Arithmétique $3n+1$, $3n+1$, $3n'+1$, $3n''+1$, &c. Je dis que $Px^l = ix^l - i'x^{l+l'} + i''x^{l+l'+l''} - i'''x^{l+l'+l''+l'''} +$ &c. Ou bien ſi l'on prend k, k', k'', k''', &c. en la place de l, $l+i'$, $l+l'+i''$, $l+l'+l''+i'''$, &c. On aura $Px^k = ix^k - i'x^{k'} + i''x^{k''} - ix^{k'''} +$ &c.

Q ne diffère de P qu'en ce que l'on met n', c'eſt-à-dire $n+1$, en la place de n. Ainſi on peut regarder Q comme étant $= P'$, c'eſt-à-dire comme étant le ſecond terme d'une Suite dont P eſt le prémier terme, Suite que l'on peut continuer à l'infini, en ſubſtituant ſucceſſivement n'', n''', n^{iv}, &c. dans la valeur de P. Comme tous les termes ſucceſſifs des Suites i, k, & l, ſe forment par ces mêmes ſubſtitutions, l'Equation précedente $P = 1 + x^n - Qx^{3n+1}$, c'eſt-à-dire $P = i - P'x^{l'}$, doit être enviſagée comme une Equation générale, dont on fera (2) une infinité d'Equations particulières en ne faiſant qu'augmenter ſucceſſivement les numeros de toutes les changeantes, par l'addition des nombres 1, 2, 3, 3, 4, &c. On aura par conséquent $P'=\imath'-P''x^{l''}$, $P''=\imath''-P'''x^{l'''}$, $P'''=\imath'''-P^{iv}x^{l^{iv}}$, &c. D'où l'on peut former les Equations suivantes, $Px^{l}-x^{l}+P'x^{l+l'}=0$. $-P'x^{l+l'}+\imath'x^{l+l'}-P''x^{l+l'+l''}=0$. $+P''x^{l+l'+l''}-\imath''x^{l+l'+l''}+P'''x^{l+l'+l''+l'''}=0$. &c. Si l'on ajoute ensemble les prémiers membres de toutes ces Equations continuées à l'infini, tous les termes de la Suite des P, excepté le prémier, s'avanouïront; & si l'on met k, k', k'', &c en la place de l, $l+l'$, $l+l'+l''$, &c. on aura l'Equation $Px^{k}-\imath x^{k}+\imath'x^{k'}-\imath''x^{k''}+\imath'''x^{k'''}-$ &c. $=0$. Et par transposition, $Px^{k}=\imath x^{k}-\imath'x^{k'}+\imath''x^{k''}-\imath'''x^{k'''}+$ &c. $=0$. Ce qu'il &c.

CONCLUSION

17. Le Théorème proposé ci-dessus (4) n'est qu'un cas particulier de cette dernière Proposition. Car puisqu'on peut prendre pour n tel nombre que l'on veut, si l'on fait $n=1$, on a $\imath, \imath', \imath''$, &c. $1+x$, $1+x^2$, $1+x^3$, &c. & m; m' m'', &c. $=1-x$, $1-x^2$, $1-x^3$ &c. Les termes de la Suite A, A', A'', &c demeurent égaux aux produits m, mm' $mm'm''$, &c. qui représentent les produits $1-x$, $\overline{1-x}\times\overline{1-x^2}$, $\overline{1-x}\times\overline{1-x^2}\times\overline{1-x^3}$, &c. & ceux de la Suite B, B', B'', &c. égaux aux produits m, $m'm''$, $m'm''m'''$, qui représentent les produits $1-x^2$, $\overline{1-x^2}\times\overline{1-x^3}$, $\overline{1-x^2}\times\overline{1-x^3}\times\overline{1-x^4}$, &c. P sera ici égal à $1+Ax+A'x^2+A''x^3+$ &c. & Q ou $P'=1+Bx^2+B'x^4+B''x^6+$ &c. Enfin, puisque $l=3n+1$, $l'=3n+1$, $l''=3n'+1$, &c.

&c. & que les k sont les sommes successives des termes de la Suite l, si l'on fait $n=1$, & par conséquent n' ou $n-1=0$, on a l, l', l'', l''', &c. $= 1, 4, 7, 10$, &c & k, k', k'', k''', &c. $= 1, 5, 12, 22$, &c. On a démontré ci-dessus (14) que si on donne aux termes m, m', m'', &c. & A, A', A'', &c. les significations qu'on vient de leur donner, S, somme du produit infini $mm'm''m'''m^{IV}m_{V}$ &c. $=1-Ax-A'x^2-A''x^3-A'''x^4-$ &c. Donc $S=1-Px=1-Px^k$, puis qu'ici k ou $kc'=1$. Mais par la précedente, $Px^k=ix^k-i'x^{k'}+i''x^{k''}-i'''x^{k'''}+$ &c. Donc $S=1-ix^k+i'x^{k'}-i''x^{k''}+i'''x^{k'''}-$ &c. Ce qu'il &c.

Les principes précedens pourroient faire découvrir dans les nombres des propriétés plus étendues que celles à quoi j'ai borné ma Démonstration. On peut aller assez avant quand on est dans un bon chemin.

*ARTICLE X.

JUGEMENT *de l'Académie Royale des Sciences & Belles-Lettres, sur une Lettre prétenduë de Mr. de* LEIBNITZ. Berlin 1752. pp. 85. sans l'Avertissement qui en a IV.

Tout ce qui vient d'un Corps aussi respectable que l'est une Académie des Sciences