DIE WERKE VON DANIEL BERNOULLI

Band 2

Herausgegeben von der
Naturforschenden Gesellschaft in Basel

Springer Basel AG

Daniel Bernoulli

Die gesammelten Werke der Mathematiker und Physiker der Familie Bernoulli

Herausgegeben von der
Naturforschenden Gesellschaft
in Basel

Springer Basel AG

Die Werke von Daniel Bernoulli

Im Auftrag
der Naturforschenden Gesellschaft Basel
und der Otto-Spiess-Stiftung

Ediert von
David Speiser

Springer Basel AG

Die Werke von Daniel Bernoulli

Band 2
Analysis
Wahrscheinlichkeitsrechnung

Bearbeitet und kommentiert von
L.P. Bouckaert
B.L. van der Waerden

unter Benützung von Vorarbeiten von
H. Straub †

Springer Basel AG 1982

Publiziert mit Unterstützung des Schweizerischen Nationalfonds
zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung

Frontispiz:
Portrait Daniel Bernoullis von Johann Niclaus Grooth, Stuttgart 1723 - Memmingen 1797
(gemalt ca. 1750-1755), heute in der Aula des Naturhistorischen Museums an der Augustinergasse.

Umschlagvignette:
Erste Seite der «Hydrodynamica» (Strassburg 1738).

CIP-Kurztitelaufnahme der Deutschen Bibliothek

Die gesammelten Werke der Mathematiker und Physiker der Familie Bernoulli / hrsg. von d. Naturforschenden Ges. in Basel.

NE: Naturforschende Gesellschaft ‹Basel›
→ Bernoulli, Daniel: Die Werke

Bernoulli, Daniel:
Die Werke / von Daniel Bernoulli. Im Auftr. d. Naturforschenden Ges. Basel u. d. Otto-Spiess-Stiftung ed. von David Speiser.

(Die gesammelten Werke der Mathematiker und Physiker der Familie Bernoulli)
NE: Bernoulli, Daniel: [Sammlung]; Speiser, David [Hrsg.]
Bd. 2. Analysis; Wahrscheinlichkeitsrechnung / bearb. u. kommentiert von L. Bouckaert ; B. L. van der Waerden unter Benützung von Vorarbeiten von H. Straub. - 1982.
ISBN 978-3-0348-7796-1 ISBN 978-3-0348-7795-4 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-0348-7795-4

NE: Bouckaert, Louis [Bearb.]

Library of Congress Cataloging in Publication Data

Bernoulli, Daniel, 1700-1782.
Die Werke von Daniel Bernoulli.
(Die Gesammelten Werke der Mathematiker und Physiker der Familie Bernoulli)
French, German, and Latin.
«Verzeichnis der gedruckten Werke Daniel Bernoullis / H. Straub»: v. 2, p.
Includes index.
Contents: Bd. 2. Analysis, Wahrscheinlichkeitsrechnung / bearbeitet und kommentiert von L. Bouckaert, B. L. van der Waerden, unter Benützung von Vorarbeiten von H. Straub.
1. Mathematics - Collected works.
I. Speiser, David, 1926- . II. Naturforschende Gesellschaft in Basel. III. Otto-Spiess-Stiftung. IV. Title. V. Series.
QA3.B47 1982 510 82-9651
ISBN 978-3-0348-7796-1

Ursprünglich erschienen bei Birkhäuser Verlag Basel 1982
Softcover reprint of the hardcover 1st edition 1982

ISBN 978-3-0348-7796-1

Inhaltsverzeichnis

WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG

Einleitung zur Wahrscheinlichkeitsrechnung: B. L. van der Waerden

Werke

Vorwort des Editors

Seitdem Otto Spiess im Jahre 1936 die Initiative zu einer Gesamtausgabe sämtlicher Werke der Mathematiker und Physiker der Familie Bernoulli ergriffen hatte, war der Grossteil aller Anstrengungen den beiden Bernoullis der ersten Generation, Jacob I und Johann I, zugute gekommen. Mit der Herausgabe der Werke Daniels hatte sich der im Jahre 1972 verstorbene Hans Straub befasst. Gestützt auf das Verzeichnis, das der jüngere Daniel nach dem Tod seines Onkels als Anhang an seine lateinische Würdigung «Vita Danielis Bernoulli» in den Acta Eruditorum veröffentlichte, hatte Straub nach langem ausdauerndem Suchen ein Verzeichnis sämtlicher Werke Daniel Bernoullis zusammengestellt. Auf Anraten des Schreibenden veröffentlichte er es als Anhang zu seinem Artikel im «Dictionary of Scientific Biographies». Dieses Verzeichnis ist die Grundlage der mit diesem Band beginnenden Gesamtausgabe, und nach den Nummern dieses Verzeichnisses («St.N») werden im folgenden die einzelnen Arbeiten zitiert. Ausserdem verfasste Straub für verschiedene Arbeiten Daniel Bernoullis auf dem Gebiet der Wahrscheinlichkeitsrechnung eine Einleitung, die der Leser schon in diesem Band findet.

Als der Schreibende im Jahre 1973 von J.O. Fleckenstein im Namen der Mitglieder des Kuratoriums der Otto-Spiess-Stiftung mit der Herausgabe sämtlicher Werke Daniel Bernoullis betraut wurde, entschloss er sich, zunächst einen Gesamtplan der Ausgabe aufzustellen. Nach einer Prüfung der Arbeiten Daniel Bernoullis und der Vorarbeiten Straubs wurde beschlossen:

— die Arbeit mit der Wiederveröffentlichung der gedruckten Werke zu beginnen,
— über die Herausgabe der von Daniel Bernoulli selbst nicht veröffentlichten Werke von Fall zu Fall zu entscheiden und diese eventuell zurückzustellen,
— mit der Veröffentlichung der Korrespondenz, soweit sie noch nicht anderwärts gedruckt worden ist, zuzuwarten.

Offensichtlich sind es die gedruckten Werke Daniel Bernoullis, die schon seinen Ruhm begründet hatten, welche die wissenschaftliche Öffentlichkeit am meisten interessieren. Auch ist, anders als für Onkel und Vater, eine Gesamtausgabe der Werke Daniel Bernoullis bisher nie besorgt worden. Andererseits bleiben die Briefe selbst ohne die Werke oft unverständlich und bedeutungslos, während umgekehrt eine Gesamtausgabe der Werke eine kommentierte Briefedition bedeutend erleichtert.

Plan der Gesamtausgabe

Es liegt auf der Hand, dass keine Aufteilung der Werke allen Wünschen und Anforderungen gerecht werden kann. Streng chronologische Anordnung, wie sie z.B. für die Herausgabe von Korrespondenzen unerlässlich ist, oder Anordnung nach Sachgebieten? Wenige, breite Sachgebiete oder mehrere, schärfer definierte? Soll die Aufteilung der Disziplinen, welche zur Zeit des Autors galt, übernommen werden, oder soll man sich an die eigene, d.h. die zum Zeitpunkt der Herausgabe übliche, halten? Wobei letzteres voraussetzt, dass die Herausgabe sich nicht über einen allzu grossen Zeitraum erstreckt!

Klar ist, dass kein einziges Prinzip allein völlig befriedigen kann, d.h. dass Kompromisse unerlässlich sind und dass auch rein praktische Erfordernisse, wie etwa für einen Band möglichst wenig Herausgeber gewinnen zu müssen, gebührend zu berücksichtigen sind. Das übliche Prinzip: *Aufteilung auf eine gewisse Zahl von Wissenschaftsgebieten und chronologische Anordnung innerhalb dieser Gebiete,* erwies sich auch hier als die beste Lösung. Jedoch zeigte es sich als unumgänglich, die Jugendwerke in einer besonderen Gruppe zusammenzufassen. Diese stellen teils wegen der Gebiete, auf denen Daniel am Anfang seiner Tätigkeit arbeitete, teils wegen der besonderen Form der Veröffentlichung ein besonderes Problem. Es handelt sich um kurze Bücher und Arbeiten auf den Gebieten der Medizin, der Logik und der Mathematik. Es ergab sich, dass diese Gruppe in einem Band (eventuell zwei) gedruckt werden kann.

So entstand folgende Aufteilung:

Band 1: Jugendschriften (I)
Band 2: Analysis (II)
Wahrscheinlichkeitsrechnung (III)
Band 3: Mechanik (IV)
Band 4: Hydrodynamik (V)
Band 5: Hydrodynamik (V)
Band 6: Elastizität (VI)
Band 7: Magnetismus (VII)
Technologie (VIII)
Band 8: Technologie (VIII)

Ein Vorschlag für den am Ende des Bandes abgedruckten Plan wurde als Teil einer Arbeit einer Reihe von Wissenschaftern mit der Bitte zugestellt, den Herausgebern ihre Kritik und ihre Vorschläge im einzelnen mitzuteilen. Die meisten der Angeschriebenen, und ihnen gilt der herzliche Dank des Editors, sandten ihre Antwort, z.T. mit wertvollen Anregungen, die wir gerne berücksichtigten. Einer der führenden französischen Mathematiker unserer Zeit schrieb aus Princeton: «Naturellement, je me réjouis fort de voir que la publication des œuvres des Bernoulli se poursuit activement, et qu'à présent, Daniel Bernoulli va recevoir son dû!» So ergab sich schliesslich der am Ende des Bandes abgedruckte Plan.

Ziel der Edition

Erstes Ziel dieser Ausgabe ist es, die Werke Daniel Bernoullis dem heutigen Leser zugänglich zu machen. Diesem Ziel vor allem dienen die Drucklegung, welche möglichst dem heutigen Brauch folgt, und die Kommentare. Wir hoffen, dass nicht nur Historiker, sondern auch Mathematiker und Physiker die Werke wiederum lesen werden. Dagegen mussten die eigentliche historische Arbeit, Vorgeschichte, Wirkung der Werke, Berücksichtigung der Sekundärliteratur (nur allzuoft ist sie Tertiär- oder gar Quartärliteratur) usw. fast ganz zurücktreten, jedoch bietet sich noch manche Gelegenheit, dies wenigstens z. T. nachzuholen.

Die Grundsätze für die Herausgabe der Werke Daniels können nicht dieselben sein wie die, welche für die Werke Jacobs, vor allem für dessen Jugendschriften, Gültigkeit haben. Dieser begann seine Arbeit, bevor es auf dem Kontinent wissenschaftliche Zeitschriften gab. Erst später wurde er einer der ersten regelmässigen Mitarbeiter der «Acta Eruditorum» und des «Journal des Sçavans». Aus diesem Grund ist eine Herausgabe der publizierten Werke ohne eine kritische Veröffentlichung der Manuskripte nicht möglich. Anders bei Daniel. Als *er* anfing, hatten sich die Zeitschriften, zu denen nun auch eine Reihe von Jahrbüchern der verschiedenen Akademien gehörten, längst fest eingebürgert. Zum Teil ist es bekanntlich ein Verdienst gerade auch der beiden älteren Bernoulli, dass etwa von dieser Zeit an das Recht auf eine Entdeckung im allgemeinen auf einer Veröffentlichung begründet sein muss. Übrigens hat auch Daniel Bernoulli dies gelegentlich zu seinen Ungunsten erfahren! Deshalb stellen wir die Veröffentlichung seiner *gedruckten* Werke in den Vordergrund.

Stand der Editionsarbeit an den folgenden Bänden

Für die Herausgabe dieses Bandes (2) konnten die Herren L. P. Bouckaert (Leuven) und B. L. van der Waerden (Zürich), der schon Band 3 der Werke von Jacob Bernoulli besorgt hatte, gewonnen werden.

Die Arbeit an den übrigen Bänden steht heute auf dem folgenden Stand:

- Ein Band «Mechanik» (3), bearbeitet von Frau P. Radelet-de Grave (Louvain-la-Neuve), Herrn J. L. Pietenpol (Raleigh) und dem Schreibenden, steht vor dem Abschluss und soll unmittelbar nach diesem gedruckt werden.
- Für die Herausgabe der Hydrodynamischen Schriften, insbesondere der «Hydrodynamica», hat sich Herr C. A. Truesdell (Baltimore) zur Verfügung gestellt. Für diese Werke sind 2 Bände (4 und 5) vorgesehen.
- Ein Band (6) mit den Werken auf dem Gebiet der Elastizität ist von dem Schreibenden mit Frau P. Radelet-de Grave in Angriff genommen worden.

— Der Anfang der Arbeit am Magnetismus durch Frau P. Radelet-de Grave und an der Technologie durch Herrn L. Bossy (Bruxelles) steht unmittelbar bevor (7 und 8).
— Die Herausgabe der Jugendschriften (1) haben die Herren F. Rintelen (Basel) und L. P. Bouckaert übernommen.

Zum Schluss ist es die angenehme Pflicht des Editors, allen, die an diesem Band mitgeholfen haben, seinen herzlichen Dank auszusprechen, vor allem den beiden Herausgebern, den Herren L. P. Bouckaert und B. L. van der Waerden (Zürich), für ihre grosse Arbeit. Dann den Mitgliedern des Kuratoriums der Otto-Spiess-Stiftung, den Herren A. Gasser, J. O. Fleckenstein und B. Marzetta sowie J. L. von Planta für ihre dauernde Hilfe und Unterstützung, den zahlreichen Wissenschaftern, vor allem den Herren J. Dieudonné (Nizza) und C. A. Truesdell (Baltimore), die uns mit Rat und Ermutigung zur Seite gestanden sind, Herrn V. Scheuber (Basel) für die sorgfältige Bereitstellung des Materials, Frau A. de Baenst-Vandenbroucke (Louvain-la-Neuve) für die minutiöse Korrektur der Druckfahnen und für die Mithilfe bei der Drucklegung, Frau P. Radelet-de Grave für die Vorbereitung der Drucklegung, den Herren C. Einsele und A. Looser vom Birkhäuser Verlag, Basel, für ihre Mühe; die Drucklegung selbst erwies sich, vor allem wegen der umständlichen Schreibweise Daniel Bernoullis, als weit schwieriger als vorausgesehen. Es bedurfte einer langen Zusammenarbeit zwischen Frau P. Radelet-de Grave, die die Texte vorbereitete, und Herrn A. Gomm, der den Band graphisch gestaltete. Diese Arbeit beanspruchte viel Geduld und Ausdauer, damit die zahlreichen, nicht enden wollenden Probleme gelöst werden konnten. Und schliesslich sei dem Schweizerischen Nationalfonds zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung sowie der Regierung des Kantons Basel-Stadt für ihre finanzielle Unterstützung gedankt. Sie alle haben dazu beigetragen, die zweite Zeile von Goethes Vers, der dieser Ausgabe als Devise vorangestellt sei,

In dem Vergangnen lebt das Tüchtige,
Verewigt sich in schöner Tat,

zu verwirklichen. Allen Genannten gilt des Editors aufrichtiger Dank!

Louvain, Februar 1982 David Speiser

Mitten in den Herstellungsarbeiten dieses Bandes erreichte uns die Nachricht vom unerwarteten Hinschied Joachim Otto Fleckensteins, der seit Anfang der Herausgabe der Bernoulliwerke diese mitbetreute und auch den Schreibenden zur Mitarbeit heranzog. Seine Leistung für die Bernoulli-Edition ist nicht abzuschätzen und wird andernorts gewürdigt werden. Auch hier sei seiner Tätigkeit dankend gedacht. D. Sp.

Die Wiedergabe des Originaltextes

Da es, wie gesagt, das erste Ziel dieser Ausgabe ist, die wissenschaftlichen Schriften der Familie Bernoulli *zugänglich* zu machen, haben wir uns daran festgehalten, diese so genau wie möglich zu reproduzieren, d.h. ohne (bis auf kleine, unten genannte) Ausnahmen, die Orthographie und die mathematische Notation zu ändern.

Um jedoch das Lesen der Schriften zu erleichtern, haben wir deren Druck durchsichtiger gestaltet, indem wir Formeln und Definitionen aus dem Text heraushoben; diese sind im Original gewöhnlich *im* Text und reichen auch manchmal über eine Zeile hinaus, was das Lesen bedeutend erschwert.

Ausserdem haben wir, ebenfalls um die Lektüre zu erleichtern, systematisch folgende Korrekturen vorgenommen:

— In den lateinischen und französischen Schriften wurden die «ſ» durch ein «s» wiedergegeben.
— In den lateinischen Schriften wurden die «u» und «v» entsprechend dem heutigen Gebrauch verwendet.
— In den Formeln und im Text wurden offensichtliche Druckfehler (z.B. eine Nichtübereinstimmung der Formel mit der Figur) ohne weitere Angabe korrigiert; weniger triviale Fehler sind in einer Fussnote angegeben.
— Bei Quadratwurzelzeichen $\sqrt{}$ wurde der Oberstrich über den ganzen Radikanden hin verlängert; im Originaltext findet sich meist nur «$\surd$».
— Das «ß» wurde durch «β» ersetzt.
— DB benutzt oft denselben Buchstaben für verschiedene Dinge, z.B. der «... Punkt M mit Masse M ...»; wir haben bisweilen versucht, diese Zweideutigkeit durch den Gebrauch *gerader* und *kursiver* Typen zu beheben.
— In einigen allzu langen Sätzen wurde ein Doppelpunkt (:) durch einen Strichpunkt (;) oder, wo es möglich war, durch einen Punkt (.) ersetzt.

Von diesen Fällen abgesehen, ist der Text genau wiedergegeben. Heute ungebräuchliche Symbole sind in einer Fussnote erklärt.

Die Ziffern (z.B. II.5 - St.62), die jeder Schrift Daniel Bernoullis beigegeben wurden, haben folgende Bedeutung:

— Die römische Zahl (II) bezeichnet das Sachgebiet gemäss den Angaben auf S.12.
— Die erste arabische Zahl (5) bezeichnet die chronologische Stelle in der betreffenden Gruppe von Arbeiten.
— Die zweite arabische Zahl (St.62) ist diejenige des Straub-Verzeichnisses auf S.398 dieses Bandes.
— Die * bezeichnen die Einleitung zu einem Text von Daniel Bernoulli, verfasst vom Herausgeber eines Journals (z.B. II.5* - St.62*).

P.R.d.G.

Analysis

L.P. Bouckaert

Séries récurrentes

Observationes de seriebus quae formantur ex additione vel substractione quacunque terminorum se mutuo consequentium.
II.1 - St.16
Commentarii Acad. Petropol. III, 1728 (1732), p.85-100.

Notationes de aequationibus, quae progrediuntur in infinitum, earumque resolutione per methodum serierum recurrentium: ut et de nova serierum specie. Praelectio prima.
II.2a - St.20a
Commentarii Acad. Petropol. V, 1730-31 (1738), p.63-69.

Notationes de aequationibus, quae progrediuntur in infinitum, earumque resolutione per methodum serierum recurrentium: ut et de nova serierum specie. Praelectio secunda.
II.2b - St.20b
Commentarii Acad. Petropol. V, 1730-31 (1738), p.70-82.

Ces trois mémoires de Daniel Bernoulli sont consacrés à l'étude des suites récurrentes. De pareilles suites avaient déjà été considérées par A. de Moivre dans son étude du temps d'arrêt des jeux de hasard (The doctrine of chances 1717). de Moivre appelle récurrente une suite dont chaque terme est une fonction linéaire d'un nombre donné de termes qui précèdent. En examinant la correspondance de Daniel Bernoulli, H. Straub a montré que l'intérêt de Bernoulli pour ces suites s'est manifesté à partir de 1723. Il a d'abord cherché la structure du terme général de ces suites. En se basant sur ces résultats, il a proposé une méthode de calcul approché des racines d'une équation. Dans ses travaux ultérieurs sur les séries divergentes et les fractions continuées, il fait usage des suites récurrentes.

La suite

$$\dots X_{i-p}, X_{i-p+1}, \dots, X_i, X_{i+1}, \dots$$

est récurrente, s'il existe, pour tout i, une relation de la forme

$$X_i = q_1 X_{i-1} + q_2 X_{i-2} + \cdots + q_p X_{i-p}.$$

Les coefficients constants $q_1, q_2, \dots, q_p$, qui interviennent dans ces relations sont appelés par de Moivre et D. Bernoulli les *indices* ou l'*échelle* de la suite. Des exemples de suites récurrentes sont les suivantes:

Les progressions géométriques, $X_i = qX_{i+1}$. Ici q est le seul indice de la suite.

Les progressions arithmétiques, $X_i = 2X_{i-1} - X_{i-2}$. Ici les indices sont 2 et (-1).

La suite de Fibonnaci, $X_i = X_{i-1} + X_{i-2}$. Les indices de la suite sont 1 et 1.

La relation de récurrence

$$X_i = q_1 X_{i-1} + \cdots + q_p X_{i-p}$$

permet de calculer tout nombre de la suite, dès que l'on connaît les p termes consécutifs $X_1, X_2, \ldots X_p$. La solution générale de l'équation de récurrence dépend donc de p constantes arbitraires: elle peut s'obtenir à partir de p solutions indépendantes. Daniel Bernoulli observe que la relation de récurrence

$$X_i = q_1 X_{i-1} + \cdots + q_p X_{i-p}$$

peut être satisfaite par une progression géométrique: il pose $X_i = a^i$. La relation de récurrence devient alors

$$a^p = q_1 a^{p-1} + \cdots + q_p.$$

Daniel Bernoulli appelle cette équation algébrique l'*équation primaire* de la suite récurrente (cette équation se présente sous le nom d'*échelle différentielle* chez de Moivre et d'*équation caractéristique* chez les auteurs modernes comme P. Montel). Si toutes les racines $a_1, a_2, \ldots, a_p$ de cette équation sont distinctes, la solution générale de l'équation de récurrence est

$$X_i = A_1 a_1^i + A_2 a_2^i + \cdots + A_p a_p^i,$$

où les coefficients $A_1, A_2, \ldots, A_p$ sont des constantes. Soient a et β deux racines de l'équation primaire: la suite récurrente possède la solution

$$X_i = \frac{a}{a-\beta}(a^i - \beta^i) = a\,(a^{i-1} + a^{i-2}\beta + \cdots + \beta^i).$$

Lorsque la racine β tend vers la racine a, l'expression précédente tend vers $X_i = i\,a^i$. On vérifie que dans le cas d'une racine double a, il correspond à cette racine deux solutions $X_i = a^i$ et $X_i = i\,a^i$. Si elle est triple il lui correspond $X_i = a^i, X_i = i\,a^i, X_i = i^2 a^i$. Si toutes les racines de l'équation primaire sont égales, la solution générale de l'équation de récurrence sera

$$X_i = (A_1 + A_2 i + \cdots + A_p i^{p-1})a^i.$$

Un cas particulier peut se présenter quand toutes les racines sont égales à 1: l'expression du terme général devient alors

$$X_i = A_1 + A_2 i + \cdots + A_p i^{p-1}.$$

Dans ce cas

$$a^p - q_1 a^{p-1} - \cdots - q_p = (a-1)^p$$

ou

$$q_1 = \frac{p}{1}, \qquad q_2 = -\frac{p(p-1)}{1\cdot 2}, \qquad q_3 = \frac{p(p-1)(p-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdots.$$

Dans tous les cas, la solution générale de l'équation de récurrence comprend p constantes indéterminées $A_1, A_2, \ldots, A_p$. Si les p premiers termes de la suite sont connus, les valeurs des constantes $A_1, A_2, \ldots, A_p$ peuvent s'obtenir par identification. Daniel Bernoulli considère les suites récurrentes qui se présentent quand l'équation primaire ne possède pas de racine multiple: il les appelle les *suites exponentielles*, car le terme général est une somme dont les termes dépendent exponentiellement de l'ordre de ce terme. Les suites pour lesquelles toutes les racines de l'équation primaire sont égales à 1 sont appelées des *suites algébriques*: le terme général d'une pareille suite est un polynôme par rapport à l'ordre de ce terme. Il observe que toutes les suites algébriques sont récurrentes. Supposons, en effet, que le terme général de la suite soit un polynôme de degré $(p-1)$: le tableau des différences de cette suite donne alors une différence $p^{\text{ième}}$ nulle. Cette relation fournit l'équation de récurrence cherchée. Une fois connue la forme générale des termes de la suite, il est facile de calculer la somme de la série correspondante.

Daniel Bernoulli se sert de la théorie précédente pour déterminer les valeurs numériques des racines d'un polynôme. Soit l'équation

$$s^p = q_1 s^{p-1} + \cdots + q_p.$$

Nous pouvons lui associer une suite récurrente dont elle est l'équation primaire. Le terme général de la suite récurrente sera

$$X_n = A_1 s_1^n + \cdots + A_p s_p^n$$

au cas où toutes les racines sont distinctes. Le rapport de deux termes successifs sera

$$\frac{X_{n+1}}{X_n} = \frac{A_1 s_1^{n+1} + A_2 s_2^{n+1} + \cdots + A_p s_p^{n+1}}{A_1 s_1^n + A_2 s_2^n + \cdots + A_p s_p^n} = s_1 \frac{A_1 + A_2\left(\frac{s_2}{s_1}\right)^{n+1} + \cdots + A_p\left(\frac{s_p}{s_1}\right)^{n+1}}{A_1 + A_2\left(\frac{s_2}{s_1}\right)^{n} + \cdots + A_p\left(\frac{s_p}{s_1}\right)^{n}}.$$

Si la racine s_1 est plus grande en module que les autres, la fraction précédente tend vers 1 pour de grandes valeurs de n. Le rapport tend donc vers la racine dont la valeur absolue est la plus grande.

La méthode précédente permet aussi de calculer la racine dont la valeur absolue est la plus petite. Soit

$$1=q_1 t+q_2 t^2+\cdots+q_p t^p$$

l'équation dont on cherche la racine de plus petite valeur absolue. Posons $t=1/s$. L'équation devient

$$s^p=q_1 s^{p-1}+\cdots+q_p.$$

A la plus petite racine t correspond la plus grande racine s. Il découle du calcul précédent que

$$t_1=\frac{1}{s_1}=\lim_{n\to\infty}\frac{X_n}{X_{n+1}}.$$

Pour obtenir une valeur approchée de la plus petite racine, il suffit de considérer la suite dont les p premiers termes sont arbitraires, et dont les termes suivants sont calculés par les indices $q_1, q_2, \ldots, q_p$. La limite du rapport d'un terme au terme suivant donnera la plus petite racine. Daniel Bernoulli donne comme exemple l'équation

$$1=x+2x^2+3x^3+4x^4+5x^5.$$

Il prend 1 comme valeur des 5 premiers termes de la suite. Celle-ci devient

$$1, 1, 1, 1, 1, 15, 29, 71, 183, 477, 1239, 3171, \ldots.$$

La valeur approchée de la plus petite racine sera

$$\frac{1239}{3171}=\frac{59}{151}.$$

Il envisage également le cas où deux racines sont de signes contraires et de même valeur absolue: il suffit de considérer le rapport X_n/X_{n+2} qui fournit l'estimation du carré de la racine.

La méthode précédente permet de calculer la plus grande et la plus petite racine. La convergence vers la plus petite racine est d'autant meilleure, que le module du rapport de cette racine à la suivante est plus petit. Daniel Bernoulli propose un changement de variable $x=a+y$, qui rapproche la racine cherchée de l'origine. Lorsque la racine de plus grand module est une racine multiple, le même procédé s'applique, mais la convergence peut être ralentie.

Daniel Bernoulli fait un choix arbitraire des p premiers termes de la suite récurrente. Il se peut que les composantes de ces termes qui correspondent à la plus grande ou à la plus petite racine ne soient pas représentées. Les successeurs de Bernoulli, Euler[1] et Lagrange[2] ont étudié le choix de ces premiers termes. En choisissant convenablement ces premiers termes, la suite représente les sommes de puissances des racines de l'équation primaire. Soit

$$s^p - q_1 s^{p-1} - q_2 s^{p-2} - \cdots - q_p = 0$$

l'équation primaire. On sait que les coefficients $q_1, q_2, \ldots, q_p$ sont égaux - au signe près - aux fonctions symétriques élémentaires des racines de cette équation. Les formules de Newton permettent d'exprimer ces sommes de puissances

$$S_1 = s_1 + s_2 + \cdots + s_p, \qquad S_2 = s_1^2 + s_2^2 + \cdots + s_p^2, \ldots$$

au moyen des fonctions symétriques élémentaires, et donc des coefficients $q_1, q_2, \ldots, q_p$ de l'équation primaire.

On a

$$\begin{aligned}
&S_1 = q_1 \\
&S_2 = q_1 S_1 + 2 q_2 \\
&------- \\
&S_p = q_1 S_{p-1} + q_2 S_{p-2} + \cdots + p q_p \\
&------- \\
&S_{p+i} = q_1 S_{p+i-1} + q_2 S_{p+i-2} + \cdots + q_p S_i \\
&-------
\end{aligned}$$

A partir de l'équation d'ordre $(p+1)$, ces relations ne sont autres que les équations de la suite récurrente associée à l'équation. En choisissant les valeurs des p premiers termes de la suite d'après les p premières relations on obtient une suite récurrente dont les termes sont les sommes de puissances de racines. Si la valeur absolue de s est plus grande que celle des autres racines, on obtient

$$\frac{S_{n+1}}{S_n} = \frac{s_1^{n+1} + s_2^{n+1} + \cdots + s_p^{n+1}}{s_1^n + s_2^n + \cdots + s_p^n} = s_1 \frac{1 + \left(\frac{s_2}{s_1}\right)^{n+1} + \cdots + \left(\frac{s_p}{s_1}\right)^{n+1}}{1 + \left(\frac{s_2}{s_1}\right)^n + \cdots + \left(\frac{s_p}{s_1}\right)^n}.$$

1 L. Euler E101 «Introductio in analysin infinitorum» art. 332. Opera Omnia ser. I vol. 8, p. 339–361.

2 J.L. Lagrange «Traité sur la résolution des équations numériques» note 6 sur la méthode d'approximation tirée des séries récurrentes. Œuvres, tome 8.

Cette expression tend vers s_1 lorsque n augmente indéfiniment. Des considérations semblables s'appliquent à la plus petite racine.

Dans les deux mémoires de 1730, St. 20 a et b, Daniel Bernoulli cherche à étendre sa méthode. Il ne cherche plus la plus petite racine d'un polynôme, mais le plus petit zéro d'une série potentielle infinie. Il considère l'équation

$$1 = q_1 x + q_2 x^2 + \cdots + q_n x^n + \cdots$$

comme l'équation primaire d'une suite récurrente

$$X_n = q_1 X_{n-1} + q_2 X_{n-2} + \cdots.$$

Comme les indices $q_1, q_2, \ldots, q_n$ forment une suite infinie, on pourrait craindre que le membre de droite comporte une infinité de termes. Daniel Bernoulli évite cette difficulté en considérant une suite qui débute par une infinité de zéros suivis de un. Les termes suivants sont calculés par la relation de récurrence. On a donc

$$\ldots 0, 0, 1, q_1, q_1^2 + q_2, q_1(q_1^2 + q_2) + q_2 q_1 + q_3, \ldots.$$

Le rapport de deux termes successifs lui fournit une approximation à la plus petite racine de l'équation

$$1 = q_1 x + q_2 x^2 + q_3 x^3 + \cdots + q_n x^n + \cdots.$$

Daniel Bernoulli considère une suite de polynômes de degrés croissants qui forment une approximation à la fonction définie par la série potentielle. La suite des plus petites racines de ces polynômes lui permet d'estimer la plus petite racine de la fonction analytique considérée. L'étude de cette méthode fut reprise par J. König[3] et par J. Hadamard[4]. Ce dernier remarque que si la seule singularité d'une fonction analytique située sur le cercle de convergence est un pôle simple ou multiple, l'affixe a de ce point est donné par la limite du rapport a_n/a_{n+1} des coefficients successifs dans le développement de Taylor de cette fonction. Soit $f(z)$ une fonction nulle en a, régulière et différente de zéro dans un cercle de rayon $|a|$, et soit $g(z)$ une fonction analytique sans singularité dans le cercle de convergence de $f(z)$. La fonction

$$\frac{g(z)}{f(z)} = h(z) = h_0 + h_1 z + \cdots + h_n z^n + \cdots$$

3 J. König «Ein allgemeiner Ausdruck für ihren absoluten Betrag nach kleinster Wurzel der Gleichung n-ten Grades» Math. Ann., vol. 9 (1876), p. 530–540.

4 J. Hadamard «Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor» Journ. Math. (4), vol. 8 (1892), p. 101–186. Voir aussi A.S. Householder «Principles of numerical analysis», McGraw-Hill, New York 1953.

est analytique et possède comme seule singularité sur son cercle de convergence le pôle a. En égalant les coefficients de mêmes puissances dans les deux membres de la relation

$$g_0+g_1 z+\cdots+g_n z^n+\cdots=(a_0+a_1 z+\cdots+a_n z^n+\cdots)\cdot(h_0+h_1 z+\cdots+h_n z^n+\cdots)$$

on trouve

$$\begin{aligned}&a_0 h_0=g_0\\&a_0 h_1+a_1 h_0=g_1\\&a_0 h_2+a_1 h_1+a_2 h_0=g_2\\&----------\end{aligned}$$

Les coefficients $h_0, h_1, h_2, \ldots$ sont les termes d'une suite récurrente déduite de l'équation primaire

$$f(z)=a_0+a_1 z+a_2 z^2+\cdots=0.$$

On en déduit que le rapport des termes successifs h_n et h_{n+1} de cette suite tend vers a. Le choix de la fonction $g(z)$ n'est soumis qu'à la condition de ne pas présenter de singularité sur le disque de convergence de la fonction $f(z)$. J. Hadamard remarque que l'on peut faire le choix de $g(z)=f'(z)$: appliqué à un polynôme $f(z)$, ce choix conduit à la suite des sommes de puissances des racines de ce polynôme. Ce résultat avait été anticipé par Lagrange, dans une addition au mémoire sur la résolution des équations numériques (1770).

Daniel Bernoulli se sert de la même méthode pour inverser une série de puissances. Soit

$$y=x+a x^2+b x^3+c x^4+e a^5+\cdots.$$

Il désire exprimer x en fonction de y. Il obtient d'abord le résultat par une méthode de coefficients indéterminés. Il obtient pour x une série de puissances de y

$$x=y-a y^2+(2 a^2-b) y^3-(5 a^3-5 a b+c) y^4+(14 a^4-21 a^2 b+6 a c+3 b^2-e) y^5-\cdots$$

Il cherche ensuite une expression de x en fonction de y par la méthode des suites récurrentes. Il écrit la relation sous la forme

$$1=\frac{1}{y} x+\frac{a}{y} x^2+\frac{b}{y} x^3+\frac{c}{y} x^4+\frac{e}{y} x^5+\cdots.$$

Il considère les coefficients $1/y$, a/y, b/y, c/y, e/y comme les indices d'une suite récurrente qui débute par une infinité de zéros suivis de 1. Cette suite est

$$\ldots 0, 1, \frac{1}{y}, \left(\frac{1}{y^2}+\frac{a}{y}\right), \left(\frac{1}{y^3}+\frac{2a}{y^2}+\frac{b}{y}\right), \left(\frac{1}{y^4}+\frac{3a}{y^3}+\frac{a^2}{y^2}+\frac{2b}{y^2}+\frac{c}{y}\right),$$

$$\left(\frac{1}{y^5}+\frac{4a}{y^4}+\frac{3a^2}{y^3}+\frac{3b}{y^3}+\frac{2ab}{y^2}+\frac{2c}{y^2}+\frac{e}{y}\right), \ldots$$

Le quotient des deux derniers termes de la suite donne une expression approchée de x en fonction de y

$$x = \frac{y+3ay^2+(a^2+2b)y^3+cy^4}{1+4ay+3(a^2+b)y^2+2(ab+c)y^3+ey^4}.$$

Nous trouvons ici une approximation de la fonction x comme fonction rationnelle de y. Si nous développons cette fonction rationnelle de y suivant les puissances de y jusqu'au cinquième degré, nous retrouvons la série calculée ci-dessus par la méthode des coefficients indéterminés. La fonction rationnelle obtenue dépend du choix des termes initiaux de la suite récurrente. Daniel Bernoulli illustre la puissance de cette méthode par le calcul de π. Ce nombre est la plus petite racine différente de zéro de $\sin x$. Il est donc racine de

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \frac{x^5}{9!} - \frac{x^{10}}{11!} + \cdots.$$

Pour résoudre l'équation

$$1 = \frac{\pi^2}{3!} - \frac{\pi^4}{5!} + \frac{\pi^6}{7!} - \cdots$$

on pose $q = \pi^2/6$, et l'on détermine la racine q comme quotient de deux termes successifs de la suite récurrente. Il trouve

$$q = \frac{4191}{2555} \quad \text{et} \quad \pi = 3{,}1376.$$

Si l'on cherche à exprimer l'inconnue q comme racine d'un polynôme de même degré, on trouve

$$q = \frac{1048067}{673750} \quad \text{et} \quad \pi = 3{,}0550.$$

Daniel Bernoulli trouve que certaines fonctions peuvent être mieux approximées par des fonctions rationnelles que par des séries de puissances. Ce moyen d'approximation fut repris en 1821 par Cauchy dans ses exercices d'Analyse, en 1846 par C. G. J. Jacobi[5], en 1881 par G. Frobenius[6] et principalement par H. Padé[7] en 1892.

Lettres à Euler et à Garcin

Excerpta ex litteris. A Daniele Bernoulli ad Leonhardum Euler.
II.3 – St.35
Commentarii Acad. Petropol. XIII, 1741–1743 (1751), p.3–15.

Cette lettre de Daniel Bernoulli à Euler est consacrée à la théorie des équations différentielles linéaires à coefficients constants. Ces équations avaient préoccupé Daniel Bernoulli depuis 1734, à l'occasion d'une étude des tiges vibrantes. Il communiqua ses résultats à Euler qui étudiait des problèmes analogues. L'importante publication d'Euler «De integratione aequationum differentialium altioris gradus» (1743)[8] est contemporaine de la lettre de Daniel Bernoulli: leurs résultats sont très proches. Daniel Bernoulli observe que la solution générale d'une équation différentielle linéaire comporte un nombre de constantes arbitraires égal à son degré. Dans certains exemples ce nombre de constantes paraît plus grand, mais Daniel Bernoulli observe qu'elles peuvent alors s'exprimer par un nombre moindre de constantes. Il reprend l'équation

$$\frac{d^4 s}{du^4} = f^4 s$$

de la tige vibrante, et montre que la solution générale s'écrit par des exponentielles et des fonctions trigonométriques. Il traite de la même manière l'équation

$$\frac{d^n s}{du^n} = s\,.$$

Son équation caractéristique possède comme racines les racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité, et la solution générale peut s'écrire par des exponentielles complexes ou par des produits d'exponentielles et de fonctions trigonométriques. Dans le cas général, l'équation caractéristique peut posséder des racines multiples. Daniel Bernoulli montre que, dans ce cas, la solution générale sera un produit d'exponentielles complexes par des polynômes.

5 C.G.J. Jacobi Journ. R. Ang. Math., vol.30, ou Math. Werke, vol. III, p.479.
6 G. Frobenius Journ. R. Ang. Math., vol.90, ou Gesammelte Abhandlungen, vol. II, p.47.
7 H. Padé Ann. Ec. Norm. Sup., Supplément 3, vol.9 (1892), p.1–93.
8 L. Euler E62, Opera Omnia ser. I vol.22, p.108–149.

Extrait d'une lettre de Mr. Daniel Bernoulli à Mr. Garcin, sur les elemens d'algèbre de Mr. Clairaut.
II.4 - S
Journal Helvétique, Janvier 1747 (1747), p.57–65.

Cette lettre de Daniel Bernoulli donne une analyse de l'ouvrage de A.C. Clairaut «Elémens d'Algèbre» paru en 1746. Il loue la méthode pédagogique de l'auteur, qui encourage le lecteur à découvrir les résultats par lui-même. Clairaut traite l'addition et la multiplication des expressions algébriques, et la substitution des nombres aux lettres. Après une étude des racines carrées, il passe à la résolution des équations algébriques des quatre premiers degrés. Cette matière figurait dans la plupart des manuels d'algèbre de cette époque: Euler y ajoutait un examen de problèmes plus arithmétiques, tels que la résolution d'équations Diophantiennes et les fractions continuées. Daniel Bernoulli attire l'attention sur une méthode d'itération qui permet à Clairaut de calculer numériquement les racines des équations du troisième et du quatrième degré.

Somme de séries divergentes

De summationibus serierum quarundam incongrue veris earumque interpretatione atque usu.
II.5 - St.62
Novi Commentarii Acad. Petropol. XVI, 1771 (1772), p.71–90.

De indole singulari serierum infinitarum quas sinus vel cosinus angulorum arithmetice progredientium formant, earumque summatione et usu.
II.6 - St.64
Novi Commentarii Acad. Petropol. XVII, 1772 (1773), p.3–23.

Theoria elementaria serierum, ex sinibus atque cosinibus arcuum arithmetice progredientum diversimode compositarum, dilucidata.
II.7 - St.66
Novi Commentarii Acad. Petropol. XVIII, 1773 (1774), p.3–23.

Ces trois mémoires sont consacrés à la sommation des séries divergentes. Daniel Bernoulli examine en particulier certaines séries trigonométriques divergentes. En partant de sa méthode de sommation, il déduit certaines identités intéressantes.

Depuis l'époque de Leibniz, les mathématiciens ont tenté d'attribuer une valeur numérique à certaines séries divergentes. Dans une lettre à Christian Wolff, publiée en 1713 dans les Acta Eruditorum[9], Leibniz examine la série

$$1-1+1-1+\cdots.$$

9 G.W. Leibniz Mathematische Schriften, vol.5, p.382–387.

G. Grandi avait attribué à cette série la valeur $1/2$. Leibniz justifie cette conclusion de deux manières. Du développement

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+\cdots$$

valable pour des valeurs de x inférieures à l'unité, il conclut par continuité qu'elle est valable pour x égal à 1. Il trouve ainsi

$$1-1+1-1+\cdots=\frac{1}{2}\cdot$$

Il considère, d'autre part, la succession des sommes partielles de cette série: ces sommes partielles valent alternativement 1 et 0. Comme ces valeurs se présentent avec la même fréquence, il trouve raisonnable d'attribuer la valeur $1/2$ à la série. Au lieu de considérer ces méthodes de sommation comme définissant la valeur de la série divergente, Leibniz les regardait comme un moyen pour calculer une somme déjà préexistante.

En 1754 Euler[10] reprend l'idée de Leibniz, de définir la valeur d'une série divergente par un argument de continuité. Il pose en principe que si une série se présente comme un développement d'une expression fermée, elle peut être utilisée en mathématique à la place de cette expression, même pour des valeurs de la variable qui rendent la série divergente. Les expressions fermées envisagées par Euler étaient des fonctions analytiques d'une variable.

La seconde méthode de sommation envisagée par Leibniz fut reprise en 1771 par Daniel Bernoulli. Il envisage des séries divergentes qui généralisent la série

$$1-1+1-1+\cdots$$

envisagée par Leibniz. Il suppose que les sommes partielles reprennent périodiquement la même valeur. Dans le cas précédent les sommes sont $s_1=1, s_2=0, s_3=1, s_4=0,\ldots$: la suite de ces sommes présente une période de longueur 2. Un autre exemple est donné par la série

$$1-1+0+1-1+0+\cdots$$

dont les sommes partielles sont $s_1=1, s_2=0, s_3=0, s_4=1, s_5=0, s_6=0,\ldots$. La longueur de la période est maintenant égale à 3. Dans les deux exemples précédents les

10 L. Euler E247 «De seriebus divergentibus». Opera Omnia, ser. I, vol. 14, p. 585–617.

valeurs des sommes partielles se reproduisent avec la même période: il faut donc accorder les mêmes droits à toutes les sommes partielles qui se présentent dans une même période. Cette affirmation est justifiée par le «principe métaphysique de la raison suffisante». Dans le premier exemple proposé, la longueur de la période est 2, et les valeurs des sommes partielles 1 et 0: la moyenne

$$\frac{1}{2}(1+0)=\frac{1}{2}$$

est la valeur attribuée à la série. Dans le second exemple la longueur de la période est 3, tandis que les sommes partielles sont $1,0,0$: Daniel Bernoulli attribue à la série la valeur moyenne

$$\frac{1}{3}(1+0+0)=\frac{1}{3}\cdot$$

Si, d'une manière générale, les sommes partielles forment une suite périodique $s_1, s_2, \ldots, s_n$, l'auteur attribue à cette série la valeur

$$\frac{1}{n}(s_1+s_2+\cdots+s_n).$$

Les sommes partielles peuvent s'exprimer par les termes $a_1, a_2, \ldots, a_n$ de la série

$$s_1=a, s_2=a_1+a_2, \ldots, s_n=a_1+a_2+\cdots+a_n.$$

La moyenne précédente peut alors s'écrire

$$\frac{1}{n}\left(n a_1+(n-1)a_2+\cdots+a_n\right)=a_1+\left(1-\frac{1}{n}\right)a_2+\cdots+\frac{1}{n}a_n.$$

Cette expression ne diffère pas de celle introduite en 1888 par Cesàro[11]. Il faut remarquer cependant que Daniel Bernoulli ne propose sa méthode de sommation que dans le cas où les sommes partielles forment une suite périodique. Il fait usage de sa méthode de sommation pour l'étude des séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin n x, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \cos n x.$$

11 E. Cesàro Atti d. R. Accad. dei lincei, Rendiconti 4, vol. 4 (1888), p. 452–457, et Bull. des Sci. Math. (2), vol. 14 (1890), p. 114–120.

Il fait remarquer que les sommes partielles de ces séries forment des périodes finies quand x/π est un nombre rationnel. Quand ce rapport se rapproche d'un nombre irrationnel, la période devient longue; quand x/π est irrationnel, on pourrait considérer la période comme infinie. Daniel Bernoulli applique sa méthode de sommation pour des valeurs quelconques de x: il dépasse ainsi la portée de son argument de la raison suffisante, et il inaugure la méthode de sommation de Cesàro. Pour montrer la force de son principe de sommation, Daniel Bernoulli montre que la sommation par facteur de convergence, utilisée par Euler, conduit au même résultat dans certains cas. Pour la série

$$1-1+1-1+\cdots$$

la formation des moyennes conduit Bernoulli à la valeur $1/2$. La méthode des facteurs de convergence d'Euler donne

$$(1+x)^{-1}=1-x+x^2-x^3+\cdots.$$

Si l'on fait tendre x vers 1 dans cette formule, on trouve le même résultat $1/2$. Dans les cas particuliers qu'il envisage, il trouve qu'une série qui peut être sommée par sa méthode de moyenne peut l'être également par la méthode du facteur de convergence, et que les valeurs coïncident. Il anticipe, dans une certaine mesure, le résultat établi plus tard qu'une série sommable suivant Cesàro l'est également suivant Abel[12], et que les résultats concordent.

Daniel Bernoulli établit la linéarité de son procédé de sommation. Il considère également des séries de fonctions continues, et leur applique sa méthode de sommation. Il admet que les opérations de sommation et d'intégration terme à terme sont permutables pour des séries divergentes de fonctions continues. Cette propriété a été établie plus tard. En appliquant ce principe à la série

$$1-x+x^2-x^3+\cdots=\frac{1}{1+x},$$

il obtient

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots=\log 2.$$

Ce résultat confirme sa méthode.

Pour examiner la série

$$\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\cdots,$$

12 N.H. Abel «Journal für die reine angewandte Mathematik» Bd. 1 (1826), p. 311.

il observe qu'elle provient d'une suite récurrente, dont les indices sont $(2\cos x)$ et (-1). En effet

$$\sin(n+1)x = 2\cos x \cdot \sin nx - \sin(n-1)x\,.$$

Le terme général de cette suite récurrente est $(A s_1^n + B s_2^n)$, où s_1 et s_2 sont les racines de l'équation

$$s^2 = 2s\cos x - 1\,.$$

On a donc

$$s_1 = \cos x + i\sin x \quad \text{et} \quad s_2 = \cos x - i\sin x\,.$$

Le terme général de la suite est donc

$$\frac{1}{2i}\left[(\cos x + i\sin x)^n - (\cos x - i\sin x)^n\right].$$

Les sommes comprennent un terme indépendant de n, $\sin x/2(1-\cos x)$, et un terme qui dépend de n. Comme la valeur moyenne sur une période de ce terme est nulle, son principe général permet à Daniel Bernoulli de le négliger dans la somme. Il trouve ainsi

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \cdots = \frac{\sin x}{2(1-\cos x)}\,.$$

Il fait observer que cette égalité n'est pas valable pour $x=0$. Il prend connaissance par la suite d'un travail de l'abbé Bossut[13], où celui-ci établit la formule

$$\sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx = \frac{\sin x\,[1+\cos x - \cos nx - \cos(n+1)x]}{1-\cos 2x}\,.$$

Pour obtenir la somme de la série infinie, il remarque que $\cos nx$ et $\cos(n+1)x$ donnent une moyenne nulle sur une période de n. La valeur de la série infinie s'obtient donc en négligeant ces termes. Il obtient ainsi une expression égale à celle qu'il avait obtenue antérieurement.

L'abbé Bossut avait également obtenu la relation

$$\cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx = \frac{\cos x\,[\sin nx + \sin(n+1)x - \sin x]}{\sin 2x}\,.$$

Daniel Bernoulli en déduit la valeur de la série infinie

13 Ch. Bossut Hist. et Mém. de l'Académie de Paris 1769, p. 453.

$$\cos x+\cos 2x+\cdots=-\frac{1}{2}\cdot$$

Il fait observer que cette relation n'est pas valable pour $x=0$. Pour d'autres valeurs de x, il obtient diverses séries numériques divergentes.

$$\text{Pour } x=\pi: \qquad -1+1)-1+1-1+1\cdots=-\frac{1}{2}\cdot$$

$$\text{Pour } x=\frac{2\pi}{3}: \qquad -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1)-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1-\cdots=-\frac{1}{2}\cdot$$

$$\text{Pour } x=\frac{\pi}{2}: \qquad 0-1-0+1)+0-1-\cdots=-\frac{1}{2}\cdot$$

Il soumet la relation

$$\cos x+\cos 2x+\cdots=-\frac{1}{2}$$

à l'intégration. En intégrant terme à terme, il obtient

$$\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x+\cdots=C-\frac{1}{2}x$$

où C est la constante d'intégration. Il fait observer que si le membre de gauche prend la valeur 0 pour $x=0$, il n'en est pas de même pour de petites valeurs de x. En effet, pour $nx\ll 1$, on a $\sin nx/x\simeq n$, et les premiers termes peuvent se renforcer pour donner une somme positive. Il détermine la constante C pour l'intervalle $0<x<2\pi$, en attribuant à x la valeur $\pi/2$. Il obtient

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots=C-\frac{1}{2}x\,.$$

Comme on sait depuis Leibniz[14] que le membre de gauche est égal à $\pi/4$, on trouve $C=\pi/2$. La formule devient alors

$$\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x+\cdots=\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2},\quad \text{pour}\quad 0<x<2\pi\,.$$

14 G.W. Leibniz Acta Eruditorum 1682. Le résultat semble obtenu en 1674. Cf. Math. Schriften, vol. 5, p. 88–92 et 118–122.

Comme le membre de gauche est une fonction périodique de période 2π, la constante C doit prendre d'autres valeurs pour d'autres intervalles. En général

$$\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x + \cdots = (2n-1)\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2},$$

$$\text{pour} \quad 2(n-1)\pi < x < 2(n+1)\pi .$$

La relation ainsi trouvée peut à son tour être intégrée. On a

$$-\cos x - \frac{1}{2^2}\cos 2x - \frac{1}{3^2}\cos 3x - \cdots = \frac{\pi}{2}x - \frac{x^2}{\pi} + C .$$

Pour déterminer la valeur de la constante C, on peut considérer les valeurs $x=\pi$, et $x=\pi/2$. On trouve les deux relations

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots = C + \frac{\pi}{4},$$

$$\frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} - \frac{1}{8^2} + \cdots = C + \frac{3}{16}\pi .$$

Comme la série qui figure dans la seconde relation vaut le quart de celle qui figure dans la première, on peut éliminer la série entre les deux relations et calculer la valeur de C. On obtient

$$\cos x + \frac{1}{2^2}\cos 2x + \frac{1}{3^2}\cos 3x + \cdots = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi x}{2} + \frac{x^2}{4}, \qquad 0 < x < 2\pi .$$

En procédant à de nouvelles intégrations, il obtient

$$\sin x + \frac{1}{2^3}\sin 2x + \frac{1}{3^3}\sin 3x + \cdots = \frac{\pi^2 x}{6} - \frac{\pi x^2}{4} + \frac{x^3}{12},$$

$$\cos x + \frac{1}{2^4}\cos 2x + \frac{1}{3^4}\cos 3x + \cdots = \frac{\pi^4}{90} - \frac{\pi^2 x^2}{12} + \frac{\pi x^3}{12} - \frac{x^4}{48} .$$

Ces calculs lui permettent de retrouver les expressions connues de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} .$$

Euler avait obtenu la somme des inverses des carrés des nombres naturels en 1736.

La série

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \cdots = \frac{\sin x}{2(1-\cos x)}$$

donne lieu à des calculs analogues. Il trouve

$$\cos x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{3}\cos 3x + \cdots = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1}{2(1-\cos x)}\right).$$

Les calculs précédents permettent de déterminer les points où ces diverses fonctions atteignent leur plus grande et leur plus petite valeur. Il suffit de déterminer les zéros de la fonction dérivée, comprises dans l'intervalle $0 < x < 2\pi$.

Fractions continuées

Adversaria analytica miscellanea de fractionibus continuis.
II.8 - St.70
Novi Commentarii Acad. Petropol. XX, 1775 (1776), p. 3–23.

Disquisitiones ulteriores de indole fractionum continuarum.
II.9 - St.71
Novi Commentarii Acad. Petropol. XX, 1775 (1776), p. 24–47.

Ces deux mémoires de Daniel Bernoulli sont consacrés aux fractions continuées. Depuis le milieu du dix-septième siècle de nombreux mathématiciens s'intéressèrent à ces fractions. John Wallis, dans son «Arithmetica infinitorum» en 1655 donne déjà la loi de formation des réduites. Sa correspondance avec Lord Brouncker (publiée en appendice des œuvres de Fermat[15]) montre que la résolution de l'équation de Pell attirait leur attention de ce côté. Christian Huygens entreprend l'approximation d'un nombre par une fraction simple au moyen de fractions continuées. Il fut conduit dans ce domaine par un problème de construction d'engrenages («Descriptio automati planetorii» 1703). En 1737, Euler devait entreprendre l'étude des fractions continuées («De fractionibus continuis»)[16]. Il donne la formation des réduites et montre qu'une fraction continuée périodique a comme valeur une racine d'une équation du second degré. Lagrange entreprend plus tard l'étude des fractions continuées dans sa «Solutions d'un problème d'arithmétique»[17]. Il poursuit ses recherches dans ses «Additions au mémoire sur la

15 P. de Fermat Oeuvres III, p.457.
16 L. Euler E71 Comment. Ac. Sc. Petrop. vol.IX (1737) et Opera Omnia, ser.I, vol.14, p.187–215.
17 J.L. Lagrange Miscellanea Tauriniensia, vol.4, 1766–69.

résolution des équations numériques»[18]. Dans ce dernier travail, il met en évidence la périodicité du développement en fraction continuée de la racine carrée d'un entier qui n'est pas carré parfait. On savait depuis longtemps que des produits infinis pouvaient s'écrire sous la forme de fractions continuées. C'est ainsi que J. Wallis cite dans son «Arithmetica infinitorum» (1655) un résultat remarquable, qu'il attribue à Lord Brouncker

$$\frac{4}{\pi}=1+\frac{1}{2+}\,\frac{9}{2+}\,\frac{25}{2+}\cdots.$$

Il dit que ce dernier avait obtenu cette formule à partir du produit infini

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots.$$

En 1748, dans son «Introductio in Analysin infinitorum»[19], Euler montre qu'une série peut se transformer en fraction continuée. Il établit, plus tard, que la célèbre formule de Lord Brouncker peut aussi s'obtenir à partir de la formule

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$$

donnée par Leibniz en 1674.

Les deux mémoires de Daniel Bernoulli, consacrés en 1775 aux fractions continuées, sont inspirés par ses travaux en 1728–1730 sur les séries récurrentes. Il y examine la loi de formation des réduites, la convergence de ces réduites dans le cas de fractions continuées périodiques, les problèmes de convergence qui se posent quand les nombres qui y figurent prennent l'un ou l'autre signe, et il finit par étudier la convergence des réduites de la célèbre expression de Lord Brouncker pour $4/\pi$.

Le premier exemple traité par Daniel Bernoulli est celui de la fraction continuée de période 1

$$\cfrac{1}{m+\cfrac{1}{m+\cfrac{1}{m+\cfrac{1}{m+\ddots}}}}$$

18 J.L. Lagrange Mém. Berlin, vol. XXIV, 1770.

19 L. Euler E 101, E 102 Lausanne 1748, Opera Omnia, ser. I, vol. 8 et 9.

En supposant que cette fraction continuée converge vers une limite S, il peut écrire

$$S=\frac{1}{m+S} \quad \text{ou} \quad S^2+mS-1=0.$$

Les racines de cette équation sont

$$\frac{1}{2}\left(-m\pm\sqrt{m^2+4}\right).$$

La racine

$$\frac{1}{2}\left(-m+\sqrt{m^2+4}\right)$$

est positive, et elle donne la valeur qu'il faut attribuer à la fraction continuée infinie quand m est positif. Il se propose ensuite d'étudier la suite des réduites. Elles sont

$$\frac{1}{m}, \quad \frac{m}{m^2+1}, \quad \frac{m^2+1}{m^3+2m}, \quad \frac{m^3+2m}{m^4+3m^2+1}, \ldots$$

Le dénominateur de chacune de ces fractions est égal au numérateur de la fraction suivante. Il suffit donc de considérer la suite des numérateurs. Soient A, B et C trois numérateurs successifs: on a $C=mB+A$. Les numérateurs forment donc une suite récurrente, dont l'équation primaire est

$$s^2=ms+1.$$

Les racines de cette équation sont

$$\frac{1}{2}\left(m\pm\sqrt{m^2+4}\right).$$

Le terme général de la suite récurrente est donc

$$\alpha\left(\frac{m+\sqrt{m^2+4}}{2}\right)^n+\beta\left(\frac{m-\sqrt{m^2+4}}{2}\right)^n.$$

Les constantes α et β qui figurent dans cette expression se calculent d'après les valeurs connues (1 et m) de la suite des numérateurs des réduites. On trouve ainsi

$$\alpha=-\beta\frac{1}{\sqrt{m^2+1}}\cdot$$

Le numérateur de rang n dans la suite des réduites est donc

$$\frac{(m+\sqrt{4+m^2})^n-(m-\sqrt{4+m^2})^n}{2^n\sqrt{4+m^2}}.$$

Le dénominateur correspondant est

$$\frac{(m+\sqrt{4+m^2})^{n+1}-(m-\sqrt{4+m^2})^{n+1}}{2^{n+1}\cdot\sqrt{4+m^2}}.$$

La réduite de rang n est le rapport de ces grandeurs

$$\frac{1}{2}\,\frac{(m+\sqrt{4+m^2})^n-(m-\sqrt{4+m^2})^n}{(m+\sqrt{4+m^2})^{n+1}-(m-\sqrt{4+m^2})^{n+1}}.$$

Pour m positif, on a $\qquad |m+\sqrt{4+m^2}|>|m-\sqrt{4+m^2}|.$
L'expression précédente tend vers

$$\frac{1}{2(m+\sqrt{4+m^2})}=\frac{-m+\sqrt{4+m^2}}{8}.$$

Pour m négatif on a $\qquad |m+\sqrt{4+m^2}|<|m-\sqrt{4+m^2}|.$
La limite de la réduite est alors

$$\frac{1}{2(m-\sqrt{4+m^2})}=-\frac{m+\sqrt{4+m^2}}{8}.$$

L'examen de fractions continuées de période 2 peut se faire suivant les mêmes principes. Il considère

$$\cfrac{1}{m+\cfrac{1}{p+\cfrac{1}{m+\cfrac{1}{p+\ddots}}}}$$

Dans l'hypothèse où cette fraction continuée converge, il pose

$$S=\cfrac{1}{m+\cfrac{1}{p+\ddots}}\qquad,\qquad \sigma=\cfrac{1}{p+\cfrac{1}{m+\ddots}}$$

D'où

$$S=\frac{1}{m+\sigma}, \qquad \sigma=\frac{1}{p+S}.$$

La valeur de S est donc racine de l'équation

$$mx^2+mpx-p=0.$$

Au cas où les nombres m et p sont positifs, on choisit la racine positive.

Daniel Bernoulli pourrait examiner la convergence des réduites comme dans le cas précédent. Ce calcul, qu'il ne fait pas explicitement, a été fait au dix-neuvième siècle[20]. Les numérateurs et les dénominateurs des réduites de rang pair forment des suites récurrentes. Il en va de même pour les numérateurs et les dénominateurs des réduites de rang impair. Ces suites récurrentes peuvent être étudiées par leur équation primaire. Si cette équation possède des racines de modules inégaux ou des racines égales, la suite des réduites converge. Si les racines sont des nombres complexes conjugués, la suite des réduites oscille. Daniel Bernoulli traite, comme exemple, la fraction continuée

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{(-1)+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{(-1)+\ldots}}}} \qquad \text{où} \quad m=1, \qquad p=-1.$$

Les réduites successives valent $1, \infty, 0, 1, \ldots$. La valeur donnée par l'équation quadratique est

$$S=\frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{-3}\right).$$

Il fait remarquer que ces réduites ne peuvent converger vers aucune limite, et qu'il ne faut pas s'étonner de trouver un résultat imaginaire.

Les auteurs (Wallis, Euler) qui avaient traité la théorie des fractions continuées avant Daniel Bernoulli connaissaient la loi de formation des réduites. Ils avaient surtout considéré des fractions continuées simples de la forme

20 Cf. O. Perron vol. II, p. 83.

$$\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{\beta+\cfrac{1}{\gamma+\ldots}}}$$

Ils avaient parfois considéré des fractions continuées dans lesquelles $1/a$, $1/\beta,\ldots$ étaient remplacées par des expressions a/a, $b/\beta,\ldots$. Daniel Bernoulli s'intéresse aux fractions continuées de cette dernière forme

$$\cfrac{a}{a+\cfrac{b}{\beta+\cfrac{c}{\gamma+\ldots}}}$$

Il fait à leur sujet plusieurs remarques intéressantes. Il nomme les couples

$$\frac{a}{a},\quad \frac{b}{\beta},\ldots$$

les indices de la fraction continuée. Si deux réduites consécutives sont M/N et P/Q, et que l'indice suivant est f/φ, il montre que la réduite suivante est

$$\frac{\varphi P+fM}{\varphi Q+fN}.$$

L'auteur remarque que les couples

$$\frac{a}{a},\quad \frac{b}{\beta},\quad \frac{c}{\gamma},\ldots$$

ne doivent pas être traités comme des fractions: si l'on multiplie le dénominateur partiel et le numérateur partiel d'un même couple par un facteur x, on modifie la valeur de l'une des réduites. Remplaçons b et β par bx et βx. Les réduites

$$\frac{a}{a},\quad \frac{a\beta}{a\beta+b},\quad \frac{a\beta\gamma+ac}{a\beta\gamma+b\gamma+ac},\ldots$$

sont remplacées par

$$\frac{a}{a}, \quad \frac{a\beta x}{(a\beta+b)x}, \quad \frac{a\beta\gamma x+ac}{(a\beta\gamma+b\gamma)x+ac}, \ldots .$$

Pour conserver la valeur des réduites, il faut également multiplier c par x. Les fractions continuées

$$\cfrac{a}{a+\cfrac{b}{\beta+\cfrac{c}{\gamma+\ddots}}} \quad \text{et} \quad \cfrac{a}{a+\cfrac{bx}{\beta x+\cfrac{cx}{\gamma+\ddots}}}$$

donnent des réduites équivalentes.

Il examine le cas où l'un des numérateurs partiels ou l'un des dénominateurs est nul. Si le numérateur partiel f de l'indice f/φ est nul, toutes les réduites suivantes sont égales à la précédente.

Le problème considéré habituellement est de calculer les réduites à partir de la fraction continuée. Daniel Bernoulli considère le problème inverse: étant donnée une suite de fractions, peut-on trouver une fraction continuée dont les fractions données sont les réduites? Il faut évidemment imposer à la suite de fractions données de ne contenir aucune paire de fractions contiguës égales. Si deux réduites successives sont égales, la fraction continuée doit comprendre un indice f/φ dont le numérateur partiel est nul. Dans ce cas, toutes les réduites suivantes sont égales. Il illustre ce problème par la suite

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{2}{3}, \quad \frac{3}{4}, \quad \frac{4}{5}, \quad \frac{5}{6}, \quad \frac{6}{7}, \ldots$$

La fraction continuée

$$\cfrac{a}{a+\cfrac{b}{\beta+\cfrac{c}{\gamma+\ddots}}}$$

a comme réduites

$$\frac{a}{a}, \quad \frac{a\beta}{a\beta+b}, \quad \frac{a\beta\gamma+ac}{a\beta\gamma+b\gamma+a\gamma}, \ldots .$$

La relation $a/a = 1/2$ donne comme solution possible $a=1, a=2$.
La seconde réduite

$$\frac{a\beta}{a\beta+b} = \frac{2}{3}$$

donne

$$\frac{\beta}{2\beta+b}=\frac{2}{3}:$$

il en déduit $b=-1, \beta=2$.
La troisième réduite donne

$$\frac{2\gamma+c}{3\gamma+2c}=\frac{3}{4}:$$

il trouve une solution $c=-1, \gamma=2$. En poursuivant le calcul, il obtient la fraction continuée

$$\cfrac{1}{2+\cfrac{(-1)}{2+\cfrac{(-1)}{2+\cfrac{(-1)}{2+\ddots}}}} \quad \text{ou} \quad \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{(-2)+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{(-2)+\ddots}}}}$$

Dans son second article, St. 71, Daniel Bernoulli considère la rapidité de la convergence de certaines suites de réduites. La célèbre fraction continuée donnée par Lord Brouncker est

$$\frac{4}{\pi}-1=\cfrac{1^2}{2+\cfrac{3^2}{2+\cfrac{5^2}{2+\cfrac{7^2}{2+\ddots}}}}$$

La suite des réduites est

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{2}{13}, \quad \frac{29}{76}, \quad \frac{156}{789}, \quad \frac{2661}{7734}, \quad \frac{24198}{110937}, \ldots$$

ou en fractions décimales

$$0{,}5000, \quad 0{,}1538, \quad 0{,}3816, \quad 0{,}1977, \quad 0{,}3441, \quad 0{,}2281, \ldots.$$

Cette suite converge très lentement vers la limite $0{,}2732\ldots$; la lenteur de la convergence étant due à la grandeur des numérateurs partiels. Daniel Bernoulli propose une méthode d'accélération de la convergence. A partir de la suite donnée, il forme une nouvelle suite dont les éléments sont les moyennes des couples d'éléments voisins dans la première suite. Il obtient ainsi

$$0{,}3269\,,\qquad 0{,}2677\,,\qquad 0{,}2986\,,\qquad 0{,}2709\,,\qquad 0{,}2811\,,\ldots\,.$$

La suite ainsi obtenue converge plus rapidement vers la limite 0,2732.... Ce procédé peut être rapproché d'une méthode proposée par Hutton en 1812 (voir Hardy, Divergent Series, p. 21). Partant d'une suite

$$s_0, s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}, s_n, \ldots,$$

il forme la suite

$$\frac{1}{2}s_0\,,\qquad \frac{1}{2}(s_0+s_1)\,,\qquad \frac{1}{2}(s_1+s_2)\,,\qquad \frac{1}{2}(s_2+s_3)\,,\ldots\,.$$

Cette suite est formée en calculant les moyennes des termes voisins de la suite

$$0, s_0, s_1, s_2, s_3, \ldots\,.$$

En répétant cette opération sur une suite formée à partir d'une série divergente, on retrouve les résultats de la sommation de Cesàro.

Une erreur de calcul a poussé Daniel Bernoulli à surestimer la puissance de sa méthode d'accélération de la convergence. Il calcule d'abord la limite des réduites de la fraction continuée de Brouncker en appliquant au calcul de la septième réduite une correction qu'il attribue à J. Wallis. Par une erreur de calcul, il obtient ainsi un résultat qui s'écarte plus de la limite que ne le fait sa méthode d'accélération de la convergence. Si l'on corrige cette erreur de transcription, le contraire apparaît.

Dans la fraction continuée de Brouncker apparaît l'expression

$$\cfrac{(n+2)^2}{2+\cfrac{(n+4)^2}{2+\ddots}}$$

qui diffère peu de

$$\cfrac{(n+2)^2}{2+\cfrac{(n+2)^2}{2+\ddots}}$$

pour de grandes valeurs de n. En appelant x cette dernière expression, on trouve

$$x=\frac{(n+2)^2}{2+x}\quad\text{ou}\quad x^2+2x-(n+2)^2=0\,.$$

La racine positive de cette équation diffère peu de $(n+1)$, ou de n, lorsque n est grand. On remplace alors

$$\cfrac{(n+2)^2}{2+\cfrac{(n+4)^2}{2+\ldots}}$$

dans la fraction continuée de Brouncker par n, ce qui revient à remplacer le dernier chiffre 2 par $(2+n)$. Il applique cette correction de Wallis au calcul de la septième réduite ($n=13$), en y remplaçant

$$\frac{(13)^2}{2} \quad \text{par} \quad \frac{(13)^2}{2+13} = \frac{169}{15}.$$

Ce calcul donne alors:

$$\frac{24198\times 15+2661\times 169}{110937\times 15+7734\times 169} = \frac{812679}{2971101}.$$

Par une erreur de transcription, Daniel Bernoulli donne

$$\frac{712679}{2971101}.$$

Le rapport de $4/\pi$ à l'approximation de Wallis donne 1,00025, tandis que Daniel Bernoulli trouve 0,974. Sa méthode d'accélération de la convergence donne pour ce rapport 1,001, qui n'est pas plus favorable que l'approximation de Wallis.

Nous remercions Mr. J. Dieudonné pour les conseils qu'il a bien voulu nous donner.

Bibliographie

Séries récurrentes
P. Montel «Leçons sur les récurrences et leurs applications» Gauthier-Villars, Paris 1957.
A.S. Householder «Principles of numerical analysis» McGraw-Hill, New York 1953.
P. Henrici «Elements of Numerical Analysis» Wiley, New York 1964.

Somme de Séries divergentes
C.H. Hardy «Divergent series» Oxford University Press, 1949.
K. Knopp «Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen» Springer, 1921.
C.N. Moore «Summable series and Convergence factors» Dover, New York 1966.

Fractions continuées
O. Perron «Die Lehre von den Kettenbrüchen» 2 Vol. Teubner, Stuttgart 1977.

Hinweise auf Daniel Bernoullis Korrespondenz betreffend Fragen der Analysis
P. Radelet-de Grave

C. GOLDBACH	D.B.	31	5	1723	D.B.	C. GOLDBACH	28	12	1729
D.B.	C. GOLDBACH	10	7	1723	C. GOLDBACH	D.B.	5	1	1730
C. GOLDBACH	D.B.	26	8	1723	D.B.	C. GOLDBACH	1–12	1	1730
D.B.	C. GOLDBACH	2	10	1723	NICOLAUS I	D.B.	4	2	1730
C. GOLDBACH	D.B.	4	11	1723	C. GOLDBACH	D.B.	20	3	1730
D.B.	C. GOLDBACH	18	12	1723	D.B.	C. GOLDBACH	6–17	4	1730
C. GOLDBACH	D.B.	2	2	1724	C. GOLDBACH	D.B.	1	5	1730
C. GOLDBACH	D.B.	2	2	1724	D.B.	C. GOLDBACH	30 4–11	5	1730
C. GOLDBACH	D.B.	19	2	1724	C. GOLDBACH	D.B.	1	6	1730
D.B.	C. GOLDBACH	18	3	1724	D.B.	C. GOLDBACH	17	7	1730
C. GOLDBACH	D.B.	17	4	1724	C. GOLDBACH	D.B.	31	7	1730
C. GOLDBACH	D.B.	23	7	1724	C. GOLDBACH	D.B.	2	10	1730
D.B.	C. GOLDBACH	12	8	1724	D.B.	C. GOLDBACH	8	10	1730
C. GOLDBACH	D.B.	13	9	1724	C. GOLDBACH	D.B.	30	10	1730
D.B.	C. GOLDBACH	12	10	1724	D.B.	C. GOLDBACH	13	11	1730
C. GOLDBACH	D.B.	18	10	1725	D.B.	NICOLAUS I		1	1731
L. EULER	D.B.		11	1726	C. GOLDBACH	D.B.	29	11	1731
D.B.	C. GOLDBACH	30	1	1728	NICOLAUS I	D.B.	5	4	1732
D.B.	C. GOLDBACH	20	2	1728	D.B.	L. EULER	22	9	1733
D.B.	C. GOLDBACH	18	3	1728	L. EULER	D.B.	16	2	1734
D.B.	C. GOLDBACH	19	4	1728	D.B.	L. EULER	4	5	1735
C. GOLDBACH	D.B.	10	5	1728	L. EULER	D.B.	après 2	6	1735
D.B.	C. GOLDBACH	28	5	1728	D.B.	L. EULER	26	10	1735
D.B.	C. GOLDBACH	29	6	1728	D.B.	L. EULER	12	9	1736
NICOLAUS I	D.B.	27	8	1728	D.B.	L. EULER			1736
D.B.	C. GOLDBACH	29	8	1728	D.B.	L. EULER	18	5	1737
D.B.	B. DE FONTENELLE	5	10	1728	D.B.	L. EULER	29	3	1738
D.B.	NICOLAUS I	5	11	1728	L. EULER	D.B.	26	4	1738
D.B.	C. GOLDBACH			1728	D.B.	L. EULER	24	5	1738
C. GOLDBACH	D.B.	18	11	1728	D.B.	L. EULER	9	8	1738
D.B.	C. GOLDBACH	18	11	1728	L. EULER	D.B.	13	9	1738
C. GOLDBACH	D.B.	31	1	1729	D.B.	L. EULER	8	11	1738
NICOLAUS I	D.B.	5	2	1729	L. EULER	D.B.	23	12	1738
C. GOLDBACH	D.B.	21	2	1729	D.B.	L. EULER	16	5	1739
D.B.	C. GOLDBACH	20–30	3	1729	L. EULER	D.B.	16	5	1739
C. GOLDBACH	D.B.	14	4	1729	D.B.	L. EULER	29	8	1739
C. GOLDBACH	D.B.		4	1729	L. EULER	D.B.	15	9	1739
D.B.	C. GOLDBACH	28	4	1729	D.B.	L. EULER	14	11	1739
C. GOLDBACH	D.B.	26	5	1729	L. EULER	D.B.	18	12	1739
D.B.	C. GOLDBACH			1729	D.B.	L. EULER	12	1	1740
D.B.	L. EULER	6	6	1729	D.B.	L. EULER	13	3	1740
C. GOLDBACH	D.B.	18	8	1729	D.B.	L. EULER		3	1740
C. GOLDBACH	D.B.	19	9	1729	L. EULER	D.B.	12	4	1740
D.B.	C. GOLDBACH	22 9–3	10	1729	D.B.	L. EULER	28 1–1	2	1741
D.B.	C. GOLDBACH	6	10	1729	L. EULER	D.B.	21	2	1741
C. GOLDBACH	D.B.	10	10	1729	D.B.	L. EULER	20	9	1741
D.B.	C. GOLDBACH	20–31	10	1729	D.B.	L. EULER	20	1	1742
D.B.	C. GOLDBACH	10	11	1729	D.B.	L. EULER	7	3	1742
C. GOLDBACH	D.B.	28	11	1729	D.B.	L. EULER	14	4	1742

D.B.	L. EULER	9 2 1743	D.B.	L. EULER	1745
D.B.	L. EULER	23 4 1743	D.B.	L. EULER	20 3 1745
D.B.	L. EULER	4 9 1743	D.B.	L. EULER	25 9 1745
D.B.	L. EULER	13 6 1744	D.B.	L. EULER	4 12 1745
D.B.	L. EULER	29 8 1744			

Observationes de seriebus quae formantur ex additione vel substractione quacunque terminorum se mutuo consequentium, ubi praesertim earundem insignis usus pro inveniendis radicum omnium aequationum algebraicarum ostenditur

Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, Bd. III, p. 85–100. 1728 (1732)
II. 1 - St. 16

1. Anni sunt fere quinque, quod Venetiis agens tumultuarias quasdam circa series observationes cum Nobili Veneto communicaveram, quas paulo post idem Nobilis, meo tamen nomine, imprimi curavit una cum aliis theorematibus geometricis sub titulo *Exercitationum Geometricarum*[1]. Mentionem ibi feceram serierum quarum quilibet terminus duorum praecedentium summae aequatur, nescius illas primo a Keplero postea a Domino Cassini fuisse adhibitas, et denique a Cel. Geometris Dominis Montmort, Moivre, Goldbach, Nicolao Bernoulli Patrueli meo aliisque omni successu exploratas et quidem sub facie multo generaliori: imo praestitisse doctissimos viros, quod fieri posse tunc nondum putabam, nimirum terminum generalem invenisse pro omnibus istius modi seriebus, quarum exemplum allatum a me fuerat contra sententiam eruditissimi Dni Goldbach, *series omnes, modo certam progressionis legem servent ad formulam aliquam seu terminum generalem reduci posse*[2], asserentis. Horum me primo certiorem fecit D. Nicolaus Bernoulli, in litteris d. 21. Nov. 1724[3]. Venetias ad me datis, dein ipse Dominus Goldbach, addens uterque formulas suas pro termino generali serierum, de quibus sermo est. His intellectis, mox ipsemet totum rei mysterium penetraveram, et ita quidem ut nihil insuper hac in re desiderari posse videretur: neque profecto amplius de seriebus istis cogitassem, nisi de novo examini meo illas commendasset praememoratus Patruelis meus in litteris novissimis 22. Aug. 1728[4]. ad me scriptis, subiungens *posse earum ope solvi problema sectionum angularium sine infinite parvis*

1 Cf. I. 4 - St. 4 du vol. 1.
2 Chr. Goldbach «De terminis generalibus serierum» Comment. Acad. Sc. Petrop. Vol. III, 1728 (1732), p. 164–173.
3 Cette lettre semble avoir disparu.
4 Cette lettre semble avoir disparu.

aut seriebus indefinitis, ita se invenisse quod existente sinu toto $=1$ *sinu arcus* $\mathrm{A}=z$, *sinus arcus multipli* $n\mathrm{A}$ *sit*

$$=[(\sqrt{1-zz}+z\sqrt{-1})^n-(\sqrt{1-zz}-z\sqrt{-1})^n]:2\sqrt{-1}\,.$$

Ruminando itaque argumentum, incidi in nova theoremata eaque non minus utilia quam elegantia. Singula ordine percurram et quantum potero breviter.

2. Lex generalissima serierum nostrarum postulat, ut denotantibus A, B, C, D, ... E, terminos quoscunque ordine retrogrado se mutuo in serie consequentes, sit semper ultimus

$$\mathrm{A}=m\mathrm{B}+n\mathrm{C}+p\mathrm{D}\,.....\,+q\mathrm{E},$$

ubi coëfficientes m, n, p, ... q, possunt significare numeros quoscunque integros aut fractos, eosque tam affirmativos quam negativos. Possunt hae series habere periodos sive ratione signorum sive ratione numerorum, in quas usque recurrunt, veluti sequens in qua quilibet terminus aequalis est differentiae duorum praecedentium

$$0.\ 1.\ 1.\ 0.\ -1.\ -1.\ 0.\ 1.\ 1.\ 0.\ -1.\ -1.\ 0.\ \text{etc.}$$

hinc procul dubio est, quod generaliter *recurrentes* nominari coeperint. Quoties autem adsunt huiusmodi periodi terminus generalis non aliter quam per quantitates imaginarias exprimi potest.

3. Proprietas haud inelegans est serierum recurrentium, quod comprehendunt omnes algebraicas simul atque geometricas. De progressionibus geometricis res satis obvia est, et magis illustrabitur in sequentibus: de algebraicis nunc dicemus (voco autem series algebraicas, quarum terminus generalis hac formula catholica comprehenditur

$$a+bx+cxx+dx^3+\&\text{c}.$$

illasque dico pertinere ad ordinem n, quando maxima dimensio ipsius x in termino generali est $=n$ et per x intelligo exponentem termini.) Theorema circa hanc rem se mihi obtulit, quod non credideram, ulli antea fuisse observatum, quod vero postmodum iam a Moivreo in tractatu suo *de mensura sortis*[5] detectum fuisse intellexi: Ecce illud.

5 A. de Moivre «De mensura sortis, seu, de Probabilitate Eventuum in Ludis a Casu Fortuito Pendentibus» Phil. Trans. 329, 1711, p.213. ainsi que «The Doctrine of Chances: or, a Method of Calculating the Probability of Events in Play». London 1718.

4. *Theorema generale pro omnibus seriebus algebraicis.*

In omni serie algebraica ordinis cuiuscunque $n-1$. si excerpantur ordine retrogrado termini contigui, numero $n+1$, designati litteris A, B, C, D, E, &c. dico fore semper

$$A = nB - \frac{n(n-1)}{2}C + \frac{n.(n-1)(n-2)}{2.3}D - \frac{n.(n-1).(n-2)(n-3)}{2.3.4}E + \&c.$$

Coroll. 1. Omnes series secundi ordinis habent terminum quemcunque aequalem triplo praecedentis seu ultimi minus triplo penultimi plus antepenultimo.

Exempli loco sint numeri trigonales

$$1.\,3.\,6.\,10.\,15.\,21.\,\&c.$$

erit

$$21. = 3.\,15. - 3.\,10 + 6 \quad \text{aut} \quad 15 = 3.\,10. - 3.\,6 + 3.$$

Coroll. 2. In omnibus seriebus tertii ordinis est terminus quivis = quadruplo ultimi minus sextuplo penultimi plus quadruplo antepenultimi minus penantepenultimo.

Exempli gratia sint cubi numerorum naturalium

$$1.\,8.\,27.\,64.\,125.\,216.\,343.\,\&c.$$

erit

$$216 = 4.\,125 - 6.\,64 + 4.\,27 - 8.$$

5. Apparet ex praecedente theoremate, quanam lege series recurrentes construi debeant, ita ut fiant algebraicae. Si vero alia, quam quae modo definita fuit, lex fingatur, semper series orientur *transcendentes,* seu potius *exponentiales,* quarum terminus generalis ut inveniatur, sequens propositio inserviet.

Lemma. Quaecunque sint coefficientes $m, n, p, \ldots\ldots q$, poterit semper exhiberi series numerorum continue proportionalium talis, ut denotantibus iterum litteris A, B, C, D,..... E terminos contiguos ordine retrogrado e serie excerptos, quorum numerus indicatur per N, sit

$$A = mB + nC + pD \ldots\ldots + qE.$$

Demonstratio. Si enim terminus generalis in progressione geometrica quaesita sit a^x, hicque ponatur = A,

erit $B = a^{x-1}$, $C = a^{x-2}$, $D = a^{x-3} \ldots$ $E = a^{x-N+1}$,

hinc aequatione facta ad legem propositionis eademque divisa per a^{x-N+1}, habebitur

$$a^{N-1} = m.\, a^{N-2} + n.\, a^{N-3} + p.\, a^{N-4} \,\ldots\ldots + q,$$

ope cuius aequationis quam *primariam* voco eruetur valor ipsius a, et cum aequatio habeat $N-1$ radices totidem progressiones geometricae desiderato satisfacientes invenientur, quarum quaelibet per numerum constantem multiplicari potest.

6. Sint iam radices praecedentis aequationis P, Q, R ..... S, haud difficulter apparet, omnes series possibiles conditioni praecedentis lemmatis satisfacientes comprehendi sub hoc termino generali

$$\beta.\, P^x + \gamma.\, Q^x + \delta.\, R^x \,\ldots\ldots + \varepsilon S^x,$$

et cum eaedem series tot habeant ab initio terminos arbitrarios, quot sunt unitates in $N-1$. id est, quot sunt radices P, Q, R, ... S, inservient coefficientes β, γ, δ ..... ε ad terminos arbitrarios definiendos, hinc igitur patet modus universalis inveniendi terminum generalem omnium serierum nostrarum §. 2. definitarum.

7. E re potius erit regulam expositam exemplo quodam illustrari, quam ulterioribus verbis explicare. Sit inveniendus terminus generalis huius seriei.

1. 1. 2. 3. 5. 8. 13. 21. 34. 55. &c.

in qua quilibet terminus duorum praecedentium summa est, quaeque incipit a duobus terminis arbitrariis 1.1. Erit aequatio *primaria* §. 5.

$$aa = a + 1.$$

cuius radices sunt

$$a = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad a = \frac{1-\sqrt{5}}{2},$$

indicandae litteris P et Q. unde terminus generalis pro omnibus seriebus, quarum termini ubique duorum praecedentium summae aequales sunt, fit

$$\beta\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^x + \gamma\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^x,$$

qui inserviet pro exemplo particulari modo allato, si posito successive $x=0$,
$x=1$,

quantitates resultantes ponantur aequales nihilo et unitati (qui sunt termini quorum exponentes sunt 0 et 1.); ergo

$$\beta+\gamma=0, \quad \text{et} \quad \beta\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)+\gamma\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)=1;$$

seu

$$\beta=\frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{et} \quad \gamma=-\frac{1}{\sqrt{5}},$$

ita ut tandem terminus generalis allatae seriei sit

$$\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^x-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^x\right]:\sqrt{5}.$$

8. Hinc manifestum est, haud futurum fuisse ut terminus generalis exhiberi posset, nisi tot essent aequationis *primariae* radices, quot termini concurrunt ad formandum sequentem. Quid ergo si in eadem aequatione duae pluresve radices eaedem sint? huic autem incommodo remedium afferetur, si radix in termino generali multiplicata intelligatur per

$$b+cx+dxx\ldots\ldots+ex^{m-1},$$

ubi m indicat, quoties radix comprehenditur in aequatione hocque de singulis radicibus observandum est. Sit v. gr. terminus generalis indagandus huius seriei

0. 0. 0. 0. 1. 0. 15.-10. 165.-228. &c.

incipientis a quinque terminis arbitrariis, et cuius lex requirit, ut sit ubique

$$\mathrm{A}=0\mathrm{B}+15\mathrm{C}-10\mathrm{D}-60\mathrm{E}+72\mathrm{F}.$$

hic aequatio *primaria* lemmatis dat

$$a^5-15a^3+10aa+60a-72=0,$$

cuius quinque radices sunt

$$a=2, \qquad a=2, \qquad a=2, \qquad a=-3 \quad \text{et} \quad a=-3.$$

Dico itaque terminum generalem propositae seriei fore

$$(b+cx+dxx)\cdot\ 2^x+(e+fx)\cdot\ (-3)^x$$

et posse ex comparationibus quinquies institutis termini generalis cum terminis seriei correspondentibus haberi valores litterarum *b*, *c*, *d*, *e*, et *f*, sicque denique fore terminum generalem

$$\frac{(1026-1035x+225xx).2^x+(224-80x).(-3)^x}{90000}$$

9. Intelligitur ex praecedente §. origo theorematis nostri §. 4. expositi; si enim radices singulae aequationis *primariae* sint aequales unitati, id est, si aequatio *primaria* sit

$$a^n=na^{n-1}-\frac{n.n-1}{2}a^{n-2}+\frac{n.n-1}{2.}\frac{n-2}{3}a^{n-3}-\quad \text{etc.}$$

habebit terminus generalis hanc formam

$$b+cx+dxx\ .....\ +ex^n,$$

qui omnes algebraicas continet series.

10. Verbum addam de methodo summandi omnes series, quarum hactenus mentio facta fuit. Equidem si in termino generali singula membra specialiter spectentur, nullum erit, quod non sub hac formula comprehendatur $bx^m a^x$. dico autem, summam seriei, cuius terminus generalis est $bx^m a^x$,
esse

$$=(cx^m+dx^{m-1}+ex^{m-2}\ .....\ +f)a^x-f;$$

valores litterarum *c*, *d*, *e* .....*f*. obtinentur ex comparationibus diversis summae generalis cum summis particularibus: regulas generales pro hoc negotio si quis cupiat, sibi ipsi facile formabit. Sit verbi gr. terminus generalis seriei summandae xa^x, erit summa seriei

$$\left(\frac{ax}{a-1}=\frac{a}{(a-1)^2}\right)\cdot\ a^x+\frac{a}{(a-1)^2},$$

ubi notari potest formulas hasce exponentiales fieri semper algebraicas quoties $a=1$. nempe

$$\frac{xx+x}{2}$$

pro casu allato, modo calculus recte instituatur. Caeterum si seriei summandae terminus generalis ex pluribus membris constet, cum singulis erit faciendum quod de uno monstravimus; praefero autem hanc summandi methodum aliis ob universalitatem eius.

11. Hactenus dicta pleraque iam ante hos quatuor annos mihi innotuerunt, et antea quoque plurimas proprietates detexeram, quibus series nostrae plane abundant, quasque hic exponerem, nisi in generalibus subsistere constituissem. Sed unum non praetergrediar, quod nunc demum mihi fuit observatum, posse ope serierum nostrarum radices omnium aequationum algebraicarum, cuiuscunque sint dimensionis, expedita, tuta et facili appropinquatione haberi sine ulla praevia tentatione quas reliquae methodi postulare solent. Est mihi methodus duplex, altera pro minima, altera pro maxima aequationis radice invenienda, attentione non facta ad signa radicibus praefixa, ita ut sic radix tam quae maxime quam quae minime a nihilo distat, determinari possit.

12. *Methodus nova inveniendi radices omnes cuiuscunque aequationis affectae tam numericae quam algebraicae.*
Concilietur aequationi propositae haec forma

$$1=ax+bxx+cx^3+ex^4+\&c.$$

Dein formetur series incipiendo a tot terminis arbitrariis, quot dimensiones aequatio habet, ea lege, ut si A, B, C, D, E &c. denotent terminos se invicem directo ordine consequentes, sit ubique

$$\mathrm{E}=a\mathrm{D}+b\mathrm{C}+c\mathrm{B}+e\mathrm{A}+\&c.$$

sintque in hac serie satis continuata duo termini proximi M et N, erit terminus antecedens M divisus per consequentem N proxime aequalis radici quaesitae.

13. Exemplum capiemus ab hac aequatione

$$1=-2x+5xx-4x^3+x^4.$$

fiat series incipiendo a quatuor numeris arbitrariis (quia scilicet aequatio proposita totidem habet dimensiones) 1.1.1.1. talis ut semper terminus novus formetur ex duplo ultimi negative sumti plus quintuplo penultimi, minus quadruplo antepenultimi plus penantepenultimo. Series haec est.

$$1.\ 1.\ 1.\ 1.\ 0.\ 2.\ -7.\ 25.\ -93.\ 341.\ -1254.$$

hinc erit radix quaesita proxime $= -341/1254$.

14. Sit porro

$$1 = x + 2xx + 3x^3 + 4x^4 + 5x^5$$

Construatur sequens series incipiendo nunc a quinque terminis arbitrariis

$$1.1.1.1.1.\ 15.\ 29.\ 71.\ 183.\ 477.\ 1239.\ 3171.\ \&c.$$

erit

$$\frac{1239}{3171} \text{ aut } \frac{59}{151}$$

proxime radix minima aequationis propositae. Et sic de omnibus reliquis.

15. Duo sunt casus qui difficultatem aliquam pariunt; primus, quando radix minima aequationis potest tam affirmative quam negative accipi; secundus, quando radix minima est imaginaria, veluti si aequatio has haberet radices $\sqrt{-4}$, $-\sqrt{-4}$ et 5, quarum ultima realis maior i.e. magis a nihilo distans censenda est quam quaevis duarum reliquarum. Dicam quid hic agendum sit. In primo casu respiciendi tantum sunt termini alterni, qui si ad constantem rationem vergunt, dum termini contigui magis vagantur, aequalitatem arguunt inter affirmativam radicem et negativam; atque hoc in casu terminus ex serie dividendus est per illum qui secundo loco sequitur et erit radix quadrata quotientis radix quaesita aequationis: veluti si habeatur

$$1 = -y + 4yy + 4y^3.$$

formeturque series per regulam §. 12. expositam

$$1.\ 1.\ 0.\ 8.\ -4.\ 36.\ -20.\ 148.\ -84.\ 596. -340.\ 2388.\ \&c.$$

erit decimus terminus 596 divisus per duodecimum 2388, id est, $149/597$ proxime $=$ quadrato radicis quaesita $\pm\sqrt{149/597}$. patet ex hoc exemplo series nostras sat cito ad optatum scopum perducere, siquidem inventus numerus $596/2388$ a vero tantum deficit hac minima quantitate $1/2388$; vera enim radix est $\pm 1/2$. Potest eidem incommodo medela afferri ponendo

$$x = y \pm a$$

et quaerendo ex methodo ordinaria valorem ipsius y.

16. In altero casu dispiciendum est, num radix futura sit affirmativa, num negativa; sin prius, ponendum est in aequatione proposita $x=y+a$, sin posterius $x=y-a$, et dein semper per regulam nostram valor ipsius y inveniri poterit, modo a maior assumta fuerit, quam est valor quaesitus ipsius x: nunquam fallemur ergo assumendo numerum maximum pro a; verum hic observandum est, seriem eo citius et facilius conducere ad radicem quaesitam, quo minor fuerit quantitas $a-x$; neque adeo sine omni circumspectione in hoc casu res tentanda est; totam rem duplici exemplo illustrabo. Sit

$$1=\frac{x+xx-x^3}{2}$$

Hic si velim sine ullo examine seriem formare, qualis v. gr. est.

$$1.\ 1.\ 1.\ \frac{1}{2}.\ \frac{1}{4}.\ -\frac{1}{8}.\ -\frac{3}{16}.\ -\frac{9}{32}.\ -\frac{11}{64}.\ -\frac{17}{128}.\ -\frac{3}{256}.\ \frac{7}{512}.$$

haec vel in infinitum continuata nullam dat radicem simplicem, utpote cuius termini minime vergunt ad rationem constantem, at si ponam

$$x=y-2$$

(video enim radicem esse negativam neque posse magnam esse) habebitur talis aequatio.

$$1=\frac{15y-7yy+y^3}{8}$$

vel si fractiones evitare velimus, potest poni

$$y=8z,$$

id est,

$$x=8z-2;$$

et sic erit

$$1=15z-56zz+64z^3.$$

ad cuius posterioris aequationis normam talis construatur series

$$1.\ 1.\ 1.\ 23.\ 353.\ 4071.\ 42769.\ 436151.$$

hinc ergo erit

$$z=\frac{42769}{436151} \quad \text{et} \quad x=\frac{530150}{436151}.$$

Accipiatur porro haec aequatio loco alterius exempli

$$1 = -\frac{x - xx + x^3}{2}$$

Ex qua fieri potest talis series.

$$1.\ 1.\ 1.\ -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{5}{8}\cdot -\frac{11}{16}\cdot\frac{5}{32}\cdot\frac{37}{64}\cdot\frac{-91}{128}\cdot \ \&c.$$

Quae iterum nullam aequationis radicem indicare potest; verum si ponatur

$$x = y + 3$$

(apparet enim valorem ipsius x iam affirmativam esse) oritur haec altera aequatio

$$1 = \frac{-20y - 8yy - y^3}{13},$$

vel potius posito $\quad y = 13z,$

id est, $\quad x = 13z + 3.$

$$1 = -20z - 104zz - 169z^3$$

quae posterior aequatio dat sequentem seriem.

$$0.\ 0.\ 1.\ -20.\ 296.\ -4009.\ 52776.\ -\ 688608.$$

unde

$$z = -\frac{52776}{688608} \quad \text{et} \quad x = \frac{1379736}{688608} = 2{,}0036$$

proxime, revera autem est $x = 2$.

17. Circa incommodum §. 15. indicatum, *posse nimirum duas radices esse aequales,* id praeterea notandum est, posse similem regulam adhiberi pro casu, quo plures quam duae radices sunt inter se aequales, modo omnes sint reales. Superest ut dicam quid faciendum sit, cum radicum aequalium aliae sint imaginariae aliae reales: veluti cum fuerit

$$x^4 - 1 = 0;$$

est $$x=1, \quad x=-1, \quad x=\sqrt{-1} \quad \text{et} \quad x=-\sqrt{-1},$$

quae omnes radices per definitionem nostram censendae sunt aequales seu a nihilo aequidistantes. Huic rursus incommodo subveniemus ponendo $x=y\pm a$, quod adeoque remedium universale est: hanc vero substitutionem si non faciamus, et contineat aequatio proposita hanc alteram aequationem

$$x^m-a=0,$$

observabimus in serie, convergere terminos illos ad rationem constantem $a/1$ quos inter termini numero $m-1$ existunt.

18. Inservit annotatio praecedentis §. ad extractiones radicum ex potentiis. Sit verbi gratia extrahenda radix cubica ex binario: erit aequatio

$$x^3=2, \quad \text{vel} \quad 1=**\frac{1}{2}x^3$$

atque series ad normam aequationis constructa

$$1.\,1.\,1.\,\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{8};$$

quae ipsa nihil aliud indicat quam esse

$$x^3=2.$$

verum posito

$$x=y+1,$$

ita ut aequatio proposita mutetur in hanc

$$1=3y+3yy+y^3$$

iam tuto series formari poterit, qualis est sequens

$$1.\,1.\,1.\,7.\,25.\,97.\,373.\,1435.\,5521.$$

ergo

$$y=\frac{1435}{5521} \quad \text{et} \quad x=\frac{6956}{5521}=1{,}2597,$$

qualis proxime est, adeo ut nullo negotio sic inveniatur, quod alias multum temporis et laboris requirit.

Si velim radicem biquadratam extrahere ex 20, facio

$$x^4=20,$$

et posito

$$x=y+2,$$

erit

$$1=8y+6yy+2y^3+\frac{1}{4}y^4.$$

ergo obtinet haec series

$$0.\ 0.\ 0.\ 1.\ 8.\ 70.\ 610.\ 5316\frac{1}{4}\cdot 46332\ \&c.$$

unde

$$y=\frac{21265}{195328} \quad \text{et} \quad x=2\frac{21265}{185328};$$

quae radix certe longe exactissima est, ita ut dubitem, posse ulla alia methodo illam tam brevi compendio eademque accuratione obtineri. Sit porro radix quadrata extrahenda ex 26; erit

$$xx=26;$$

ponatur

$$x=y+5;$$

erit recte disposita aequatione

$$1=10y+yy:$$

hinc habetur series

$$0.\ 1.\ 10.\ 101.\ 1020.\ 10301.\ 104030.$$

ergo

$$y=\frac{10301}{104030} \quad \text{et} \quad x \text{ seu } \sqrt{26}=5\frac{10301}{104030}=5{,}09901951360,$$

et per regulam ordinariam invenitur

$$5.09901951359,$$

qui duo numeri sola unitate differunt.

19. Superessent quaedam adhuc, circa iam dicta monenda, plurima vero nova dicenda; malo autem haec lectoris attentioni relinquere; id solum superaddam,

posse methodo nostra etiam radices compositas inveniri; veluti cum aequatio proposita hanc habet radicem compositam

$$x^m + a x^{m-1} + b x^{m-2} \ldots\ldots + c = 0,$$

possum proxime ope serierum determinare litteras $a, b \ldots\ldots c$ modo non sint imaginariae, quod saepe usui venire potest, nec tamen ab ullo edoctum. Patet etiam regulam nostram non subsistere modo in exemplis numericis, sed se extendere omnino ad aequationes algebraicas, veluti si fuerit aequatio cubica generalis

$$1 = ax + bxx + cx^3$$

formeturque series

$$0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 1 \cdot a \cdot aa+b \cdot a^3+2ab+c \cdot a^4+3aab+2ac+bb \cdot$$
$$a^5+4a^3b+3aac+3abb+2bc \cdot \text{\&c.}$$

erit proxime

$$x = \frac{a^4+3aab+2ac+bb}{a^5+4a^2b+3aac+3abb+2bc},$$

possuntque similes formulae omnes purae algebraicae et rationales pro cunctis aequationibus algebraicis exhiberi. Denique me vel non monente liquet, posse successive omnes radices reales inveniri, quia aequatio per inventam primam radicem dividi, posteaque secunda radix inveniri potest; debet autem residuum divisionis, quod semper minimum erit, negligi, aut quod satius est, inventa una radice, ponatur $x = y + a$: hac enim positione recte instituta quaevis radix in minimam aut maximam pro lubitu mutari potest; de his forsan alio tempore: nunc paucis indicabo methodum alteram, de qua §. 11. dixi, illam inservire omnium aequationum radici maximae inveniendae.

20. Proposita rursus sit aequatio catholica, sed in sequentem modum disposita.

$$x^m = a x^{m-1} + b x^{m-2} + c x^{m-3} \ldots\ldots + d.$$

formeturque series incipiendo a tot terminis arbitrariis quot dimensionum aequatio est talis, ut si A, B, C, D, E etc. denotent terminos directo ordine e serie excerptos et contiguos, sit ubique

$$\mathrm{E} = a\mathrm{D} + b\mathrm{C} + c\mathrm{B} + d\mathrm{A} \text{ etc.}$$

sintque in hac serie satis continuata duo termini proximi M et N, erit terminus consequens N divisus per antecedentem M proxime aequalis radici quaesitae.

21. Exempli loco eandem sumemus aequationem quae §. 13. est et cuius radix minima erat $-341/1254$, sed ita dispositam

$$x^4 = 4x^3 - 5xx + 2x - 1.$$

Quod si iam fiat talis series:

$$1.\ 1.\ 1.\ 1.\ 0.\ -4.\ -15.\ -41.\ -97.\ -209.$$

erit $209/97$ proxime aequalis radici maximae aequationis propositae. Circa hanc alteram methodum mutatis mutandis usu venient omnia ea, quae §§. 15. 16. 17. et 18. memorata sunt, nimirum posse omnibus incommodis obviam iri huiusmodi positionibus

$$x = y \pm a.$$

Utraque saepissime methodus sine ulla praeparatione locum habet, aliquando unica, et aliquando neutra: quod posterius tamen raro contingit; sed ambae semper post positionem debite factam

$$x = y \pm a,$$

modo radices reales adsint succedunt; aliquando etiam una, interdum altera compendiosius adhibetur.

22. Superest ut ostendam, quomodo fractionum incommodo remedium afferri possit in utraque methodo: proposita fuerit aequatio generalis intelligendo per a, b, c, d etc. numeros integros ad quam aequationem omnes reduci possunt, nempe haec

$$a = bx + cxx + dx^3 +$$

Obviam ibitur fractionibus ponendo $x = ay$. Verum si in secunda methodo occurrat aequatio

$$ax^m = bx^{m-1} + cx^{m-2} \ldots\ldots + d$$

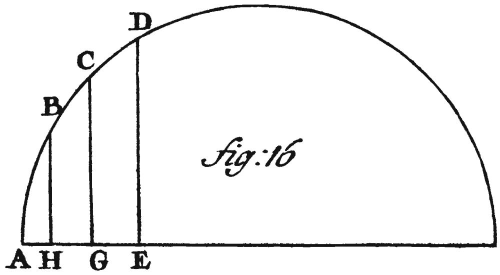
ponendum erit

$$x = \frac{y}{a}.$$

saepe tamen non male omittitur haec substitutio.

23. Finiam praesentem dissertationem demonstratione theorematis Dni Bernoulli, ne qua in re desim humanissimae invitationi Celeberrimi Viri, cuius amicitiam et consanguinitatem semper colam.

Lemma. Si A B, A C, et A D (Fig. 16.) sint arcus circulares arithmetice proportionales dicaturque
radius $= 1$,
cosinus differentiae communis B C vel C D $= c$,
erit sinus E D arcus maximi $=$ sinui G C ducto in $2c -$ H B. Demonstrationem per se satis obviam non addo.



24. *Theorema.*
Existente sinu toto $= 1$,
sinu arcus A B $= z$,

erit sinus arcus nA B $= [(\sqrt{1-zz} + z\sqrt{-1})^n - (\sqrt{1-zz} - z\sqrt{-1})^n] : 2\sqrt{-1}$.

Demonstratio.
Quoniam sinus arcus A B = B C = C D etc. $= z$,
eiusque cosinus $= c$;
erit G C (per praeced. lemma) $= 2cz$,
E D $= 4c^2z - z$,
et sic porro. Formetur adeoque series incipiendo a duobus terminis z et $2cz$ talis, ut quilibet terminus sit aequalis praecedenti multiplicato per $2c$ minus termino qui hunc praecedebat, et manifestum est fore, ut terminus cuius exponens est n exprimat sinum arcus nA. est autem series talis

$$z \cdot 2cz \cdot 4ccz - z \cdot 8c^3z - 4cz \cdot 16c^4z - 8c^3z - 4ccz + z \cdot \&c.$$

cuius terminus generalis est

$$[(c + z\sqrt{-1})^n - (c - z\sqrt{-1})^n] : 2\sqrt{-1} = (\text{ponendo } \sqrt{1-z^z}, \text{ loco } c)$$
$$[(\sqrt{1-zz} + z\sqrt{-1})^n - (\sqrt{1-zz} - z\sqrt{-1})^n] : 2\sqrt{-1}.$$

Q.E.D.

Scholium. Si duo primi arcus A B et B C sint inaequales poterit ope lemmatis nostri ex datis sinubus horum arcuum inveniri sinus arcus $AB+nBC$ vel sinus arcus $AB-nBC$; neque ad hoc requiritur, ut innotescat prius sinus arcus nBC methodoque ordinaria quaeratur sinus arc. $AB+nBC$ vel $AB-nBC$; ita enim ad expressionem valde compositam perveniremus.

Notationes de aequationibus, quae progrediuntur in infinitum, earumque resolutione per methodum serierum recurrentium: ut et de nova serierum specie. Praelectio Prima

Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, Bd. V, p. 63–69. 1730–31 (1738)
II.2a - St.20a

§. 1. Frequentes admodum sunt aequationes, quae sine fine progrediuntur; solent autem hac forma esse praeditae

$$y = x + a x^2 + b x^3 + c x^4 + e x^5 + \text{etc.}$$

aut evanescentibus terminorum alternorum coefficientibus

$$y = x + f x^3 + g x^5 + h x^7 + l x^9 + \text{etc.}$$

ubi coefficientes certa lege instar serierum numericarum se subsequuntur.

§. 2. Tales aequationes exhiberi potissimum solent pro quadraturis aut rectificationibus, ita ut dum x rectam aliquam lineam variabilem indicat, exprimatur per y spatium aliquod curvilineum, aut arcus lineae curvae, quae isti lineae rectae respondeant; quoniam autem saepenumero solutio desideratur problematis inversi, quod postulat, ut ex arcu curvae definiatur recta iis respondens, ideo excogitata fuit methodus invertendi aequationes ad hanc formam

$$x = y + \alpha y y + \beta y^3 + \gamma y^4 + \delta y^5 + \text{etc.}$$

ita enim invenitur

$$\begin{aligned}
a x x &= a y y + 2 \alpha a y^3 + 2 \beta a y^4 + 2 \gamma a y^5 + \text{etc.} \\
&\qquad\qquad\qquad\quad + \alpha \alpha a y^4 + 2 \alpha \beta a y^5 + \text{etc.} \\
b x^3 &= b y^3 + 3 \alpha b y^4 + 3 \beta b y^5 + \text{etc.} \\
&\qquad\qquad\qquad\quad + 3 \alpha \alpha b y^5 + \text{etc.} \\
c x^4 &= c y^4 + 4 \alpha c y^5 + \text{etc.} \\
e x^5 &= e y^5 + \text{etc.}
\end{aligned}$$

unde si fuerit

$$\text{(A)} \qquad y = x + a\,x\,x + b\,x^3 + c\,x^4 + e\,x^5 + \text{etc.}$$

erit substitutis singulorum terminorum valoribus

$$\begin{array}{llllll}
y = y + \alpha\,y\,y + \beta & y^3 + \gamma & y^4 + \delta & y^5 + \text{etc.} \\
\quad\; + a \quad + 2\,\alpha\,a & + 2\,\beta\,a & + 2\,\gamma\,a & \\
\qquad\qquad\; + b & + 2\,\alpha\,\alpha\,a & + 2\,\alpha\,\beta\,a & \\
 & + 3\,\alpha\,b & + 3\,\beta\,b & \\
 & + c & + 3\,\alpha\,\alpha\,b & \\
 & & + 4\,\alpha\,c & \\
 & & + e &
\end{array}$$

cuius aequationis identitas obtinetur, faciendo

$$\begin{aligned}
&\alpha = -a\,, \\
&\beta = 2\,a^2 - b\,, \\
&\gamma = -5\,a^3 + 5\,a\,b - c\,, \\
&\delta = 14\,a^4 - 21\,a\,a\,b + 6\,a\,c + 3\,b\,b - e \text{ etc.}
\end{aligned}$$

Igitur aequatio (A) aequipollet huic conversae

$$\text{(B)} \qquad \begin{aligned} x = y - a\,y\,y + (2\,a^2 - b)\,y^3 - (5\,a^3 - 5\,a\,b + c)\,y^4 \\ + (14\,a^4 - 21\,a\,a\,b + 6\,a\,c + 3\,b\,b - e)\,y^5 - \text{etc.} \end{aligned}$$

§. 3. Quamvis autem, quum in generalibus subsistimus non facile perspiciamus legem, qua coefficientes assumti $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ etc. progrediuntur, nisi post multorum terminorum considerationem, tamen in casibus particularibus ea saepe sit valde obvia. Sic v. gr. cum assumitur aequatio

$$y = x + \frac{1}{2}\,x\,x + \frac{1}{3}\,x^3 + \frac{1}{4}\,x^4 + \frac{1}{5}\,x^5 + \text{etc.}$$

haec convertitur ope aequationis (B) in hanc

$$x = y - \frac{1}{2}\,y\,y + \frac{1}{6}\,y^3 - \frac{1}{24}\,y^4 + \frac{1}{120}\,y^5 - \text{etc.}$$

cuius progressionis lex inspicienti cuivis apparet. Prior docet ad dati numeri $^1\!/_{1-x}$ logarithmum (y) accedere, altera ad dati logarithmi (y) numerum $^1\!/_{1-x}$.

§. 4. Exemplum huius rei cum mihi aliquando occurreret, volui periculum facere, an aliquod hac in parte auxilium praestare posset methodus illa singularis, quam in Comment. Tom. 3.[1] exhibui pro inveniendis radicibus aequationum algebraicarum cuiuscunque ordinis, idque sola terminorum additione vel substractione continua, quod cum tentarem, vidi istam methodum minime nos deficere appropinquare volentes ad radicem aequationis sine fine progredientis, dum modo certa ratione utamur: in eo autem cardo rei vertitur, ut series, quae ad leges loco citato exhibitas formanda est pro norma aequationis propositae, quaeque incipit a tot terminis arbitrariis, quot dimensiones habet eadem aequatio, hic incipere fingatur ab infinitis nullionibus, quos omnes excipiat unitas.

§. 5. Sit nempe rursus aequatio (A) et in hac valor ipsius x proxime inveniendus, quod per aequationis conversionem contenditur. Dico desiderato satisfactum iri, si aequationi (A) talis detur forma,

$$1 = \frac{1}{y}x + \frac{a}{y}xx + \frac{b}{y}x^3 + \frac{c}{y}x^4 + \frac{e}{y}x^5 + \text{etc.}$$

dein ponatur unitas infinitis nullionibus subsequens hunc in modum

$$- - - - 0.\ 0.\ 0.\ 0.\ 1.$$

formeturque postea series ita, ut quilibet terminus sit aequalis aggregato ex suo praecedente multiplicato per $1/y$, eoque qui hunc praecedit multiplicato per a/y, et qui hunc praecedit multiplicato per b/y atque sic porro: series haec est

$$- - - - 0.\ 0.\ 0.\ 1.\ \frac{1}{y},\quad \left(\frac{1}{yy} + \frac{a}{y}\right),$$

$$\left(\frac{1}{y^3} + \frac{2a}{yy} + \frac{b}{y}\right),\quad \left(\frac{1}{y^4} + \frac{3a}{y^3} + \frac{aa}{yy} + \frac{2b}{yy} + \frac{c}{y}\right),$$

$$\left(\frac{1}{y^5} + \frac{4a}{y^4} + \frac{3aa}{y^3} + \frac{3b}{y^3} + \frac{2e}{yy} + \frac{2ab}{yy} + \frac{e}{y}\right) \quad \text{etc.}$$

Quibus sic factis, erit penultimus terminus divisus per ultimum prope aequalis valori quaesito x, et eo quidem propius, quo plures fuerint termini. Erit itaque proxime

$$x = \left(\frac{1}{y^4} + \frac{3a}{y^3} + \frac{aa}{yy} + \frac{2b}{yy} + \frac{c}{y}\right) : \left(\frac{1}{y^5} + \frac{4a}{y^4} + \frac{3aa}{y^3} + \frac{3b}{y^3} + \frac{2c}{yy} + \frac{2ab}{yy} + \frac{e}{y}\right)$$

1 Cf. II. 1 - St. 16 p. 49 h.v.

vel (C) $$x=\frac{y+3ayy+(aa+2b)y^3+cy^4}{1+4ay+(3aa+3b)yy+(2c+2ab)y^3+ey^4},$$

et ubi maiori accuratione opus est facili negotio, et certe multo faciliori saepissime, quam si altera utimur methodo, propius ad verum valorem accedemus. Lubet autem ad exempla nonnulla descendere, ut comparatio inter utramque methodum institui possit.

§. 6. Sit aequatio

(D) $$1=\frac{r}{2.3}-\frac{rr}{2.3.4.5}+\frac{r^3}{2.3.4.5.6.7}$$
$$-\frac{r^4}{2.3.4.5.6.7.8.9}+\frac{r^5}{2.3.4.5.6.7.8.9.10.11}-\text{etc.},$$

in quam aliquando directe nulla facta conversione incidi, et quae ita est comparata, ut si diameter circuli denotetur per unitatem, incognita r exprimat quadratum circumferentiae. Invenitur per methodum paragraphi tertii

$$\left(\text{posito prius}\quad \frac{r}{2.3}=q\right),$$

ut aequatio (C) obtineat formam aequationis (A)

$$q=\frac{1048067}{673750},\quad \text{ergo}\quad r=\frac{6288402}{673750}$$

ex quo sequeretur circumferentia circuli $=3.0550$. Quod si autem methodo nostra calculum ponamus minore labore prodit numerus multo verior, nempe

$$q=\frac{4191}{2555},\quad \text{et}\quad r=\frac{25146}{2555},$$

atque circumferentia circuli $=3.1376$.

Notabo hic in transitu, incognitam r in aequatione (D) non solum quadratum circumferentiae circuli, sed et eiusdem duplum, triplum ac quodvis multiplum exprimere, ita ut illa aequatio infinitas habeat radices reales, quarum regula nostra minimam indicat. *Conf. Diss. de seriebus recurr*[2].

2 Cf. II.1 - St.16 p.56 h.v.

§. 7. Huic exemplo aliud adiungemus inversum,
sit scilicet radius circuli $=1$,
chorda arcus cuiuscunque $=x$,
arcus ipse $=z$;
notum est convenire hanc aequationem aptissimam (D)

$$z=x+\frac{1}{3.2^3}x^3+\frac{3}{5.2.2^6}x^5+\frac{3.5}{7.2.3.2^9}x^7+\frac{3.5.7}{9.2.3.4.2^{12}}x^9+\text{etc.}$$

Huius aequationis tres tantum terminos priores considerabimus in utraque methodo, ita ut tum in formula communi (B) tum in nostra (C) sit ponendum $a=0$, $b=1/24$, $c=0$, et $e=3/640$;
igitur ex illa fit

$$x=z-\frac{1}{24}z^3+\frac{1}{1920}z^5,$$

ex hac vero

$$x=\frac{1920z+160z^3}{1920+240zz+9z^4}=(\text{proxime})\,z-\frac{1}{24}z^3+\frac{1}{1920}z^5+\frac{1}{7680}z^7,$$

sic ut neutra notabiliter differat ab altera.

§. 8. Data igitur circumferentia circuli non inepte adhibebuntur hae formulae pro investigandis sinibus ad datos arcus non admodum magnos; habent etiam formulae huiusmodi usum in problematis geometricis ad circulum pertinentibus, ubi requiritur ut expressio algebraica pro sinu vel chorda ex assumto arcu adhibeatur proxime satisfaciens; quod si enim arcum posueris z pro radio 1, tuto assumes chordam

$$=z-\frac{1}{24}z^3+\frac{1}{1920}z^5,$$

vel

$$=\frac{1920z+160z^3}{1920+240zz+9z^4},$$

eiusdemque arcus sinum

$$=z-\frac{1}{6}z^3+\frac{1}{120}z^5$$

vel

$$=\frac{120+40z^3}{120+60zz+9z^4}.$$

huiusmodi formulas sed reciprocas, quae nimirum ex chorda arcuum proxime definiunt, iam olim dedit *Newtonus*[3], quas etiam ex aequatione (D) elicuisse mihi visus est.

§. 9. Ex his perspicuum est, satis apte methodum nostram adhiberi pro radice invenienda aequationum continuo progredientium, quandoquidem in his exemplis allatis multo rectius procedat, quam ordinaria. Qui autem haec et superiora in Tom. III[4] exposita recte assecuti fuerint, perspicient terminorum omnium in infinitum aliquomodo rationem haberi propter uniformitatem legis, qua termini aequationis progrediuntur, quamvis in constructione radicis pauci termini adhibeantur. Et hoc quidem modo fit, quod certe mirabile est, ut quoties aequatio infinita ad finitam reduci potest, id ipsum hac methodo indicetur, simulque radix iusta, recte se habentibus praemissis, constanter oriatur, ubicunque abrumaptur seriei paragraphi quinti constructio, quod a regulis consuetis minime est expectandum. De hoc proxima occasione agam; nunc finiam postquam monuero, succedere posse, ut series §. 5. non vergat ad naturam progressionis geometricae, quo in casu non convenit valor aequationis (C). Illud tunc fit quando radix illa, quam minimam in Diss. de seriebus recurrentibus[5] vocavi, est imaginaria; quomodo autem huic incommodo obviam iri possit, in eadem docui Dissertatione. His itaque et aliis similibus non amplius immorabimur.

3 I. Newton «Opticks» 1ère éd. London 1704 pp. 138 à 162.
4 Cf. II. 1 - St. 16 p. 49 h.v.
5 Cf. II. 1 - St. 16 p. 55 h.v.

Notationes de aequationibus, quae progrediuntur in infinitum, earumque resolutione per methodum serierum recurrentium: ut et de nova serierum specie. Praelectio Secunda

Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, Bd. V, p. 70–82. 1730–31 (1738)
II.2b – St.20b

§. 1. Postquam in prima harum notationum mearum praelectione: ostendi modum generalem invertendi aequationem, cuius alterutra indeterminata ceu incognita per omnes dimensiones in infinitum transit, in praesentibus potissimum monstrabo egregium consensum atque nexum methodi nostrae cum illis casibus, quibus aequatio infinitorum terminorum in aliam ordinariam finitam transmutari potest. Hunc autem in finem quaedam praemittam circa novum aliquod serierum genus.

§. 2. Constructio harum serierum in hoc generaliter consistit, ut fingantur numeri data lege quacunque progredientes, quos ponam esse

$$\text{(A)} \qquad a.b.c.d.e.f. \text{ etc.}$$

ex his autem formetur talis series

$$\text{(B)} \qquad a.(aa+b).(a^3+2ab+c).$$
$$(a^4+3aab+2ac+bb+d).(a^5+4a^3b+3aac+3abb+2ad+2bc+e).$$
$$(a^6+5a^4b+4a^3c+6aabb+3aad+6abc+b^3+2ae+2bd+cc+f) \text{ etc.}$$

quae ita est comparata, ut quilibet terminus constet ex aggregato omnium praecedentium suo ordine multiplicatorum per $a, b, c, d, e, f,$ etc. et novi termini in serie (A) subsequentis. Ita v. gr. tertius terminus seriei (B) est aggregatum ex praecedente $(aa+b)$ multiplicato per a, ex antepraecedente (a) multiplicato per b et ex novo termino c ex serie data (A) depromto.

§. 3. Singularis est harum serierum proprietas, quod quoties series (A) est algebraica, altera (B) fiat recurrens, seu exponentialis; atque adeo huius terminus generalis cum omnibus inde pendentibus praerogativis habeatur. Voco autem seriem algebraicam, cuius terminus generalis habetur expressus per quantitates algebraicas rationales ordinarias, quarum denominatores variabilis non ingreditur, cuius modi sunt omnes series numerorum figuratorum; series recurrentes quandoque etiam nomine exponentialium designo, quod in termino generali variabilis est in exponente; si modo series non sit recurrens spuria. Pertinent enim series algebraicae quoque ad recurrentes, quas tamen non ut recurrentes veras considero. Notabilem serierum nostrarum praefatam indolem, postquam observassem, tentavi modum generalem reducendi seriem B ad recurrentem sub praedicta lege; nec successus me fefellit, uti mox apparebit.

§. 4. Sumantur in serie (A) quorumvis duorum terminorum proximorum differentiae, quae constituent seriem; ex hac secunda serie eodem modo formetur tertia, ex hac quarta donec perveniatur ad differentiam constantem, quae natura est huiusmodi serierum. Sit autem primus terminus in prima serie a, in secunda α, in tertia β, in quarta γ et sic porro, donec obtineatur series ultima, cuius singulos terminos inter se aequales vocabo δ, numerum denique harum serierum designabo per l, vel numerum differentiationum per $l-1$. Notetur porro indicem seriei recurrentis, dici $m, n, p, q, - - - r$, quando quivis terminus aggregatum est sui praecedentis per m, huiusque praecedentis per n, et eius qui hunc praecedit per p, et qui hunc per q, et sic deinceps, donec terminus multiplicandus per r occurrat. His ita definitis, fiat series recurrens, cuius termini initiales numero l iidem sint qui in serie B, nempe

$$a, \quad (aa+b), \quad (a^3+2ab+c), \quad \text{etc.}$$

et cuius index $m, n, p, q, - - - r$, se habeat ut sequitur.

$$\begin{aligned}
m &= a+\frac{l}{1}\\
n &= \alpha-\frac{l-1}{1}a-\frac{l.l-1}{1.2}\\
p &= \beta-\frac{l-2}{1}\alpha+\frac{l-1.l-2}{1.2}a+\frac{l.l-1.l-2}{1.2.3}.\\
q &= \gamma-\frac{l-3}{1}\beta+\frac{l-2.l-3}{1.2}\alpha-\frac{l-1.l-2.l-3}{1.2.3}a-\frac{l.l-1.l-2.l-3}{1.2.3.4}\\
&\vdots\\
&\vdots\\
r &= \delta - - - - - \pm\gamma\mp\beta\pm\alpha\mp a\mp 1.
\end{aligned}$$

Legem aequationum quivis facile percipiet; notet autem ubique duo signa ultima non reciprocari, et in postrema aequatione signa superiora valere, cum l est numerus par, at inferiora, cum est impar. Regulam hanc generalem exemplis quibusdam illustrabimus.

Exemplum 1.

§. 5. Sumatur pro (A) series unitatum, erit $l=1$, $a=1$, reliquae autem litterae α, β, etc. $=0$, fiat series recurrens, vel potius in hoc casu geometrica, incipiens ab 1. cuius index simpliciter sit

$$=a+\frac{l}{1}=2,$$

nempe 1. 2. 4. 8. 16. etc. ubi terminus generalis posito x pro exponente termini est 2^{x-1} et quae convenit cum serie (B).

Exemplum 2.

Exponat iam series (A) numeros naturales

1. 2. 3. 4. 5. 6. etc.

fit $l=2$, $a=1$, $\alpha=1$; $\beta=\gamma=$ etc. $=0$, sumantur duo primi termini seriei (B) 1 et 3; et ex his constituatur series recurrens, cuius index $=m$, $n=3$, -1, quae haec est

1. 3. 8. 21. 55. 144. etc.

habens pro termino generali

$$\left(\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^x-\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^x\right):\sqrt{5},$$

quae rursus in praesenti casu cum aequatione (B) plane consentit.

Exemplum 3.

Sit porro loco seriei (A), quae sequitur

2. 2. 5. 11. 20. 32. etc.

indicata generaliter per

$$\frac{3xx-9x+10}{2}$$

pro qua valet $l=3$, $a=2$, $\alpha=0$, $\beta=3$ evanescentibus reliquis valoribus. Hic igitur incipiendo a tribus primis terminis seriei (B), qui sunt 2, 6 et 21, et ex his formando seriem exponentialem, quae pro indice habeat 5, -7, 6, nempe hanc

$$2.\ 6.\ 21.\ 75.\ 264.\ 921.\ \text{etc.}$$

deprehendimus adhuc, eam nequicquam differre a proposita (B), cuius terminus generalis data radicum extractione facile invenitur.

Exemplum 4.

Sit denique (A)

$$10.\ -25.\ -10.\ 31.\ 74.\ 95.\ 70.\ \text{etc.}$$

repraesentata per terminum generalem

$$-4x^3+49xx-154x+119,$$

ubi $l=4$, $a=10$, $\alpha=-35$, $\beta=50$, $\gamma=-24$, reliquis in nihilum abeuntibus. Exinde fit (B)

$$10.\ 75.\ 490.\ 2956.\ 16944.\ 93800.\ \text{etc.}$$

Si vero ab huius seriei quatuor primis terminis incipiatur atque ex illis series recurrens indicis 14, -71, 154, -120 formetur, haec eadem series (B) orietur, cuius proin terminus generalis erit

$$-\frac{1}{3}(2)^{x-2}+8(3)^{x-1}-\frac{81}{2}(4)^{x-1}+\frac{128}{3}(5)^{x-1}.$$

Corollarium 1.

§. 6. Si series (A) terminus generalis sit

$$\frac{x-1.x-2.x-3.----x-n}{1.2.3.----n},$$

conveniet series (B) cum serie recurrente, cui index est

$$\frac{n+1}{1}\cdot-\frac{n+1.n}{1.2}\cdot\frac{n+1.n.n-1}{1.2.3}\cdot-\frac{n+1.n.n-1.n-2}{1.2.3.4}----\pm 1+1.$$

et cuius termini primi numero $n+1$ sunt 0. 0. 0. - - - 1. sic v. gr. si series (A) fuerit numerorum trigonalium

$$0.\ 0.\ 1.\ 3.\ 6.\ 10.\ 15.\ 21.\ \text{etc.},$$

erit series (B)

$$0.\ 0.\ 1.\ 3.\ 6.\ 11.\ 21.\ 42.\ \text{etc.},$$

ad quam pervenitur si posito $n=2$, formetur series recurrens ex tribus numeris 0, 0, 1, cuius index sit 3, -3, 2: si fiat $n=3$, dat series (A) tales numeros

$$0.\ 0.\ 0.\ 1.\ 4.\ 10.\ 20.\ 35.\ \text{etc.},$$

altera (B) autem

$$0.\ 0.\ 0.\ 1.\ 4.\ 10.\ 20.\ 36.\ \text{etc.}$$

quae series recurrens est, cuius index est 4, -6, 4, 0. Notetur autem terminum ultimum in indice esse vel 2 vel 0, prouti n fuerit numerus vel par vel impar.

Corollarium 2.

§. 7. Dantur etiam series algebraicae (A) tales ut altera (B) unicas exhibeat binomii ad certam dignitatem elevati omnibus terminis reliquis in infinitum evanescentibus. Ita si (A) est

$$-1.\ -1.\ -1.\ -1.\ -1.\ -1.\ \text{etc.}$$

sit (B)

$$-1.\ 0.\ 0.\ 0.\ 0.\ \text{etc.}$$

si (A) ponatur

$$-1.\ -2.\ -3.\ -4.\ -5.\ \text{etc.}$$

sit (B)

$$-2.\ 1.\ 0.\ 0.\ 0.\ \text{etc.}$$

et pariter si (A)

$$-3.\ -6.\ -10.\ -15.\ -21.\ -28.\ \text{etc.}$$

oritur (B)

$$-3.\ 3.\ -1.\ 0.\ 0.\ 0.\ 0.\ \text{etc.}$$

Igitur omnes hae series (B) quoque pertinent ad classem recurrentium, sed ita tamen ut termini aliquot postremi in indice sint considerandi, ut aequales nihilo. Hoc modo series dicta numerorum

$$-3.\ 3.\ -1.\ 0.\ 0.\ 0.\ 0.\ \text{etc.}$$

consideranda est ut recurrens, quae habeat secundum regulam nostram generalem §. 4. indicem 1. 0. 0. 0. ponendo scilicet $l=4$, $a=-3$, $\alpha=-3$, $\beta=-1$, $\gamma=o$, quandoquidem ex his positionibus utraque series (A) et (B) oriatur.

Scholion.

§. 8. Si series (A) sit talis, ut eius termini singuli reales et progressionem algebraicam inter se formantes, sint dato numero nullionum f interpolati, primumque terminum pariter datus numerus nullionum g praecedat, sit series (B) rursus recurrens; si nempe series talis

$$0.\ 0. ----\ 0.\ a.\ 0.\ 0. --\ 0.\ b.\ 0.\ 0. --\ 0.\ c.\ 0.\ 0. --\ 0.\ d.\ 0.\ \text{etc.}$$

formeturque ex hac secundum legem §. 2. alia progressio considerando nulliones, ut terminos seriei non negligendos, habeantque se caeterum a, b, c, d etc. ut et $\alpha, \beta, \gamma --- \delta$, nec non numerus l, ut dictum est in §. 4. erit series (B) genita rursus recurrens cuius indicem brevitatis causa non apponam generalem: exemplum tamen rei unum alterumve apponam. Sit $f=1$, $g=0$, formentque litterae $a.b.c.d.$ etc. seriem numerorum naturalium 1, 2, 3, 4, etc. Fit series (A) talis

$$1.\ 0.\ 2.\ 0.\ 3.\ 0.\ 4.\ 0.\ 5.\ 0.\ 6.\ 0.\ \text{etc.}$$

ipsaque (B)

$$1.\ 1.\ 3.\ 5.\ 10.\ 19.\ 36.\ 69.\ 131.\ 250.\ 476.\ \text{etc.}$$

quae recurrens est habens pro indice

$$1, 2, 0, -7;$$

Sit porro pro serie (A)

$$0, 1, 0.\ 0.\ 3.\ 0.\ 0.\ 6.\ 0.\ 0.\ 10.\ 0.\ 0.\ 15.\ 0.\ 0.\ 21.\ \text{etc.}$$

ex qua generatur series (B)

$$0.\ 1.\ 0.\ 1.\ 3.\ 1.\ 6.\ 7.\ 9.\ 22.\ 46.\ 71.\ \text{etc.}$$

cui ceu recurrenti index est

$$0, 1, 3, 0, 0, -3, 0, 0, -3, 0, 0, 1.$$

§. 9. Dictae autem series algebraicae sive continuae sive interpolatae non solae sunt quae alteram reddunt recurrentem: nam possunt etiam esse recurrentes qualescunque, haeque ut de algebraicis ostensum est, cum continuae, tum nullionibus interruptae. Sit v. gr. (A)

2. 3. 5. 9. 17. 33. 65. 129. etc.

cuius seriei terminus generalis est

$$2^{x-1}+1^{x} \quad \text{sive} \quad 2^{x-1}+1,$$

quaeque adeo recurrens est, indice 3, -2 praedita: sit series (B)

2. 7. 25. 90. 325. 1175. 4250. 15375. etc.

quae itidem recurrens indicem habet 5, -5. Sin autem fuerit (A)

2. 0. 3. 0. 5. 0. 9. 0. 17. 0. 33. etc.

oritur (B)

2. 4. 11. 28. 73. 189. 491. 1274. 3308. etc.

quae est series exponentialis quarti ordinis, cui index est 2, 3, -3, -2.

§. 10. Tota denique res in hoc consistit theoremate generali, ut si primus seriei (A) terminus intelligatur multiplicatus per x, secundus per x^2 tertius per x^3 et sic in infinitum, sicque habeatur

$$ax+bxx+cx^3+dx^4+ex^5+fx^6 \text{ etc.}$$

respiciendum sit, an haec ultima series infinita in summam finitam algebraice expressam reduci possit nec ne? Si prius indicium est, seriem (B) recurrentem fore; tunc autem summa aequalis statuenda est unitati, posteaque aequationi concilianda est haec forma

$$1=\alpha x+\beta xx+\gamma x^3+\delta x^4----+\phi x^l,$$

quo facto erit index seriei (B) ceu recurrentis α, β, γ, $\delta-----\phi$ pertinens ad ordinem l. Si vero exposita series

$$ax+bxx+cx^3+dx^4+ex^5+fx^6 \text{ etc.}$$

in summam finitam algebraice expressam redigi non possit, erit series (B) transcendens nec formula finita indicari poterit. Et in hoc quidem continetur, quicquid hactenus circa hanc rem monitum fuit.

Iam vero redeo ad id, quod potissimum constitueram; nempe ad modum in prima harum notationum parte expositum invertendi aequationem sine fine per omnes dimensiones incognitae progredientem, ostensurus nunc aequationes infinitas, cum ad finitas redigi possint, estiamsi non mutatas non aliter tamen resolvi hac methodo, quam si prius ad formulam finitam fuissent reducta.

§. 11. Sit igitur aequatio proposita reducta, quod semper fieri potest, ad hanc formam

$$(M)\qquad 1 = ax + bxx + cx^3 + dx^4 + ex^5 + fx^6 + \text{etc.}$$

Ponantur autem litterae coefficientes a, b, c, d, e, f, etc. progressionem formare, qualis §. 4. posita fuit, reliquasque etiam, α, β, γ, - - - δ, ut et l valores suos ibidem definitos servare. Sic igitur fiet, ut omnes termini aequationis in summam finitam, quod notum est, redigi queant. Si vero lex summae in diversis casibus recte observetur, facile erit generaliter illam definire: hoc autem facto aequatio nova ita disponatur, ut ab una parte sit unitas et ab altera stent reliqui aequationis termini. Hoc modo aequatio proposita (M) abit in hanc

$$(N)\qquad 1 = \begin{array}{l} 1\left(\frac{l}{1}x - \frac{l-1}{1.2}xx + \frac{l-1.l-2}{1.2.3}x^3 - \frac{l.l-1.l-2.l-3}{1.2.3.4}x^4 \mp x^l\right) \\ +a\left(x - \frac{l-1}{1}xx + \frac{l-1.l-2}{1.2}x^3 - \frac{l-1.l-2.l-3}{1.2}x^4 - - \pm x^l\right) \\ +a\left(\cdots\cdots xx - \frac{l-2}{1}x^3 + \frac{l-2.l-3}{1.2}x^4\cdots\cdots \pm x^l\right) \\ +\beta\left(\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots x^3 - \frac{l-3}{1}x^4\cdots\cdots \pm x^l\right) \\ +\gamma\,(\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots x^4\cdots\cdots \mp x^l) \\ \vdots \\ \vdots \\ +\delta\,(------------------x^l) \end{array}$$

Sunt itaque aequationes (M) et (N) aequivalentes; quod si autem prior secundum leges §. 4. partis primae harum notationum, et posterior secundum leges §. 12. dissertationis de seriebus recurrentibus Tom 3. resolvatur, modo numeri initiales requisiti non differant, ex utraque methodo similis oritur series. Consensus iste clarius intelligetur, si valores §. 4.

$$m = a + \frac{l}{1}, \qquad n = a - \frac{l-1}{1} - \frac{l.l-1}{1.2} \text{ etc.}$$

coincidere cum coefficientibus quantitatum x, xx, etc. in ultima aequatione (N) observatum fuerit.

§. 12. Ex his modo dictis etiam fluunt, quae paragrapho 8. et 9 monita sunt. Ceterum quod dixi §. 5. part. 1. pro invenienda radice aequationis inifnitae intelligendam esse unitatem inifnitis nullionibus impositam, id non ita stricte sumendum esse, quasi non loco simplicis unitatis quotcunque numeri arbitrarii adhiberi possent, per se patet. Hinc etiam loco seriei (B) §. 2. potuisset alia magis composita formari ex eadem serie (A) scilicet intelligendo praeter unitatem numeros $p, q, r, \cdots s$ quoscunque, ex quibus series eadem lege construatur, qua series (B) §. 2. simul autem intelligendo numeros $s---- r, q, p$, 1 tanquam primos seriei terminos. Id vero si ita effectum fuerit, dico rursus seriem (B) recurrentem fore, si series (A) sit vel algebraica vel exponentialis eaeque sive purae sive nullionibus interpolatae, et indicem seriei (B) non alium fore; attamen hoc respectu terminos $s---- r, q, p$, 1 non censendos pertinere ad seriem (B). Quod ut exemplo magis explicemus, fingemus aequationem resolvendam esse talem

$$1 = x + 3xx + 6x^3 + 10x^4 + 15x^5 + 21x^6 + 28x^7 + \text{etc.}$$

Construatur series non incipiendo ut ante a simplici unitate, sed a numeris quotcunque arbitrariis, v. gr. ab 3. 2. 1. sic ut sit

3. 2. 1. 25. 70. 216. 679. 2183. etc.

quam dico rursus recurrentem esse, si modo tres primi termini 3. 2. 1. assumti a serie excludantur; neque differre indicem ab eo, qui vi regulae §. 4. reperitur nempe esse in hoc casu 4, -3, 1. Possunt itaque innumeris modis aequationes infinitae resolvi, qui omnes indicant modum quo istae aequationes ad finitas reduci debeant, quoties id fieri potest. Solet autem methodus §. 5. part. 1. inter omnes esse maxime brevis.

§. 13. Et haec sunt quae de serierum nostrarum usu in resolvendis aequationibus infinitis monenda habui. Finiam igitur hasce notationes postquam obiter quasdam notavero alias proprietates serierum (B) §. 2. definitarum. Patet quidem cum summa omnium terminorum seriei (A) finita est et cognita, summam quoque quotcunque terminorum in altera (B) hinc innotescere concessa radicum extractione, quia fit exponentialis, id est, ex pluribus geometricis conflata. Singulare autem hac in re compendium est, quando summa omnium terminorum (B) desideratur, neque enim haec amplius a radicum extractione ullo modo pendet sed constanter eadem est, manente summa prioris. Omnem rem quivis perspiciet postquam notarit, seriem (B) conflatam esse ex

$$(a+b+c+d+e+f----)^1, \quad (a+b+c+d+e+f----)^2, \quad (a+b+c+d+e+f----)^3----,$$

id est ex omnibus dignitatibus rationalibus summae primae seriei (A). Igitur si haec summa fuerit = S, erit summa alterius (B)

$$= \mathrm{S} + \mathrm{S\,S} + \mathrm{S}^3 + \text{etc.} = \frac{\mathrm{S}}{1-\mathrm{S}}\,.$$

§. 14. Idem certo modo valet pro seriebus magis compositis, quarum mentionem feci in paragrapho duodecimo, quando nempe series (B) non ex sola unitate sed ex pluribus quantitatibus arbitrariis formatur. Ita ex. gr. quum ex serie (A) $a.b.c.d.e.f.$ construitur series (B) incipiens a duobus terminis arbitrariis m, et n, scilicet

$$m.n.na+mb.naa+mab+nb+mc. \text{ etc.}$$

erit huius summa sub prioribus conditionibus $= \dfrac{m+n-ma}{1-\mathrm{S}}$,

vel (si termini m et n non ad seriem pertineant) $= \dfrac{m\mathrm{S}+n\mathrm{S}-ma}{1-\mathrm{S}}$.

Id vero apparet ex eo, quod huiusmodi series compositae semper resolvi possint in plures series simplices multiplicatas per litteram aliquam constantem. Atque hoc modo reperitur summa seriei (B) conveniens quotcunque terminis arbitrariis $m.----n.p.q.r.$ initialibus

$$= m\ ---+n+p+q+r+\frac{(m----+n+p+q+r)\mathrm{S}}{1-\mathrm{S}}-\frac{(m\ ----n+p+q)a}{1-\mathrm{S}}$$
$$-\frac{(m----+n+p)b}{1-\mathrm{S}}-\frac{(m----+n)c}{1-\mathrm{S}}----\frac{-(m)\phi}{1\text{-}\mathrm{S}},$$

ubi per ϕ intelligitur terminus seriei (A) cuius exponens est numerus terminorum arbitrariorum unitate diminutus: potest autem haec summa compendiosiori formula exprimi, nempe esse illam aequalem

$$\frac{m---+n+p+q+r-qa-p(a+b)-n(a+b+c)----m(a+b+c---+\phi)}{1-\mathrm{S}}$$

Excerpta ex litteris.
A Daniele Bernoulli ad Leonhardum Euler.

Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae. Bd.XIII, p.3–15. 1741–43 (1751)
II.3 - St.35

Egregia plane sunt, Vir Celeberrime, quae mihi de novo fere calculi integralis genere perscribis; placet tuus quantitates a circulo pendentes notandi modus eoque pariter iam pridem usus sum; recte etiam huiusmodi quantitates constanter reducis ad circulum eundem, cuius radium ponis aequalem unitati, non secus ac quantitates logarithmicae reduci solent ad logarithmicam, cuius subtangens sit unitate expressa. Tum vero admiratus sum insignem usum, quem primus observasti huiusmodi quantitatibus inesse, ingentem aequationum differentialium altioris gradus segetem ad quantitates finitas reducendi. Habent quantitates ad logarithmicam et circulum pertinentes, quum continue differentiantur, multas insignes proprietates, quibus te usum esse video, tum etiam coniicio, te methodum integrandi hic adhibere indirectam, sed ea tamen circumspectione, quam in eiusmodi methodis indirectis alias negligunt, ut tot novos quantitates constantes arbitrarias aequatio integralis contineat, quot methodo integrandi directa ab additione constantium prodire potuissent. Circumspectum hic utique esse oportet in diiudicandis et enumerandis diversis quantitatibus constantibus ad institutum utilibus, quia saepissime inutiles sunt, quae non nisi post serium examen tales esse iudicantur. Ita verbi gratia haec formula[1]

$$m e^{nx} \times \text{S.A.}\overline{a+bx} + f e^{nx} \times \text{S.A.}\overline{g-bx}$$

quatuor tantum arbitrariis gaudere censenda est, cum prima fronte sex ipsi adiudicandos esse appareat: potest nempe praefata formula mutari in hanc alteram hoc confirmante

$$M e^{nx} \times \text{S.A.}\,bx + N e^{nx} \times \text{cos.A.}\,bx\,,$$

unde liquet quam facile in isto negotio nubes pro Iunone accipi possit. Operae pretium foret examinare, an et quales regulae pro omni formularum genere dari possint in aestimando vero quantitatum constantium ad propositum utilium numero, ut certi esse possimus post integrationes indirectas, omnes problematis solutiones possibiles fuisse exhibitas; huc enim huiusmodi disquisitiones collimant. At vero propero ad calculi specimina, quae mihi proposuisti. Observavi ea non

1 S.A. = sinus arcus et cos. A = cosinus arcus.

difficulter deduci ex forma quam habent differentialia sinuum arcubus circularibus variabilibus respondentium, sicut et differentialia quantitatum exponentialium ac denique quantitatum, quae oriuntur a multiplicatione utriusque praefati generis. Sit dx constans intelligaturque per e numerus cuius logarithmus est unitas, erit

$$\text{I.}\qquad d^n.c\,\mathrm{S.A.}(a+bx)=\pm c b^n dx^n \times \mathrm{S.A.}(a+bx)$$

vel

$$=\pm c.b^n dx^n \times \cos.\mathrm{A.}(a+bx)$$

prouti n fuerit numerus vel multiplus quaternarii vel ab eodem unitate, aut binario aut ternario deficiat.

$$\text{II.}\qquad d^n.c e^{fx}=cf^n dx^n \times e^{fx}$$

$$\text{III.}\quad d^n.c e^{fx}\times \mathrm{S.A.}(a+bx)=Mc\,dx^n e^{fx}\times \mathrm{S.A.}(a+bx)+Nc\,dx^n e^{fx}\times \cos.\mathrm{A.}(a+bx)$$

ubi M et N denotant quantitates constantes diversimode compositas ex litteris b et f secundum legem observatu facillimam. Potest itaque litteris f et b talis assignari valor (quod quidem fit aequatione ad tot dimensiones assurgente, quot habet numerus n unitates) ut sit $N=0$ et M aequalis cuicunque numero dato. Et quia aequatio plurium dimensionum totidem habet radices diversas, patet simul totidem modis huic conditioni satisfieri. Quid autem faciendum sit cum quaedam radices sunt imaginariae vel inter se aequales, ex sequentibus patebit. Haec omnia simpliciter derivantur ex eo, quod

$$d\,\mathrm{S.A.}z=dz\cos.\mathrm{A.}z \quad \text{et} \quad d\cos.\mathrm{A.}z=-dz\,\mathrm{S.A.}z$$

Dubitare perrectis litteris tuis, Vir Clarissime, non licet, quin haec omnia tibi similiter fuerint observata, iisque integrationes formularum, quas perscripsisti, superinstruxeris. Iam itaque hasce formulas integrandas suscipio, ut videas an recte hoc argumentum fuerim assecutus et aliquas superaddam commentationes, quas te minime improbaturum esse confido.

I. Exemplum primum, quod allegas, hoc est posita dz constante.

$$nndds+sdz^2=mdz^2\,\mathrm{S.A.}z.$$

ad quod te argumento de aestu maris[2] nuper ab Academia Regia Sc. Paris. Eruditis proposito perductum fuisse scribis.

2 L. Euler E57 «Inquisitio physica in causam fluxus ac refluxus maris» Prix 1740 (1741).

Hic facile est praevidere, quod si ponatur $s = a\,\mathrm{S.A.}z$, omnes aequationis termini hanc debeant induere formam

$$M\,dz^2\,\mathrm{S.A.}z,$$

ita ut possit valor litterae a assignari talis, ut omnes termini se destruant sicque aequationi perfecte satisfiat; hunc scilicet in finem facienda est

$$a = \frac{-m}{nn-1}.$$

Igitur aequationi differentiali propositae iamiam satisfacit aequatio

$$s = \frac{-m}{nn-1}\,\mathrm{S.A.}z,$$

quae autem nimis adhuc est particularis. Huic ut occurram defectui pono

$$s = \frac{-m}{nn-1}\,\mathrm{S.A.}z + q,$$

et sic aequatio proposita abit in hanc

$$nn\,ddq + q\,dz^2 = 0$$

Haec ultima quidem aequatio modo solito directe potest integrari, quia vero animus est usum ostendere integrationum indirectarum, utor proprietatibus supra expositis, quas hic utiliter adhiberi posse, ipsa aequationis huius forma indicat; pono itaque

$$q = f\,\mathrm{S.A.}(hz + g)$$

inquisiturus in valorem litterae h talem, ut desiderato satisfiat; docet autem calculus ponendum esse $h = 1/n$.

sic igitur fit

$$q = f\,\mathrm{S.A.}\left(\frac{z}{n} + g\right)$$

quae omnes problematis solutiones possibiles iam continere dicenda est, quia tot novis gaudet quantitatibus arbitrariis utilibus, nempe f et g, quot ab integratione directa oriri potuissent. Determinato valore q, eoque substituto in aequatione assumta

$$s=\frac{-m}{nn-1}\,\mathrm{S.A.}z+q\,,$$

prodit aequatio finalis

$$s=\frac{-m}{nn-1}\,\mathrm{S.A.}z+f\,\mathrm{S.A.}\left(\frac{z}{n}+g\right)$$

Ista quidem aequatio mea a tua prima fronte videtur diversa; revera tamen inter se egregie conveniunt. Invenisti nempe

$$s=a\,\mathrm{S.A.}\frac{z}{n}+b\cos.\mathrm{A.}\frac{z}{n}+\frac{m}{nn-1}\left(n\,\mathrm{S.A.}\frac{z}{n}-\mathrm{S.A.}z\right)$$

atque ut identitas aequationum nostrarum patefiat, notabimus esse

$$\mathrm{S.A.}\left(\frac{z}{n}+g\right)=\cos.\mathrm{A.}g\times\mathrm{S.A.}\frac{z}{n}+\mathrm{S.A.}g\times\cos.\mathrm{A.}\frac{z}{n}\,.$$

Potest itaque aequationi meae haec dari forma

$$s=\frac{-m}{nn-1}\,\mathrm{S.A.}z+f\cos.\mathrm{A.}g\times\mathrm{S.A.}\frac{z}{n}+f\,\mathrm{S.A.}g\times\cos.\mathrm{A}\frac{z}{n}$$

tua vero aequatio mutato terminorum ordine, haec est

$$s=\frac{-m}{nn-1}\,\mathrm{S.A.}z+\left(\frac{mn}{nn-1}+a\right)\mathrm{S.A.}\frac{z}{n}+b\cos.\mathrm{A.}\frac{z}{n}$$

Igitur conveniet aequatio tua cum mea, si posueris $a=f\cos.\mathrm{A.}g-\dfrac{mn}{nn-1}$
et $b=f\,\mathrm{S.A.}g\,,$
atque vides has substitutiones hoc modo adhibitas aequationem tuam reddere haud parum concinniorem. Lubet nunc addere problematis tui solutionem directam, ut appareat isto exemplo, tutissimum esse hunc integrandi modum indirectum. Sit ergo rursus integranda aequatio

$$nndds+sdz^2=mdz^2\,\mathrm{S.A.}z.$$

Ponatur $\mathrm{S.A.}z=r\,,$

erit $$dz=\frac{dr}{\sqrt{(1-rr)}}$$

atque (ob dz = constanti) $$dr^2=\frac{1-rr}{r}\times-ddr\,;$$

His substitutis valoribus mutatur aequatio proposita in hanc

$$nndds=\frac{s-m}{r}ddr$$

Ponatur, ut aequatio fiat simplicior, $s=\frac{-mr}{nn-1}+q$
et obtinebitur successive

$$nnrddq=qddr$$

vel

$$nnrddq=\frac{-qrdr^2}{1-rr}$$

vel

$$\frac{nnddq}{q}=\frac{-dr^2}{1-rr}$$

vel denique

$$\frac{nnddq}{q}=-dz^2$$

multiplicetur haec ultima aequatio per qdq et erit

$$nndqddq=-qdqdz^2,$$

quae integrata cum additione constantis dat

$$\frac{1}{2}nndq^2=-\frac{1}{2}qqdz^2+\frac{1}{2}ffdz^2$$

sive

$$dz=\frac{ndq}{\sqrt{(ff-qq)}}$$

Est autem

$$\int\frac{ndq}{\sqrt{(ff-qq)}}=n\,\mathrm{A.S.}\frac{q}{f}\,.$$

Sic igitur facta secunda integratione cum addita constante ng fit

$$z+ng=n\,\mathrm{A.S.}\frac{q}{f}\,.$$

Potest autem signum A. S. si convertatur in partem alteram transferri, hocque facto prodit

$$\frac{q}{f}=\text{S.A.}\left(\frac{z}{n}+g\right) \quad \text{vel} \quad q=f\text{S.A.}\left(\frac{z}{n}+g\right).$$

Iam quia posita fuit

$$s=\frac{-mr}{nn-1}+q \quad \text{atque} \quad r=\text{S.A.}z,$$

erit tandem

$$s=\frac{-m}{nn-1}\text{S.A.}z+f\text{S.A.}\left(\frac{z}{n}+g\right).$$

atque haec aequatio eadem plane est cum priori, quam methodo eruimus indirecta.

Si iam signum termini primi mutetur in aequatione proposita atque integranda detur

$$-nndds+sdz^2=mdz^2\text{S.A.}z$$

fit secundus aequationis integratae terminus imaginarius, nempe talis

$$f\text{S.A.}\left(\frac{z}{n\sqrt{-1}}+g\right);$$

dico autem posse in hisce casibus sinui arcus circularis imaginarii semper substitui quantitates exponentiales, quae tunc fient reales; satisfaciet nempe, quod utraque methodo liquet, nunc talis aequatio

$$s=\frac{m}{nn+1}\text{S.A.}z+ae^{\frac{z}{n}}+be^{\frac{z}{n}}.$$

Caeterum potest aequatio proposita infinitis modis infinities generalior reddi atque etiamnum integrari; sed haec taceo, ne epistolae limites transgrediar.

II. Progredior ad exemplum alterum, quod praesertim amo, quía pertinet ad argumentum mechanicum iam pridem a me propositum et a nobis ambobus solutum, argumentum intelligo de figura, quam lamina elastica uniformis muro infixa et vibrata affectat, quae figura prius definienda est, quam numerus vibrationum dato tempori respondens, de quo imprimis quaestio erat, determinari possit. Hanc autem figuram posita abscissa v, applicata minima s factaque dv constante, convenire invenimus cum hac aequatione

$$d^4s=f^4sdv^4$$

quae quidem per series concinne tractatur, ita ut numerus vibrationum absolutus pro dato tempore inde rite definiri possit, si artificia quaedam mechanica adhibeantur. Methodus mea, quam nondum cum Academia communicare vacavit[3], talis est ut facto experimento, quantum extremitas laminae dato pondere a situ naturali distrahatur eoque pondere cum pondere laminae comparato, accurate numerus vibrationum definiatur: omnen etiam theoriam meam experimentis confirmavi. Equidem tum temporis etiam integrationem praefatae aequationis methodo directa tentaveram, sed ea ultra differentialia secundi ordinis pervenire non potui. Nunc vero tibi, vir eruditissime, hanc observationem debemus, quod ista aequatio plane ad quantitates finitas reduci possit. Nec ista reductio methodo indirecta obscura amplius est, quia non aliud requiritur, quam ut inveniatur quantitas expressa per v et quatuor novas constantes talis, ut ipsius differentialis quarti ordinis sit ipsi quantitati quaesitae proportionalis, cui problemati quomodo satisfaciendum sit, ex praemissis iam luculenter patet. Videmus nempe statim, poni posse

$$s=a\,e^{fv}+b\,e^{-fv}+c\,e^{fv\sqrt{-1}}+g\,e^{-fv\sqrt{-1}}$$

Quia vero in ista aequatione duae sunt quantitates exponentiales imaginariae, oportet vi superioris annotationis ad sinus arcuum circularium recurrere; atque sic invenitur vera aequatio talis

$$s=a\,e^{fv}+b\,e^{-fv}+g\,\mathrm{S.A.}(fv+h)$$

III. Progredior ad exemplum, quod proponis, generaluis, nempe aequationem integrandam

$$d^n s=f^n s\,dv^n$$

quae concinnior paullo redditur ponendo $fv=q$;
ita enim fit

$$d^n s=s\,dq^n$$

in qua aequatione dq etiamnum constans est.

Huic quidem aequationi semper satisfacit haec aequatio

$$s=a\,e^q;$$

quia vero aequatio generalissima tot gaudere debet novis arbitrariis constantibus quot sunt unitates in n, de aliis insuper cogitandum est terminis aequationi propositae pariter satisfacietatibus. Huic postulato satisfieret ponendo

$$s=a\,e^q+b\,e^{Aq}+c\,e^{Bq}+f\,e^{Cq}+\text{etc.}$$

3 Cf. VI. 7 - St. 37 et VI. 8 - St. 38 Vol. 6 Oeuvres de DB.

si scilicet per 1, A, B, C etc. intelliguntur radices huius aequationis $x^n = 1$, quoniam vero sola radix prima semper est realis et reliquae omnes sunt imaginariae (nisi n sit numerus par, ubi etiam satisfacit terminus be^{-q}) colligo recurrendum esse ad huiusmodi terminos

$$me^{gq} \times \mathrm{S.A.}(h + bq),$$

in quibus litterae g et b determinantur rursus aequationibus altioris gradus sic ut plures diversi valores illis assignari possint, unde liquet, si unicus inventus fuerit huiusmodi terminus, reliquos simul innotescere variando radices litterarum g et b. Problema itaque eo reductum est, ut aequationes exhibeantur, quibus praefatae litterae definiantur. Dico autem si vestigiis supra expositis insistatur, tales prodire aequationes

$$g^n - \frac{n.n-1}{1.2} g^{n-2} bb + \frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.2.3.4} g^{n-4} b^4$$

$$- \frac{n.n-1.n-2.n-3.n-4.n-5}{1.2.3.4.5.6} g^{n-6} b^6 + \text{etc.} = 1$$

atque

$$ng^{n-1}b - \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3} g^{n-3} b^3 + \frac{n.n-1.n-2.n-3.n-4}{1.2.3.4.5} g^{n-5} b^5 - \text{etc.} = 0.$$

Demonstrari autem potest vi harum aequationum litteram b exprimere sinum arcus circularis qui se habeat ad circumferentiam circuli ut. 1 ad n et litteram g eiusdem arcus exhibere cosinum: si itaque indicetur circumferentia circuli per C, erit

$$b = \mathrm{S.A.}\frac{C}{n} \quad \text{atque} \quad g = \cos.\mathrm{A.}\frac{C}{n}.$$

Et cum tam sinus quam cosinus arcuum C/n, $2C/n$, $3C/n$ etc. eadem exprimantur aequatione, poterit simul poni

$$b = \mathrm{S.A.}\frac{2C}{n}; \qquad b = \mathrm{S.A.}\frac{3C}{n} \text{ etc.}$$

pariterque

$$g = \cos.\mathrm{A.}\frac{2C}{n}; \qquad g = \cos.\mathrm{A.}\frac{3C}{n}.$$

Ex hisce omnibus sequitur aequationem quaesitam ita se habere

$$s = a\,e^q + \beta\, e^{q\cos.\mathrm{A}.\frac{C}{n}} \times \mathrm{S.A.}\left(c + q\,\mathrm{S.A.}\frac{C}{n}\right)$$

$$+\gamma\, e^{q\cos.\mathrm{A}.\frac{2C}{n}} \times \left(f + q\,\mathrm{S.A.}\frac{2C}{n}\right) + \delta\, e^{q\cos.\mathrm{A}.\frac{3C}{n}} \times \left(h + q\,\mathrm{S.A.}\frac{3C}{n}\right) + \text{etc.}$$

quae aequatio postquam tot subministravit terminos, quot requirit numerus novarum arbitrariarum obtinendarum, sequentes omnes in priores recurrunt, atque haec aequatio plane eadem est cum tua, quam mihi etsi sine calculo et methodo, perscripsisti. Quoniam vero de isto problemate ante litteras tuas perlectas non cogitavi, affirmare nunc non possum, me singula perinde fuisse assecuturum, neque abs te exigere ut credas; videbis interim ex sequenti exemplo, cuius nequidem minima solutionis vestigia apposuisti, via recta me nequaquam aberrare. Nec enim quicquam eorum, quae cum Patre meo[4] hac de re communicasse scribis, mihi ullo modo in notitiam venit.

IV. Requiris aequationem integralem adaequatam huic aequationi differentiali ordinis cuiuscunque, in qua ponitur dx constans,

$$y + \frac{a\,dy}{dx} + \frac{\beta\,ddy}{dx^2} + \frac{\gamma\,d^3y}{dx^3} + \frac{\delta\,d^4y}{dx^4} + \text{etc.} = 0.$$

Solutioni generali huius problematis praemittam solutionem aliquot casuum particularium:

Sit *primo* $$y + \frac{a\,dy}{dx} = 0,$$
iam notum est fore

$$y = a\,e^{\frac{-x}{a}}$$

Sit *secundo* $$y + \frac{a\,dy}{dx} + \frac{\beta\,ddy}{dx^2} = 0;$$
dico fore

$$y = a\,e^{\left(-\frac{a}{2\beta} + \sqrt{(aa - 4\beta)}\right)x} + b\,e^{\left(-\frac{a}{2\beta} - \sqrt{(aa - 4\beta)}\right)x}$$

Si vero 4β maior sit quam $a\,a$, ponendum esse

$$y = a\,e^{\frac{-ax}{2\beta}} \times \mathrm{S.A.}\left(b + \frac{x}{2\beta}\sqrt{4\beta - aa}\right)$$

Dico praeterea, si sit $4\beta = a\,a$, fore tunc mutata paullo aequationis forma,

4 Johann I Bernoulli.

$$y=(a+bx)e^{\frac{-2x}{a}}$$

Ponatur *tertio*
$$y+\frac{a\,dy}{dx}+\frac{\beta\,ddy}{dx^2}+\frac{\gamma\,d^3y}{dx^3}=0,$$

poterit aequatio integralis quatuor diversas habere facies, eritque nominatim

$$y=a\,e^{fx}+b\,e^{gx}+c\,e^{hx},$$
aut
$$y=a\,e^{fx}+(b+c\,x)e^{gx},$$
aut
$$y=(a+b\,x+c\,x\,x)e^{fx},$$
aut denique
$$y=a\,e^{fx}+b\,e^{gx}\times \mathrm{S.A.}(c+h\,x)$$

in quibus singulis litterae a, b et c sunt arbitrariae constantes, dum litterae f, g et h aequationibus, quas calculus pro obtinenda identitate indicat, sunt determinandae; quaenam vero ex praefatis aequationibus sint seligendae, et quonam fundamento haec omnia innitantur, apparebit nunc ex solutione generali.
Sit igitur iam *generaliter*

$$y+\frac{a\,dy}{dx}+\frac{\beta\,ddy}{dx^2}+\frac{\gamma\,d^3y}{dx^3}+\frac{\delta\,d^4y}{dx^4}+\text{etc.}=0$$

Ad reductionem huius aequationis obtinendam, consideranda est talis aequatio

$$1+a\,s+\beta\,s\,s+\gamma\,s^3+\delta\,s^4+\text{etc.}=0$$

Sintque radices huius aequationis, A, B, C, D etc., ita ut sit

$$(s-A)\times(s-B)\times(s-C)\times(s-D)\times\text{etc.}=0;$$

dico fore

$$y=a\,e^{Ax}+b\,e^{Bx}+c\,e^{Cx}\,d\,e^{Dx}+\text{etc.}$$

ubi litterae a, b, c, d etc. exprimunt quantitates arbitrarias constantes. Demonstratio autem huius solutionis ex praemissis abunde patet.

Iam vero contingere potest ut aliquae aut etiam omnes radices A, B, C, D etc. sint imaginariae, quibus in casibus solutio esset imperfecta. Huic defectui ita occurretur. Sint verbi gratia C et D duae radices imaginariae (nec enim numero impares esse possunt) substituendus erit in aequatione integrali quaesita pro terminis binis

$$c\,e^{Cx}+d\,e^{Dx}$$

talis terminus

$$f e^{\frac{C+D}{2}x} \times \text{S.A.}\left(g + \frac{C-D}{2\sqrt{-1}}x\right)$$

qui semper erit realis, quoties litterae C et D involuunt radices quadratas alicuius quantitatis negativae, atque si plures quam duae sint huiusmodi radices imaginariae, pro singulis binis similis substitutio facienda est. Nondum tamen mihi satis exploratum est, an necessario alterutrum quantitatum genus problemati semper rite satisfaciat, etiamsi radices imaginariae sint altioris gradus. Haec et multa alia, quae nunc praetereo, aliquando paullo maturius examinabo; quae enim nunc scribo fere tumultuaria sunt.

Potest porro accidere, ut duae aut plures radices expraesse per A, B, C, D etc. sint aequales, quod cum fit, cofluunt aliqui termini in aequatione exhibita

$$y = a e^{Ax} + b e^{Bx} + c e^{Cx} + d e^{Dx} + \text{etc.}$$

et sic aliquae arbitrariarum a, b, c, d etc. inutiles fiunt nec amplius aequatio ista totam suam habet extensionem. Huic nunc defectui occurretur multiplicando quantitatem exponentialem communem per

$$a + bx + cxx + \text{etc.}$$

sumendo tot terminos quot sunt radices aequales, idemque cum singulis quantitatibus exponentialibus, quae ita constatae fuerunt ex pluribus aliis, faciendum est. Ita v. gr. huius aequationis

$$y + \frac{4dy}{dx} + \frac{4ddy}{dx^2} = 0,$$

debita aequatio integralis haec est

$$y = (a + bx) e^{-\frac{1}{2}x};$$

atque si proponatur aequatio integranda

$$y + \frac{3dy}{dx} + \frac{3ddy}{dx^2} + \frac{d^3y}{dx^3} = 0,$$

dico fore

$$y = (a + bx + cxx) e^{-x}.$$

Nec plane omittendus est usus huius methodi integrandi indirectae, qui in eo consistit, quod saepe aequationes differentiales sive substitutionibus sive praesertim ulteriori aequationis propositae differentiatione ad classes, quas exposuimus, reduci possint. In illustrationem atque confirmationem huius rei inserviet sequens exemplum. Sit aequatio integranda.

(A) $$8dx^2+2yddy=dy^2+4yydx^2$$

Haec aequatio differentiata (ponimus autem dx constantem) dat

(B) $$d^3y=4dydx^2$$

quae iam est ex classe aequationum, quarum integrationem docuimus; est nempe aequatio eius integralis universalissima talis

(C) $$y=a+be^{2x}+ce^{-2x}$$

Haec vero aequatio (C) adaequata quidem est aequationi (B) sed nimiam habet extensionem ratione aequationis propositae (A) quam utpote secundi ordinis comprehendit ceu aequationem particulariorem; igitur nunc rursus restringenda est aequatio hoc modo integrata (C) ex eademque casus inutiles sunt eliminandi. Id vero fit differentiando duabus vicibus aequationem (C) substituendoque valores y, dy et ddy sic inventos in aequatione proposita (A) tumque faciendo ut isti aequationi recte satisfiat, quod hic efficitur sumendo

$$c=\frac{aa-2}{4b}.$$

Est igitur vera aequatio quaesita talis

$$y=a+be^{2x}+\frac{aa-2}{4b}e^{-2x}$$

Atque similis methodus est adhibenda, quoties aequatio aliqua proposita prius fuit ulterius differentiata, quam ad ipsius aequationem integralem perventum fuerit.

Difficile ergo non admodum est, ut vides, formas huiusmodi aequationum integralium assequi, modo quis cognitam prius habuerit legem, secundum quam differentialia quantitatum, quas consideravimus, progrediuntur. Eiusmodi quantitates alias non minus ad aequationum differentialium altioris gradus integrationem utiles observavi et nullus dubito quin praeter circulum et logarithmicam, aliae adhuc sint curvae, in quibus variae lineae speciali signo denotatae similibus, quum differentiantur, gaudeant proprietatibus, quae novum integrandi fontem suppeditare possint. Vide iam, Vir Celeberrime, an haec cum tuis conveniant. Ego quidem methodos nostras nihil differre coniicio nec ea, quae nova addidi, te minus probarutum esse spero etc.

Extrait d'une lettre de Mr. Daniel Bernoulli à Mr. Garcin, docteur en medecine, sur les elemens d'algèbre de Mr. Clairaut, de l'Academie roïale des sciences de Paris.

Journal Helvétique Janvier 1747 p.57-65
II.4 - S.

Les Elémens d'Algèbre, par Mr. *Clairaut*[1], que vous saves, *Monsieur*, être un des Ornemens de l'*Académie des Sciences de Paris,* viennent enfin de paroitre. Le nom de l'Auteur & les *Elémens de Géometrie,* que nous avons de lui dans le même goût que l'Ouvrage que je vous anonce, l'avoient fait atendre avec impatience. Quoique le Titre de cet Ouvrage ne promette rien de nouveau, on peut dire cependant, que la méthode que l'Auteur a suivie lui done toute la grace de la nouveauté, car il a trouvé le moïen de faire inventer au Lecteur, de lui même pour ainsi dire, les choses qu'il auroit eu bien de la peine à comprendre dans d'autres livres. On avoit grand besoin, sur tout en François, d'un Traité d'Algèbre, qui fut écrit avec méthode, avec clarté, & qui ne fût ni trop difus, ni trop serré. Celui dont je vous parle, a toutes ces qualités, & on en doit avoir d'autant plus d'obligation à son Auteur, que les Géomètres du premier ordre acoutumés aux plus sublimes méditations, ont ordinairement bien de la peine à s'ocuper des Elémens & à travailler pour l'usage des començans; peut être aussi s'imaginent ils faussement qu'il y a moins de gloire à travailler sur les Sciences élémentaires, quelque avantage qu'en puisse retirer le Public, qu'à faire briller sa sagacité par des découvertes plus sublimes, & que sur cette fausse suposition ils n'ont pas assés de générosité pour sacrifier leur amour propre à l'utilité publique. C'est ainsi par exemple, que l'Arithmétique universelle de Mr. *Newton*[2], qui semble devoir être un livre d'Ecole, est bien éloignée d'être à la portée des Ecoliers, puisque ceux qui doivent la leur expliquer ont de la peine à l'entendre eux mêmes, & qu'il paroit que le dessein de Mr. *Newton* ait été jusques dans ces Elémens de se faire admirer plûtôt que de se faire entendre. Mr. *Clairaut* ne se contente pas d'expliquer d'une maniére trés aisée & de répandre beaucoup de jour sur ce que Mr. Newton avoit envelopé d'une grande obscurité, mais il y ajoute encore les Démonstrations, que celui-ci avoit coutume de suprimer.

1 A.Cl. Clairaut «Elémens d'algèbre». Paris 1746.
2 I. Newton «Arithmetica universalis, sive de compositione et resolutione arithmetica liber». Londres 1707.

Enfin, pour vous dire en deux mots mon sentiment du livre de Mr. *Clairaut,* je trouve que cet Ouvrage, quelque élémentaire qu'il soit, ne fait pas moins d'honeur à son Auteur que ses autres productions qui lui ont acquis à juste titre la réputation d'un des plus habiles Geométres de nôtre tems, & je vous avoüe, que je le trouve si fort à mon gout, que je voudrois qu'il fut conu & lû de tout le monde, & que vous me ferés, plaisir, Monsieur, de faire inserer dans le Journal qui s'imprime chés vous, la petite esquisse que je vai vous en tracer, en faisant l'extrait de la Préface, qui n'est autre chose qu'une exposition nette & bien d'étaillée de tout l'Ouvrage, mais qui est un peu trop longue pour trouver place toute entiére dans vôtre Journal. Dans cet extrait je m'ecarterai le moins que je pourai des expressions de l'Auteur.

Mr. *Clairaut* s'est proposé de suivre dans cet Ouvrage la même méthode que dans ses Elémens de Geométrie. Il a taché d'y doner les Règles de l'Algèbre dans un ordre que les Inventeurs eussent pû suivre. Nulle vérité n'y est presentée sous la forme de Theorèmes; toutes semblent être découvertes en s'exerçant sur les Problèmes que le besoin ou la curiosité ont fait entreprendre de résoudre.

Il comence par doner la solution d'un des plus simples Problèmes, telle qu'on la peut trouver sans aucune teinture de l'Algèbre; l'on voit aisément, que lorsqu'on s'eléve à des Problémes qui demandent une plus longue suite de raisonemens, il faut chercher à les écrire d'une maniére fort abregée; il faut imaginer quelques signes à l'aide desquels on puisse exprimer l'état où la dificulté est réduite, à chaque pas qu'on fait pour la résoudre. Cette maniére d'écrire les Questions est l'Algèbre qu'il fait pour ainsi dire inventer au Lecteur. Après avoir proposé & résolu plusieurs Questions numeriques, qui ne diférent les unes des autres que par les nombres donés dans l'énoncé, l'Auteur fait remarquer qu'il y a toujours une partie de l'opération qui se trouve comune dans chaque résolution, & qu'il seroit à souhaiter de ne faire qu'une seule fois. Il saisit cette ocasion d'expliquer la maniére de résoudre genéralement les Problèmes, en emploïant au lieu des Nombres donés par les conditions, des Lettres qui expriment toutes sortes de grandeurs, & il montre ensuite à tirer des solutions générales les solutions particuliéres, au moïen de la substitution des Nombres à la place des Lettres. Parmi les diferens Problèmes où l'Auteur emploïe des Lettres au lieu de Nombres, il s'en trouve qui ne peuvent être résolûs sans emploïer les Règles d'Addition, de Soustraction, de Multiplication & de Division; c'est donc ici qu'il montre la maniére de faire ces Opérations, que l'ordre qu'il s'est proposé n'a pas voulû qu'il enseignat plûtôt.

Come la Multiplication est de toutes ces Opérations celle qui arrête ordinairement le plus les començans, & dont l'explication embarasse le plus les Maitres, par le Principe qu'elle renferme, que deux Quantités négatives donent pour produit une quantité positive, qui paroit fort paradoxe avant que d'être demontré & qui est assés dificile à démontrer d'une manière qui satisfasse ceux qui ne sont pas encore familiarisés avec les Quantités négatives, l'Auteur sans s'arrêter à l'énoncé & à la Démonstration de ce Principe, conduit son Lecteur insensiblement & d'une façon trés ingénieuse à le trouver de lui même & par conséquent à en sentir la vèrité sans aucune Démonstration.

Par ce même artifice, l'Auteur fait découvrir en même tems au Lecteur la nature des solutions négatives des Problèmes & lui aprend cette vérité si utile, que lorsque dans une solution on arrive à trouver l'inconnue négative, elle doit être prise dans un sens oposé à celui suivant lequel on l'avoit emploïée, en exprimant les conditions du Problème.

La prémiére partie ne traite que des Equations du prémier degré & des Opérations qui s'y raportent; come par exemple, de la Règle qu'il faut suivre pour trouver le plus grand comun Diviseur, que l'Auteur explique d'une maniére nouvelle & beaucoup plus avantageuse que l'ordinaire.

Dans la seconde partie il parle des Equations du second degré, en observant toujours la maniére d'aller au devant de tout ce qui, du premier abord, pourroit choquer un començant s'il n'y étoit préparé; à cette ocasion il explique l'extraction des Racines quarées & les opérations sur les quantités radicales, & la maniére de chasser les inconues d'un Probléme, lorsqu'on a plusieurs Equations & autant d'inconues.

En parlant dans la troisiéme partie des proprietés atachées aux Coëficients des Termes d'une Equation d'un degré quelconque, l'Auteur en tire la fameuse Règle de *Descartes,* pour trouver toutes les Racines comensurables qui sont dans une Equation; & come cette méthode engage dans des Calculs excessifs, à cause du grand nombre de Divisions qu'il faut tenter, il done la méthode de Mr. Newton, qui s'etend non seulement aux Racines comensurables ou Diviseurs d'une Dimension, mais aux Diviseurs de tant de Dimensions que l'on veut; il ajoute la Démonstration de cette méthode, que Mr. *Newton* avoit suprimée & fait voir en même tems, par quelle route celui-ci à pû la découvrir.

La quatriéme partie a pour objet les Equations de tous les degrés lorsqu'elles n'ont que deux termes où lorsqu'en aïant trois, elles se réduisent à la méthode des Equations du second degré par une simple transformation. L'Auteur enseigne par ce moïen aux Començans un grand nombre d'opérations sur les quantités radicales de toute espèce, & il leur done une conoissance entiére de l'elévation des puissances & de l'extraction des Racines.

On doit à Mr. *Newton* la Règle pour l'extraction des Racines des Quantités en partie comensurables & en partie incomensurables, mais à son ordinaire, il l'a doné sans Démonstration: L'Auteur traite cette méme Règle come un Problème, de sorte qu'elle est démontrée aussitôt que découverte, outre cet avantage sa méthode en à plusieurs autres par dessus celle de Mr. *Newton.*

Il done encore dans cette quatriéme partie une Démonstration nouvelle de la formule, du *Binome* & il montre les diférentes utilités qu'on peut tirer de cette formule, pour trouver par aproximation toutes sortes de Quantités composées à volonté de radicaux, de fractions, &c. ce qui peut préparer les començans à l'Analise de linfini.

La cinquiéme partie traite des Equations du troisiéme & du quatriéme degré qui ont tous leurs termes, c'est à dire toute la complication qu'elles peuvent avoir. L'Auteur done d'abord la solution générale des Equations du troisiéme degré & fait voir ensuite les Equations particuliéres, où cette solution n'aprend point la valeur de l'inconuë, ce qui forme le cas qu'on apelle irréductible. Dans les Equations, au défaut des Racines exactes, il aprend à en doner par aproximation; il done pour y parvenir une méthode nouvelle beaucoup plus simple que celles qui ont parû jusqu'à présent. Par cette méthode dès la prémiére Opération il a la valeur de la Racine cherchée à un milliéme près, & à la seconde à un millioniéme, & ainsi de suite.

Il passe de là aux Equations du quatriéme degré, & après avoir doné leur Résolution générale il fait voir que cette Résolution, ainsi que celle des Equations du second degré, a cet avantage sur la Résolution des Equations du troisiéme, qu'une seule & même formule peut, à l'aide des signes plus & moins exprimer toutes les Racines de l'Equation. Il démontre aussi ce que tous les Auteurs élémentaires n'ont fait que suposer que les quatre Racines d'une Equation du quatriéme degré, sont toujours ou toutes quatre réelles ou toutes quatre imaginaires, ou deux réelles & deux imaginaires.

Enfin il done encore une maniére bien simple de trouver par aproximation les Racines d'une Equation du quatriéme degré, dans le cas où l'on ne sauroit les trouver exactement, en emploïant celle qu'il avoit donée précédemment pour les Equations du troisiéme degré &c.

Ce *Livre, qui est in 4to, se vend à* Bâle *Chez Mr.* Jean Jaques Bischof.

De summatione serierum quarundam incongrue veris earumque interpretatione et usu auctore Dan. Bernoulli

Novi Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, Bd. XVI p. 12–15. 1771 (1772)
II. 5* - St. 62*

Quamvis Scientiae Mathematicae et principiorum evidentia et conclusionum certitudine, reliquis omnibus palmam praeripiant, fatendum tamen est, multa in iisdem occurrere, quae primo intuitu non solum paradoxa, sed adeo absurda videntur; huiusmodi est summatio serierum recurrentium, quippe quae saepius indicat summam seriei alicuius propositae, magis vel minus a veritate discrepantem, quum tamen ipsa operatio Analytica indicaret summationem allatam pro genuina esse habendam. Sic pro serie simplicissima

$$1-1+1-1+1 \text{ etc.}$$

cuius summa statuitur $=1/2$ facile quidem liquet ubicunque haec series abrumperetur summam allatam semper fore erroneam, ratio autem cur pro vera haberi queat in eo sita est, quod quum series nunquam finiri supponatur, aequalis ratio sit quae urgeat ut eius summa sit 1 et 0, unde summa statuenda est quantitas quae aequaliter distat ab 1 et 0, hoc est $=1/2$, quod etiam operationes Analyticae indicant exgratia si evoluatur fractio

$$\frac{1}{1+x}$$

et post evolutionem ponatur $x=1$. Neque tamen haec summa *proprie* loquendo sive vera seu falsa dici potest; quod non solum pro exemplo allato, ubi series ad summam neque convergit, nec ab ea divergit, sed etiam pro seriebus divergentibus locum habet. Sic summa seriei $1-2+3-4$ etc. invenitur esse $=1/4$, eiusque asserti veritas non solum per operationes Analyticas demonstrari potest, sed etiam inde confirmatur, quod ex hac summa aliarum quantitatum valores deducantur veritati plane congruae. Quum enim per evolutionem formulae

$$\frac{1}{(1+x)^2}$$

oriatur

$$\frac{1}{(1+x)^2}=1-2x+3xx-4x^3+5x^4 \quad \text{etc.,}$$

inde facile deducitur

$$x - \frac{1}{2}xx + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 \quad \text{etc.} = \text{Log.}(1+x),$$

atque si ponatur $x = 1$ inde habetur

$$\text{Log.}\,z = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \qquad \text{etc.},$$

de cuius veritate quum dubitare non liceat, neque diffitendum est, quin summa seriei

$$1-2+3-4+5 \quad \text{etc.} \quad \text{sit} = \frac{1}{4}\cdot$$

Pro seriebus recurrentibus ubi datur certa periodus terminorum, quae continuo recurrit, facile summa assignari potest, si enim in periodo continuo recurrente primus terminus sit a, summa primi et secundi b, summa ter priorum c etc. et numerus terminorum in hac periodo n, erit summa seriei

$$= \frac{a+b+c \text{ etc.}}{n},$$

modo summa cuiusvis periodi integrae sit 0; ratio autem in eo sita est, quod si series circa primum periodi terminum abrumpatur summa sit a, si circa secundum b, circa tertium c etc. igitur quum hi valores pro summa aequo iure gaudeant, summa statuenda erit

$$\frac{a+b+c \text{ etc.}}{n}.$$

Ad huiusmodi series pertinent, qui formantur ex sinubus vel cosinubus arcuum secundum arithmeticam progressionem procedentium, et quum in genere sit:

$$\cos.x + \cos.2x + \cos.3x + \cos.4x + \text{etc.} = -\frac{1}{2}$$

ceu a plurimis Auctoribus demonstratum reperitur, si pro x ponatur $2q$, $4/3q$; q; $2/3q$ etc. designante q angulum rectum, habebuntur series recurrentes diversae, pro quibus summa continuo est $= -1/2$. Singularis autem heic occurrit casus, qui a regula generali differt, si scilicet ponatur $x=4nq$, designante n numerum integrum, tum enim haec series abit in

$$1+1+1+1 \text{ etc.}$$

cuius summa certe nullo sensu statui potest$=-1/2$. Pro sinuum progressione sequens habetur formula:

$$\text{Sin.}\,x+\text{Sin.}\,2x+\text{Sin.}\,3x+\text{Sin.}\,4x+\text{etc.}=\frac{\text{Sin.}\,x}{2(1-\cos.x)},$$

cuius aequationis veritas, quamvis ab Illustr. huius dissertationis Auctore iam egregiae stabilita sit, tamen eandem facillimo hoc ratiocinio illustrare non pigebit; ponatur

$$\text{Sin.}\,x+\text{Sin.}\,2x+\text{Sin.}\,3x+\text{Sin.}\,4x+\text{etc.}=S,$$

mutiplicetur tota aequatio per $\cos.x$ et fiet

$$\text{Sin.}\,x+2\,\text{Sin.}\,2x+2\,\text{Sin.}\,3x+2\,\text{Sin.}\,4x+\text{etc.}=2S\cos.x$$

ideoque

$$\text{Sin.}\,x=2S(1-\cos.\text{x}).$$

Licet ea quae in hac Dissertatione ab Illustr. *Bernoullio* allata sunt, multis in casibus iis dubiis quae circa summationes serierum oriuntur, diluendis sufficere queant; tamen alii atque alii dantur casus, quibus explicationes ab Ipso allatae minus satisfacere videntur, quamobrem non diffitemur nobis magis placere eam explicationem, quam Illustr. *Eulerus* in Institutionibus Calculi Differentialis Cap. III. §. 110.[1] adfert, quippe qua omnibus dubiis plane satisfieri posse existimamus.

1 L. Euler E212 Omnia serie I vol. 10 p. 81.

De summationibus serierum quarundam incongrue veris earumque interpretatione atque usu.

Novi Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae. Bd. XVI p. 71–90. 1771 (1772)
II.5 - St.62

§. 1. Seriebus potissimum recurrentibus hoc commune est, ut in infinitum continuatae aliquando summam indicent manifeste falsam *in concreto*, nec tamen absurdam *in abstracto*: sola quippe summa, quam analysis docet, sufficiente quadam ratione suffulta est, quae efficit, ut sic nec aliter determinetur, haec ratio sufficiens, cum in vera quaestionis natura posita sit, non finit solutionem esse falsam in abstracto; hinc fit ut si diversos solutionis modos adhibeamus, in eundem usque valorem constantissime incidamus; imo si solutione paradoxa utamur ceu termino medio ad alias quantitates inde determinandas, nulli amphiboliae subiectas, determinatio obtinetur manifeste vera non secus ac quantitates reales deducuntur ex quantitatibus imaginariis.

§. 2. Proponatur, exempli gratia, simplicissima series iam olim agitata

$$1-1+1-1+1-\text{ etc.}$$

cuius summa dicitur $=1/2$. Vera atque sufficiens huius determinationis ratio in hoc posita est, quod summa sit vel $=1$ vel $=0$ prouti numerus terminorum fuerit sive impar sive par; sed quia series nusquam finitur, utraque summa aequali utique iure gaudet; nulla militat ratio pro numero terminorum pari potius quam impari; ergo summa statuenda est, quae aequaliter distat ab 1 et ab nihilo, id est, $=1/2$. Iam vero hanc summam, ex primo artis coniectandi lemmate deductam, aliis modis confirmemus.

Si quantitas

$$\frac{1}{1+x}$$

in seriem convertatur per divisionem infinitam, fiet

$$1-x+xx-x^3+x^4-\text{etc.}=\frac{1}{1+x}\cdot$$

Sumatur $x=1$ et habebitur iterum

$$1-1+1-1-\text{etc.}=\frac{1}{2}\cdot$$

Eandem nos docet summam theorema illud, quo demonstratur pro quovis angulo x, quod sit

$$\cos.x+\cos.2x+\cos.3x+\cos.4x+\cos.5x+\text{etc.}=-\frac{1}{2};$$

si enim sumatur angulus x aequalis duobus rectis, orietur

$$-1+1-1+1-1+\text{etc.}=-\frac{1}{2}$$

atque proinde

$$1-1+1-1+1-\text{etc.}=\frac{1}{2}\cdot$$

Insuper ponatur

$$1-1+1-1+1-\text{etc.}=S;$$

subtrahatur primus terminus et erit

$$-1+1-1+1-\text{etc.}=S-1$$

sive conversis signis

$$1-1+1-1+\text{etc.}=-S+1;$$

quia vero haec ultima series eadem est cum ea quae proposita est, habebitur

$$-S+1=S$$

unde $S=1/2$. Hic equidem opponi potest, seriem emersam non eandem esse cum proposita, quandoquidem vi constructionis altera alteram uno termino superat; sed quia terminus in serie emersa deficiens aequo iure est vel $+1$ vel -1, adhibendus est medius inter utrumque adeoque statuendus $=0$. Ergo differentia inter utramque seriem $=0$ sicque omne oppositonis momentum evertitur.

Denique notetur quod pro quovis terminorum numero n sit summa seriei propositae

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(-1)^n$$

et quod, ob rationem modo dictam, pro casu $n=\infty$, sit

$$-\frac{1}{2}(-1)^n \quad \text{vel} \quad =\frac{1}{2} \quad \text{vel} \quad =-\frac{1}{2},$$

inter quos ambos valores, cum medius iterum evanescit, summa seriei propositae simpliciter statuenda erit $=1/2$.

§. 3. Apparet ergo, quod omnes et singuli modi, quibus ad summan quaesitam pervenitur, eodem constantissime recidant simulque intelligimus omnem alium valorem, praeter summam inventam, contradictionem involvere ideo, quod si summa dicatur $\frac{1}{2}+a$, eadem sit ratio ut statuatur $=\frac{1}{2}-a$; igitur, ut contradictio evitetur, oportet ut sit $a=0$ atque adeo summa seriei propositae $=1/2$. Attamen series nullo modo ad hanc summam convergit, nec unquam fieri potest, ut cum illa congruat. Summa *proprie* nec vera est nec falsa; prius per se manifestum, posterius liquet ex eo, quod ex falso verum nunquam legitime deduci possit; id vero fieri posse videbimus in sequentibus.

§. 4. Sed et series divergentes, quarum termini alternant in signis, similem agnoscunt legem; proponatur, exempli gratia, series

$$1-2+3-4+5-\text{etc.}$$

dico summam eius esse $=1/4$; hoc autem affertum pluribus iterum modis demonstratur, qui omnes egregie inter se conspirant, utcunque proprio sensu falsum sit.

Primo. Consideretur series tanquam recurrens secundi ordinis, cuius scilicet indices sunt -2 et -1, ita ut quivis terminus compositus sit ex duplo praecedenti negative sumto et ex antepraecedente pariter negative sumto; huius seriei, si termini cuiusvis index dicatur n, terminus generalis est $-n(-1)^n$. Sequitur etiam ex theoria serierum recurrentium, pro quovis terminorum numero n, esse summam omnium terminorum generaliter

$$=-\frac{1}{2}n(-1)^n-\frac{1}{4}(-1)^n+\frac{1}{4};$$

iam vero, cum numerus terminorum est infinitus, aequum ius competit in numerum parem et imparem:

in priori casu sit summa $\quad =-\frac{1}{2}n,$

in posteriori $\quad =\frac{1}{2}n+\frac{1}{2};$

ergo valor medius inter utramque summam $=\frac{1}{4}$,

cui utique summa seriei propositae infinitae, secundum regulam fundamentalem probabilitatum, censenda est aequalis. Haec ad mentem interpretationis nostrae: videamus an idem valor ex aliis principiis oriatur.

Secundo. Consideretur series proposita sub forma generaliori

$$1-2x+3xx-4x^3+5x^4-\text{etc.}$$

notum autem est summam huius seriei infinitae esse

$$=\frac{1}{(1+x)^2},$$

quicunque fuerit valor x; ponatur nunc $x=1$ et habebitur series proposita

$$1-2+3-4+5-\text{etc.}=\frac{1}{4}\cdot$$

Tertio. Ponatur

$$1-2+3-4+5-\text{etc.}=S;$$

subtrahatur aequatio

$$1-1+1-1+1-\text{etc.}=\frac{1}{2}$$

paragrapho secundo demonstrata et habebitur

$$0-1+2-3+4-\text{etc.}=S-\frac{1}{2}\cdot$$

Conversis signis neglectoque primo termino, nihilo aequali, fit

$$1-2+3-4+\text{etc.}=-S+\frac{1}{2};$$

haec ultima vero series nihil differt a serie proposita, cuius summam ponimus $=S$; erit itaque $S=-S+1/2$ sive $S=1/4$. Alias huiuscemodi sive solutiones sive demonstrationes quisque sibi haud difficulter formabit. Dico autem non posse non esse concordantes cum nostris etiamsi assertum in *concreto* manifeste falsum fuerit. Scio interim quid ubique oblici possit, imo obiectionibus assentior; at hoc ipsum est, quo tendo. Verane sunt allata an falsa? utrumque aequo affirmabitur iure; secabo nodum subsidiario vocabulo utcunque hybrido *incongruenter vera*. Caeterum me non monente per se patet formari posse huiuscemodi series innumeras altiorum generum quas signorum alternatio summabiles reddat. Sufficient autem allata exempla simpliciora pro instituto nostro.

§. 5. In praecedente paragrapho, articulo secundo, consideravi sub forma generaliori aequationem

$$1-2x+3xx-4x^3+5x^4-\text{etc.}=\frac{1}{(1+x)^2}$$

pro quocunque numero x. In quemcunque nunc censum referatur haec aequatio, pro casu $x=1$, certum est legitimo inde modo deduci posse valores, ab omni dubio liberos; scilicet multiplicetur aequatio per dx, considerando x tanquam quantitatem variabilem, posteaque integretur aequatio cum additione debitae constantis; hoc modo pervenitur ad hanc aliam aequationem

$$x-xx+x^3-x^4+x^5-\text{etc.}=\frac{x}{1+x},$$

quae cum nondum clara sit in casu $x=1$, poterit ulterius deprimi, si multiplicetur per dx/x, quo facto obtinebitur

$$dx-x\,dx+xx\,dx-x^3\,dx+x^4\,dx-\text{etc.}=\frac{dx}{1+x},$$

cuius integralis dat

$$x-\frac{1}{2}xx+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{5}x^5-\text{etc.}=\log.1+x.$$

Iam vero ista aequatio nulli porro controversiae subiecta est cum sumitur $x=1$; ergo etiam antecedentes aequationes, ex quibus legitime deducta fuit postrema, peculiari suo iure veris erunt annumerandae.

§. 6. In prima nostra serie simplicissima

(A) $$1-1+1-1+1-\text{etc.}$$

quaevis periodus ex duobus saltem terminis constat, post quos series eadem resurgit; consideremus iam series periodicas trium terminorum, atque constanter tales ut summa terminorum pro quavis periodo sit$=0$, ad quam classem pertinent series sinuum aut cosinuum, quorum anguli formant progressionem arithmeticam. Sit, verbi gratia, series infinita

$$1-1+0+1-1+0+1-\text{etc.} \tag{B}$$

cuius scilicet quaevis periodus constat ex tribus terminis 1, -1 et 0; haec series recurrens formatur si summa duorum quorumvis terminorum, se invicem subsequentium sumatur sub signo contrario pro termino proxime sequente habetque, pro quocunque indice n, terminum generalem

$$\frac{1}{\sqrt{-3}}\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^n-\frac{1}{\sqrt{-3}}\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)^n.$$

Pertinet quoque haec series ad seriem sinuum: sumatur nempe

$$\sin.120^\circ+\sin.2.120^\circ+\sin.3.120^\circ+\sin.4.120^\circ+\text{etc.}$$

atque singuli termini multiplicentur per $2/\sqrt{3}$ atque sic formabitur rursus series proposita (B). Quaeritur nunc summa huius seriei (B): an summa eadem erit quae in serie (A), ideo quod singuli termini superabundantes in serie (B) sint nihilo aequales? minime erit eadem; vera enim aestimatio sic est formanda.

Cum numerus periodorum nihil ad summam faciat, omne quaestionis momentum in hoc consistet an series in eadem periodo abrumpatur vel a primo, vel a secundo vel a tertio periodi termino; in primo casu fit summa seriei (B)$=1$; in duobus posterioribus fit$=0$; quoniam autem singuli casus, si series infinita censeatur, aequo inter se gaudent iure, ponenda erit summa$=1/3$ ad normam regulae fundamentalis in aestimanda sorte, mutato autem solo ordine trium terminorum cuiusvis periodi, alia oritur summa; sic si, verbi gratia, formetur series

$$1+0-1+1+0-1+1+0-\text{etc.} \tag{C}$$

habebimus duos casus pro summa 1 et unum casum pro 0; unde nunc summa facienda est$=2/3$.

§. 7. Undecunque principium nostrum contemplemur, mirificum manifestat consensum. Addantur series (A) cuius summam invenimus$=1/2$ et series (B)$=1/3$, oportet ut summa ab additione oriatur$=5/6$. Nempe oritur:

$$
\begin{array}{rl}
\text{(A)} & 1-1+1-1+1-1+1-1+1-\text{etc.}=\dfrac{1}{2} \\
\text{(B)} & 1-1+0+1-1+0+1-1+0+\text{etc.}=\dfrac{1}{3} \\
\hline
\text{(A)+(B)} & 2-2+1+0+0-1+2-2+1+\text{etc.}=\dfrac{5}{6}\cdot
\end{array}
$$

Notetur nunc aggregatum ex utraque serie novam formare seriem recurrentem, in qua quaevis periodus constat ex sex terminis, post quos constanter eadem resurgit. Iam vero si series in primo periodi termino terminari censeatur, erit summa $=2$; si in secundo sit summa $=0$; si in tertio, erit summa $=1$ eademque erit summa si in quarto vel in quinto termino series terminetur atque tandem summa erit $=0$, si in ultimo periodi termino series abrupta putetur; sunt igitur duo casus, quibus summa fit $=0$; dein tres casus, quibus fit $=1$ et unus casus, qui summam facit $=2$; hinc docemur, ex lege probabilitatum, summam seriei

$$2-2+1+0+0-1+2-2+1+\text{etc.}$$

statuendam esse $=5/6$ plane ut providebatur.

Simili modo, si series (B) ab serie (A) subtrahatur, series nova sexti ordinis oritur, cuius singulae periodi constant ex terminis

$$0-0+1-2+2-1$$

et cuius summa providetur $=1/6$. Revera summa est vel 0 vel 0 vel 1 vel -1 vel 0, prouti series vel in primo, vel in secundo, tertio, quarto, quinto vel sexto periodi termino abrumpi censeatur; igitur in tribus casibus fit summa seriei $=0$, in duobus fit summa $=1$ et in unico casu $=-1$; ergo valor summae *in abstracto* statuendus $=1/6$.

Si lubeat insuper combinationem instituere inter series (A), (B) et (C), qualiscunque illa fuerit, nova inde proveniens series summam habebit principio nostro exacte conformem. Id quidem principium iam ante hos quadraginta annos, cum in contemplandis seriebus recurrentibus me occuparem, perspexeram, nunc autem in lucem ponere volui, ut inde genuina huiusmodi summationum interpretatio pateret, sine qua facile nubes pro Iunone accipi posset. Si concipiamus punctum aliquod fixum in linea recta et singulas summas possibiles repraesentemus per distantiam puncti a praefato puncto fixo, principium nostrum exhibet distantiam centri gravitatis, quae omnibus istis distantiis convenit. Quotcunque interim termini sibi invicem addantur, summae reales nunquam convergunt versus determinatum centrum gravitatis, sed potius circa illud a puncto ad punctum transiliunt; igitur huiusmodi series hoc nomine inutiles fiunt ad problemata physico-mechanica approprinquatione solvenda, nisi summa uniuscuiusvis periodi diminuatur, id quod mediante ipsa serie primitiva infinita, etiamsi *incongruenter vera*, saepe fieri potest, uti in antecessum monui §. 5; ubi dixi quod posito $x=1$ aequatio

$$1-2x+3xx-4x^3+5x^4-\text{etc.}=\frac{1}{(1+x)^2}$$

equidem sit incongrue vera, sed quod tamen legitimo modo inde deducatur aequatio nulli dubio subiecta

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\text{etc.}=\log.2\,.$$

Mihi quidem principium, de quo fermo est, antequam ullum ulterius examen de illo instituerem fuit per se calrum, simul autem intelligo alios aliter sentire posse; quoniam autem demonstrationem directam principii non video, multiplici inductione argumentum stabiliendum esse censui.

§. 8. Quod ad unam quamvis seriei periodum attinet, potest illa ex quotcunque imo innumeris composita esse terminis; fuerit primus periodi terminus a, summa ex duobus primis terminis b, summa ex tribus primis terminis c et sic porro donec periodus integra fuerit exhausta, sitque n numerus terminorum quamvis periodum formantium, principium nostrum dabit summam seriei recurrentis infinitae

$$=\frac{a+b+c+\text{etc.}}{n},$$

si modo summa cuiusvis periodi integrae ponatur $=0$ et quacunque methodo alia, series summata fuerit, nunquam summa ab isto valore differet, etiamsi summa non aliter quam incongrue vera sit nec ullam admittat series appropinquationem quantuscunque terminorum numerus aggregetur. Haec ideo notari merentur, quod omnes series sinuum atque consinuum, quorum anguli arithmeticam formant progressionem, perfecte pertineant ad series recurrentes de quibus hic sermonem facio; etsi enim in serie generaliter expressa nulla appareat periodus, apparebit tamen in quovis casu peculiari; imo simplicissima series sinuum aut cosinuum, omnes ordines in se comprehendit pro ratione, quam primus angulus habet ad quatuor rectos, sive semel sive quotiescunque sumtos.

§. 9. Si sumatur in circulo, unitatem pro radio habente arcus qualiscunque x, animadvertit Illustris de la Grange, quod sit series infinita

$$\cos. x + \cos. 2x + \cos. 3x + \cos. 4x + \cos. 5x + \text{etc.} = -\frac{1}{2}$$

sive aequalis cos. 60°. negative sumto. Hoc theorema inter incongrue vera pono, nec aliter interpretandum est, quam quod valor seriei medius sit inter omnes cuiusvis periodi valores reales possibiles. Iam vero apparet solam hanc seriem in se comprehendere omnes ordines serierum recurrentium; nam si quadrans circuli sive angulus rectus dicatur q et ponatur successive

$$x=2q; \qquad x=\frac{4}{3}q; \qquad x=q; \qquad x=\frac{2}{3}q \quad \text{etc.}$$

obtinebimus series recurrentes, quae sequuntur pro ordine secundo, tertio, quarto, sexto

$$-1+1)-1+1-1+1+\text{etc.}$$

$$-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1)-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1-\text{etc.}$$

$$0-1-0+1)+0-1-0+1+0-1-\text{etc.}$$

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1)+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}-\text{etc.}$$

Summa singularum harum serierum, pro regula §. 8. semper dabit valorem $-1/2$ plane ut indicat ipsum theorema generale. Sic ultima series pro sexto ordine summam habet

$$\frac{\frac{1}{2}+0-1-\frac{3}{2}-1+0}{6}=-\frac{1}{2};$$

unde intelligimus, quemadmodum huiusmodi theoremata sint interpretanda et qualis inde usus in solvendis problematis sperari possit; nihil unquam statuendum, quod cum vera infiniti idea consistere nequeat.

§. 10. Si ex duabus pluribusve seriebus recurrentibus, additione terminorum analogorum, nova formetur series haec quoque recurrens erit, ut vidimus §. 7. Index autem ordinis pro nova serie semper erit minimus communis dividuus omnium indicum, qui conveniunt ordinibus serierum ex quibus nova formata fuit. Sic aggregatum quatuor serierum numericarum in praecedente paragrapho expositarum et ad ordinem secundum, tertium, quartum et sextum pertinentium, seriem formabit recurrentem de ordine duodecimo, cuius summa, si in infinitum continuetur, necessario erit $= -2$. Id vero sequens confirmabit schema

$$-\ 1 + 1) - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \text{etc.} = -\frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1) - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 - \text{etc.} = -\frac{1}{2}$$

$$0 - 1 - 0 + 1) + 0 - 1 - 0 + 1 + 0 - 1 - 0 + 1 + 0 - 1 - 0 + \text{etc.} = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - 1 - \text{etc.} = -\frac{1}{2}$$

summa

$$(-1 - 1 - 1 + 1 - 1 + 2 - 1 + 1 - 1 - 1 - 1 + 4) - 1 - 1 - 1 + \text{etc.} = -2.$$

Quaeratur nunc ad normam paragraphi octavi summa seriei ultimae in infinitum continuatae et erit haec summa

$$= \frac{-1-2-3-2-3-1-2-1-2-3-4+0}{12} = -2.$$

Scilicet inter duodecim casus aeque faciles unus est, qui summam dat $= 0$; tres casus quibus summa obtinetur -1; quatuor quibus summa fit -2, tres quibus -3 et unus quo summa prodit -4; ergo regula probabilitatum exigit ut statuatur summa $= -2$ nec usquam principium fallit.

§. 11. Elegantissimum utique theorema est, cuius mentionem feci ab initio paragraphi noni; mirum nempe est, quod qualiscunque fuerit arcus x, summa omnium cosinuum in infinitum, constanter eadem prodeat. Incipiatur series ab arculo utcunque parvo vel utcunque magno; imo excedat primus arcus x integram circuli peripheriam, non fallet theorema, quod summam facit $= -1/2$. Tanto minus reticendos esse puto casus solitarios, quibus assumitur $x = 4nq$ intelligendo per n numerum integrum qualemcunque, non excepta nullitate. In his nimirum casibus nascitur ex theoremate series unitatum

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \text{etc.}$$

de qua non apparet, quod ullo sensu dici possit $= -1/2$, cum sit aperte infinita nullique dubio incertaeve interpretationi submissa. Ergo hi casus revera a regula generali erunt excipiendi, an vero theorema, quod calculus universaliter verum indicat, in aliquibus casibus falsum esse poterit? imo poterit, si casus isti eius sint indolis ac hic sunt. Paradoxum sic explico.

Notetur quod, si ponatur $x=4nq+a$, theorema totam suam vim retineat, utcunque parva fuerit quantitas a, sola enim nullitas eius absoluta excludenda est, quia scilicet in theoremate series consideratur non *relative* sed *absolute* infinita. Dico igitur non dari arculum a, qui ullam falsitatis suspicionem movere possit; quicquid existit, si absolute infinities replicari ponatur, in infinitum transire potest. Ergo in arcu x non excluduntur arculi; excluduntur saltem puncta vere mathematica, quorum existentiam et positionem analysis abstracta indicare nequit. Sic methodus tangentium indicare non potest puncta regressuum (points de rebroussement) si quae sint in curva proposita, nec tamen propterea methodus tangentium infringitur aut ullius falsitatis argui potest. Sic igitur theorema, de quo agimus, valet de omni magnitudine arcus assumti x, a nihilo usque ad finem integrae primae revolutionis, ab initio secundae revolutionis usque ad finem, et sic de revolutione quavis quoties libuerit repetita; excipiuntur saltem puncta vere mathematica cuiusvis transitionis una cum ipso puncto initiali.

§. 12. Praemissam urgere explicationem volui, quia series infinitae sinuum atque cosinuum egregie illustrant abstrusissimum aeque ac utilissimum argumentum de minimis chordarum vibrationibus. Disputatum diu est inter primos huius saeculi mathematicos, an singula chordae puncta ad quamcunque ab axe distantiam minimam deduci possint, ut vibrationes suas forment regulares, mihi autem nunc videtur id affirmari non posse, nisi per vibrationes minimas intelligantur vibrationes vere nullae; equidem et tunc ratio qualiscunque inter singulas applicatas concipi potest; revera autem curvatura qualiscunque quaeritur in linea perfecte recta et motus vibratorius in quiete absoluta. Verum haec discussio nimis adhuc a proposito nostro remota est, quam ut illi in praesentia rerum insistam. Notetur autem dari progressiones sinuum atque cosinuum innumeras, si diversae coefficientes terminis seriei praefigantur, quarum aliae praefato incommodo subiectae sint aliae non sint. Caeterum theoremati, quod de progressione cosinuum infinita allegatum fuit, mutatis mutandis simile inquiram de progressione sinuum, ideo quod maxime ad praesens institutum nostrum pertinet nec meminerim an ab aliis iam expositum fuerit, imo fortasse a me ipsomet.

§. 13. Proponatur ergo indaganda series infinita

$$\sin.x+\sin.2x+\sin.3x+\sin.4x+\text{etc.}$$

Dico summam huius seriei statuendam esse[1]

$$=\frac{\frac{1}{2}\sin.x}{\sin.\text{vers}.x}.$$

1 $\sin.\text{vers}.x=1-\cos.x$.

En demonstrationis summarium.

Pertinet series proposita ad series recurrentes secundi ordinis, cuius ambo indices sunt $2\cos.x$ et -1, sic ut quivis terminus sit aequalis termino praecedenti multiplicato per $2\cos.x$ demto termino antepraecedente. Igitur, secundum theoriam serierum recurrentium, formanda est aequatio secundi ordinis

$$ss = 2s\cos.x - 1,$$

cuius ambae radices sunt[2]

$$s = \cos.x + \sqrt{(\square\cos.x - 1)} \quad \text{et} \quad s = \cos.x - \sqrt{(\square\cos.x - 1)}$$

sive paullo contractius

$$s = \cos.x + \sin.x\sqrt{-1} \quad \text{et} \quad s = \cos.x - \sin.x\sqrt{-1}\,.$$

Sic nunc, posito indice termini $=n$, in antecessum innotescit fore terminum generalem in serie proposita

$$= \alpha\,(\cos.x + \sin.x\sqrt{-1}\,)^n + \beta\,(\cos.x - \sin.x\sqrt{-1}\,)^n,$$

ubi coefficientes α et β ex cognitis duobus primis seriei propositae terminis sunt determinandae vel compendiosius ex primo et ex eo qui primum praecederet quique foret $=0$; hoc modo invenitur

$$\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{-1} \quad \text{et} \quad \beta = -\frac{1}{2}\sqrt{-1}\,,$$

ipseque tandem terminus generalis

$$\frac{(\cos.x + \sin.x\sqrt{-1}\,)^n - (\cos.x - \sin.x\sqrt{-1}\,)^n}{2\sqrt{-1}}\,.$$

Hoc modo intelligitur, seriem propositam aggregatam esse ex duabus seriebus geometricis, quae summationem admittunt. Notetur autem hanc ipsam summationem pertinere ad theoremata *incongruenter vera*. Sit igitur n numerus absolute infinitus, erit summa seriei geometricae, termino generali

$$(\cos.x + \sin.x\sqrt{-1}\,)^n$$

2 $\square\cos.x = \cos.^2 x$.

expressae,

$$= \frac{(\cos.x+\sin.x\sqrt{-1})}{1-(\cos.x+\sin.x\sqrt{-1})}$$

pariterque summa seriei geometricae, termino generali

$$(\cos.x-\sin.x\sqrt{-1})^n$$

expressae,

$$\frac{(\cos.x-\sin.x\sqrt{-1})}{1-(\cos.x-\sin.x\sqrt{-1})}.$$

Exinde sequitur, esse summam quaesitam seriei propositae infinitae

$$= \left[\frac{(\cos.x+\sin.x\sqrt{-1})}{1-(\cos.x+\sin.x\sqrt{-1})} - \frac{(\cos.x-\sin.x\sqrt{-1})}{1-(\cos.x-\sin.x\sqrt{-1})}\right] 2\sqrt{-1},$$

quae, si recte reducta fuerit, abit in simplicem formulam

$$\frac{\sin.x}{2-2\cos.x} \quad \text{sive} \quad \frac{\frac{1}{2}\sin.x}{\sin.\text{vers}.x}.$$

Q.E.I.

§. 14. Patet ex praemissa solutione, series sinuum atque cosinuum proprie pertinere ad secundum ordinem recurrentium, quia quivis terminus ex duobus praecedentibus formatur. Sed quod iam monui, numerus terminorum, post quos series numerica eadem recurrit, unice pendet a ratione quae intercedit inter arcum assumptum x et peripheriam circuli quod si ista ratio sit incommensurabilis, infiniti requiruntur termini pro unica formanda periodo, simulque infinitae periodi supponi debent, ut valor seriei, quem modo determinavimus, locum habere possit. Licebit autem ordinem cuiusvis seriei numericae etiam determinare ex numero terminorum unamquamvis periodum componentium. Ex istis notationibus facile erit mente concipere solutionem casus singularis, qui contradictionem manifestam atque maxime absurdam involvere prima fronte videtur.

§. 15. Ponamus $x=0$; sic erit

$$\sin.x+\sin.2x+\sin.3x+\sin.4x+\sin.5x+\text{etc.}=0,$$

quia quivis terminus est $=0$: valor autem seriei, quem invenimus §. 13.

$$\frac{\frac{1}{2}\sin.x}{\sin.\mathrm{vers}.x}$$

est infinitus. An quid absurdius, dicent aliqui, excogitari potest, quam ut eadem res simul sit nihilo aequalis simulque omni quantitate positiva assignabili maior? similem casum iam supra exposui. §. 11. Responsio iterum in eo consistit, ut distinguamus inter vere nihilum idemque absolutum et inter primum quantitatis nascentis elementum. In theoria nostra nihilum absolutum excluditur, quia non possunt tunc statui periodi infinitae numero, cum nec prima periodus usquam terminari possit, ne quidem cogitatione; aliter vero se res habet, quamprimum nascens aliquod quantitatis elementum, etiamsi omni quantitate assignabili minus, arculo x inesse putamus, sic enim subito valor seriei a vero nihilo ad vere infinitum transilit. Dein crescente x statim enormiter decrescit series sinuum haecque plane evanescit cum sumitur $x=2q$: tum vero crescente adhucdum arcu x, fit summa seriei negativa, tandemque, facto $x=4q$, summa seriei prodit negative infinita. Superato hoc puncto series ab infinito negativo ad infinitum affirmativum transilit variationesque eaedem perfecte recurrunt ac repetuntur in infinitum haec omnia ulteriori commentatione non indigna forent; dabitur fortasse occasio ut argumentum resumam. Nunc quidem non aliud constitui, quam ut veram summationum omnino insolitarum atque incongruarum interpretationem darem una cum usu quem permittunt simulque ostenderem perpetuum consensum inter summam, analytice pro serie infinita determinatam et inter summam mediam unicuiusvis periodi divisam per numerum terminorum quamvis periodum formantium (conf. §. 8.) Igitur superest ut consensum etiam ostendam aliquibus exemplis in serie sinuum §. 13. generaliter summata.

§. 16. Invenimus nempe generaliter

$$\sin.x+\sin.2x+\sin.3x+\sin.4x+\sin.5x+\text{etc.}=\frac{\frac{1}{2}\sin.x}{\sin.\mathrm{vers}.x}$$

ponatur $x=\frac{4}{3}q$ sive $120°$.
prodit series

$$\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{1}{2}\sqrt{3}+0)+\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{1}{2}\sqrt{3}+\text{etc.}=\frac{1}{6}\sqrt{3}\,;$$

hic periodus quaevis constat ex tribus terminis

$$\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{1}{2}\sqrt{3}+0$$

atque regula nostra paragraphi octavi indicat eandem summam

$$=\frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}+0+0}{3}=\frac{1}{6}\sqrt{3}.$$

Sumatur porro $x=\frac{1}{2}q$ sive $45°$.
atque obtinebitur series

$$\sqrt{\frac{1}{2}}+1+\sqrt{\frac{1}{2}}+0-\sqrt{\frac{1}{2}}-1-\sqrt{\frac{1}{2}}-0)+\sqrt{\frac{1}{2}}+1+\text{etc.}=\frac{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}{1-\sqrt{\frac{1}{2}}}.$$

Hic quaevis periodus constat ex octo prioribus terminis, quae ad legem nostram §. 8. facit summam seriei

$$=\frac{\sqrt{\frac{1}{2}}+\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)+\left(1+2\sqrt{\frac{1}{2}}\right)+\left(1+2\sqrt{\frac{1}{2}}\right)+\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)+\sqrt{\frac{1}{2}}+0+0}{8}$$

$$=\frac{8\sqrt{\frac{1}{2}}+4}{8}=\sqrt{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}=\frac{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}{1-\sqrt{\frac{1}{2}}}.$$

Quando minus concinna est expressio sinuum in quavis periodo occurentium, in usum vocare licebit tabulas sinuum, quam operationem unico illustrabo exemplo

Fuerit $x=\frac{4}{9}q$ sive $=40°$.

Erit, ad legem §. 13, summa seriei sive

$$\frac{\frac{1}{2}\sin.x}{\sin.\text{vers}\,x}=\frac{0.3213938}{0.2339556}=1.37373.$$

Iste vero idem valor obtinebitur vi regulae paragrapho octavo expositae, si ex tabulis sinuum excerpantur successive sinus 40°. 80°. 120°. 160°. 200°. 240°. 280°. 320° et 360°. qui nempe sinus efformant terminos uniuscuiusvis periodi; quod si deinde successive sumatur sinus primus, summa ex duobus sinubus primis, summa ex tribus sinubus primis et sic porro donec omnes fuerint exhausti atque hae omnes summae sibi invicem addantur idque aggregatum dividatur per numerum sinuum primitivorum, reperitur

$$\frac{0.64278+1.62758+2.49360+2.83562+2.49360+1.62758+0.64278+0+0}{9}$$

$$=\frac{12.36354}{9}=1.37373.$$

qui valor rursus idem est cum praecedente. Mirabilis profecto est iste consensus ideo potissimum, quod ambae methodi nihil commune inter se habere prima fronte videantur: mihi saltem etiamnum mirabilis est quamvis iam diutissime detecta.

De indole singulari serierum infinitarum, quas sinus vel cosinus angulorum arithmetice progredientium formant, earumque summatione et usu. Auctore Daniele Bernoulli

Novi Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae. Bd. XVII p. 5–6 1771 (1773)
II. 6* - St. 64*

In dissertatione, praecedenti horum Commentariorum Tomo inserta[1], Celeb. Auctor duas series quam maxime notatu dignas ex ordine serierum recurrentium, earumque genuinam summationem et interpretationem meditationi suae subiecit, quae ita sese habebant:

Si in circulo, cuius radius $= 1$, sit arcus quicunque $= x$; erit

$$\cos.x + \cos.2x + \cos.3x + \cos.4x + \text{etc.} = -\frac{1}{2}$$

et[2]

$$\sin.x + \sin.2x + \sin.3x + \sin.4x + \text{etc.} = \frac{\sin.x}{2\sin.\text{vers}.x}$$

quas quidem summas non nisi singulari atque incongruo quasi modo veras dici posse, a Cel. Viro est ostensum. Hoc tamen non obstante ex his duabus seriebus quasi ambiguis facili et legitima methodo aliae memoratu non minus dignae nullique prorsus amphiboliae subiectae possunt derivari, quarum investigatio huius, quam nunc tradimus, dissertationis argumentum constituit; et quarum aliquas operae pretium est hic succincte exposuisse:

Si ponatur quadrans circuli $= q$; erit

$$\text{I)}\quad \sin.x + \frac{1}{2}\sin.2x + \frac{1}{3}\sin.3x + \frac{1}{4}\sin.4x + \text{etc.} = q - \frac{1}{2}x$$

$$\text{II)}\quad \cos.x + \frac{1}{4}\cos.2x + \frac{1}{9}\cos.3x + \frac{1}{16}\cos.4x + \text{etc.} = \frac{2}{3}qq - qx + \frac{1}{4}x^2.$$

$$\text{III)}\quad \sin.x + \frac{1}{8}\sin.2x + \frac{1}{27}\sin.3x + \frac{1}{64}\sin.4x + \text{etc.} = \frac{2}{3}qqx - \frac{1}{2}qx^2 + \frac{1}{12}x^2$$

$$\text{IV)}\quad \cos.x + \frac{1}{2}\cos.2x + \frac{1}{3}\cos.3x + \frac{1}{4}\cos.4x + \text{etc.} = \frac{1}{2}\log.\frac{1}{2\sin.\text{vers}.x}$$

1 Cf. II.5 - St.62 p.101 h.v.
2 $\sin.\text{vers}.x = 1 - \cos.x$.

quae series non solum sunt novae, sed ideo etiam memorabiles, quod summa sinuum vel cosinuum definiatur per arcum circuli.

His seriebus plures analogas Cel. Auctor investigat; totiusque huius theoriae usum exponit in explicanda doctrina de minimis vibrationibus chordarum tensarum uniformium, pro quarum scilicet curvatura primitiva, sumto abscissarum initio in alterutra chordae extremitate, positaque abscissa qualicunque $=x$ et minima adplicata $=y$, ostendit Cel. Vir in Actis Acad. Reg. Berol.[3] hanc statui posse aequationem

$$y=\alpha.\sin.x+\beta.\sin.2x+\gamma.\sin.3x+\text{etc.}$$

ubi quidem α, β, γ etc. designant parvulas quantitates arbitrarias et constantes.

3 Cf. VI.9 - St.45 et VI.10 - St.46 Vol.6 Oeuvres de DB.

De indole singulari serierum infinitarum quas sinus vel cosinus angulorum arithmetice progredientium formant, earumque summatione et usu.

Novi Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae. Bd. XVII p. 3-23. 1772 (1773)
II.6 - St. 64

§. 1. In schediasmate, quod superiori anno ad Academiam transmisi, de summationibus *incongrué* veris serierum periodice recurrentium, veraque earum interpretatione, duas potissimum pertractavi eiusmodi series cum annexo earundem valore[1]. Quod si nempe in circulo, unitatem pro radio habente, sumatur arcus qualiscunque x; docet calculus, esse seriem infinitam

$$\cos. x + \cos. 2x + \cos. 3x + \cos. 4x + \text{etc.} = -\frac{1}{2};$$

Simulque[2]

$$\sin. x + \sin. 2x + \sin. 3x + \sin. 4x + \text{etc.} = \frac{\sin. x}{2 \sin. \text{vers}. x}.$$

Explicui singularem veritatis speciem, qua huiusmodi proprietates sunt accipiendae; atque genuinam interpretationem meam cum minime inutilem existimem, nec in Analysi abstracta, nec in peculiari problematum quorundam physico-mechanicorum contemplatione; operae pretium erit hoc argumentum, quantum fieri potest, augere atque perficere.

§. 2. Ambae praememoratae series ad classem recurrentium pertinent, ideo quod in utraque singuli termini sint aequales termino praecedenti multiplicato per $2\cos. x$ minus termino antepraecedente; sic utraque series ordini, qui dicitur, secundo annumerata duos habet indices, nempe $2\cos. x$ et -1. Notabitur quoque, quod suas habeant periodos, quae constantissime recurrunt, perfecte easdem, et quod summa terminorum, unamquamvis periodum formantium, sit semper nihilo aequalis. Sola perfecta terminorum, post absolutam quamvis periodum, regeneratione, coniuncta cum adcurata periodorum annihilatione conficitur utriusque seriei valor: si una vel altera conditio tantillum deficiat, summa seriei toto coelo diversa prodibit, etiamsi discrimen veluti infinite parvum statuatur; solum enim nihilum

1 Cf. II.5 - St. 62 p. 101 h.v.
2 $\sin. \text{vers}. x = 1 - \cos. x$.

absolutum, si absolute infinities sumtum ponatur, permanere potest, quod est. Demonstravi autem in priori schediasmate, praememoratos valores utriusque seriei ideo saltem veros esse, quia aequum ius in singulos cuiusvis periodi terminos cadere ponendum est, quod principium soli infinito absoluto competit. Magni mihi haec videtur observatio momenti in aliquibus petractandis quaestionibus physico-mechanicis de motiunculis valde parvis, quae a geometris pro infinite parvis censentur, et quae locum habere non possunt, nisi absolute nihilum statuatur id, quod pro infinite parvo assumtum fuit. Sic contradictionem aliquando implicare possunt, quae pro apodictice demonstratis habentur, quando vibratiunculas chordarum minimas pro infinite parvis sumunt, nisi vibrationibus infinite parvis substituant vibrationes perfecte nullas; tunc autem variationes motuum in perfecta quiete quaeruntur: contradictio emergens non est posita in Analysi, sed potius in physica, quia perfecta quies pro motu infinite parvo haberi nequit.

§. 3. Notetur insuper, ambas series fundamentales paragrapho primo expositas esse generales pro omni arcu x; imo poterit censeri vel ipsa integra peripheria circuli, sive semel sive pluries sumta, maior, quia tam arcus x quam arcus $4nq+x$ eosdem habent sinus et cosinus et sinus versos, si per n intelligatur qualiscunque numerus integer, et per q quadrans circuli; attamen excipiendus est casus, quo sumitur arcus x *perfecte* nullus; dico *perfecte* nullus, ideo quod omnis magnitudo possibilis, utcunque parvam concipere possimus, theorema accurate restituit. In hoc casu utraque series fit infinita; post quamvis revolutionem numerus n subito integra unitate augetur, et hoc modo lex continuitatis veluti in puncto mathematico interrumpitur, aut, si mavis, in medio puncto, quae tamen protinus restituitur pro quavis nova revolutione.

§. 4. Tametsi summae duarum serierum nonnisi singulari atque incongruo modo verae dici possint, quod in praecedente ostendi schediasmate; facili tamen operatione eaque legitima novas suppeditant nulli porro amphiboliae subiectas, quia novae series emergentes manifeste ad summam praescriptam convergunt, secus ac series primitivae, ex quibus novae deducuntur. Incipiam a serie cosinuum

$$\text{(A)} \qquad \cos. x+\cos. 2x+\cos. 3x+\cos. 4x+\text{etc.}=-\frac{1}{2}\cdot$$

Licebit utique considerare arcum x tanquam variabilem, eamque multiplicare per dx, ut sic habeatur

$$dx\cos. x+dx\cos. 2x+dx\cos. 3x+dx\cos. 4x+\text{etc.}=-\frac{1}{2}dx\,;$$

haec vero si integretur, cum additione constantis C, dat

$$\sin.x+\frac{1}{2}\sin.2x+\frac{1}{3}\sin.3x+\frac{1}{4}\sin.4x+\text{etc.}=C-\frac{1}{2}x.$$

At vero constans assumta C non sine circumspectione erit determinanda. Quis est, qui non primo putet aspectu, nullo adhuc instituto praevio examine, quod evanescente arcu x, integra simul sinuum series evanescat, praesertim cum coefficientes terminorum continue decrescant: attamen falleret haec praeconcepta opinio: certum enim est, verum constantis addendae valorem esse aequalem quadranti circuli, quem vocavi q, et, quod mirum videbitur, ipsam seriem sinuum nunquam fieri maiorem, quam cum sumitur arcus x omni arcu assignabili minor sive infinite parvus, ut communi loquendi modo utar, modo non sit perfecte nullus. Nodum quisque sibi solvet, modo consideret infinitos dari terminos, qui omnes minime a se invicem differre censeri possint; sic $\sin.x$ censeri potest $=\frac{1}{2}\sin.2x$ vel $=\frac{1}{3}\sin.3x$ etc. nec dubium est, quin quantitas infinite parva infinities sumta tandem efficere possit quantitatem finitam.

§. 5. Cum igitur casus, quo supponitur $x=0$, minime sit aptus ad quaesitum valorem constantis C addendae determinandum; opera danda est, ut alius inveniatur casus, quo summa seriei perspecta habeatur; huiusmodi casus est, cum sumitur $x=q$ sive aequalis quadranti circuli; tunc enim series sinuum generalis dabit hanc seriem specialem

$$1\pm0-\frac{1}{3}\pm0+\frac{1}{5}\pm0-\frac{1}{7}\pm0+\text{etc.}$$

vel simpliciter

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\text{etc.}$$

quam olim *Leibnitius*[3] dedit pro semiquadrante circuli sive $\frac{1}{2}q$; oportet igitur pro hoc casu, ut sit $C-\frac{1}{2}q=\frac{1}{2}q$, sive $C=q$; unde deducitur summa seriei infinitae

$$\text{(B)}\qquad \sin.x+\frac{1}{2}\sin.2x+\frac{1}{3}\sin.3x+\frac{1}{4}\sin.4x+\text{etc.}=q-\frac{1}{2}x.$$

Nova est haec series atque ideo notatu digna, quod summa sinuum definiatur per arcum circuli; nec amplius ulla incongruitatis specie laborat, quamvis ex serie *incongrue* vera sit petita, quia perpetuo magis magisque ad verum valorem convergit eumque tandem tantum non attingit, quiscunque fuerit primus arcus x, modo

3 G.W. Leibniz Math. Schriften vol.5 p.88–92 et 118–122. Gregory avait trouvé le développement de arcctg$x$ en 1671 (lettre de Gregory à Collins du 15-2-1671 dans «The Correspondence of Isaac Newton» p.61).

continineatur intra terminos 0° et 360°. Id vero quemadmodum contingere possit, sequenti intelligetur exemplo, quo successive ponitur

$$x=\frac{2}{3}q; \qquad x=\frac{4}{3}q; \qquad x=\frac{6}{3}q; \qquad x=\frac{8}{3}q \quad \text{et} \quad x=\frac{10}{3}q,$$

pro quibus positionibus sequentes oriuntur aequationes:

$$\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}-\frac{1}{10}-\frac{1}{11}+\text{etc.}\right)\frac{1}{2}\sqrt{3}=\frac{2}{3}q; \text{ ubi } x=\frac{2}{3}q$$

$$\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-\frac{1}{11}+\text{etc.}\right)\frac{1}{2}\sqrt{3}=\frac{1}{3}q; \quad .. \quad x=\frac{4}{3}q$$

$$(0-0+0-0+0-0+0-0+\text{etc.})\frac{1}{2}\sqrt{3}=0q; \quad .. \quad x=\frac{6}{3}q$$

$$\left(-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{8}-\frac{1}{10}+\frac{1}{11}-\text{etc.}\right)\frac{1}{2}\sqrt{3}=-\frac{1}{3}q; \quad .. \quad x=\frac{8}{3}q$$

$$\left(-1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}-\text{etc.}\right)\frac{1}{2}\sqrt{3}=-\frac{2}{3}q; \quad .. \quad x=\frac{10}{3}q.$$

§. 6. Facile intelligitur ex allatis valoribus, non de futuram aequationem generalem, donec arcus x non attingit totius circumferentiae ultimum terminum: in ipso autem hoc termino subito fallit regula; nempe in ipso puncto, quod simul finis est primae revolutionis et initium secundae, transilit summa seriei a valore $-q$ ad valorem $+q$, qui saltus contingit, quoties nova repetitur revolutio: integer autem transitus, quod liceat repetere, perficitur, non in arculo dx, qualis communiter concipitur, sed in unico puncto vere mathematico. In integrum restituitur theorema, si pro quavis revolutione alia atque alia conveniens constans addatur; erit scilicet

pro prima revolutione	$C=q$;
pro secunda	$C=3q$;
pro tertia	$C=5q$,
atque pro $n$tesima revolutione	$C=(2n-1)q$.

Sic erit generaliter

$$\sin.x+\frac{1}{2}\sin.2x+\frac{1}{3}\sin.3x+\text{etc.}=(2n-1)q-\frac{1}{2}x;$$

At ipsa haec constantis recurrens variatio repugnare videtur continuitatis legi, quae utique pro quavis incipiente nova revolutione interrumpitur, dum salva manet per totum unius eiusdemque revolutionis decursum, de quo adeoque solo deinceps dicam. Interim nunc liquet, quod si fuerit arcus x omni quantitate assignabili minor, modo non sit perfecte nullus, fore summam seriei (B) in paragrapho quinto expositae quadranti circuli aequalem.

§. 7. Prouti seriem (B) paragraphi quinti deduximus ex serie (A) paragraphi quarti, eadem methodo novam deducemus seriem ex inventa (B). Nempe multiplicetur series (B) eiusque valor adscriptus per dx, ut sic habeatur

$$dx\sin.x+\frac{1}{2}dx\sin.2x+\frac{1}{3}dx\sin.3x+\frac{1}{4}dx\sin.4x+\text{etc.}=q\,dx-\frac{1}{2}x\,dx\,;$$

haec nunc posterior aequatio integretur cum additione constantis C; sic prodit

$$-\cos.x-\frac{1}{4}\cos.2x-\frac{1}{9}\cos.3x-\frac{1}{16}\cos.4x-\text{etc.}=qx-\frac{1}{4}xx+C.$$

Hic rursus quantitas constans ex casu aliquo peculiari, qui sua se simplicitate commendet, deducenda est; sumatur $x=q$, et obtinebitur

$$\frac{1}{4}-\frac{1}{16}+\frac{1}{36}-\frac{1}{64}+\text{etc.}=\frac{3}{4}qq+C\,;$$

hinc iam innotescit constans C per seriem; sed determinabitur multo brevius, si simul in subsidium vocetur alius casus,
quo ponitur $x=2q$; Exinde enim fit

$$1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\text{etc.}=qq+C,$$

factaque divisione per 4 oritur nunc

$$\frac{1}{4}-\frac{1}{16}+\frac{1}{36}-\frac{1}{64}+\text{etc.}=\frac{1}{4}qq+\frac{1}{4}C,$$

combinando autem utramque aequationem emersam, communi serie expressam, incidimus in simplicissimam aequationem

$$C+\frac{3}{4}qq=\frac{1}{4}C+\frac{1}{4}qq,$$

sive

$$C = -\frac{2}{3} qq.$$

Substituto hoc valore in aequatione generali, permutatisque signis, tandem prodit nova series

$$\text{(C)} \qquad \cos.x + \frac{1}{4}\cos.2x + \frac{1}{9}\cos.3x + \frac{1}{16}\cos.4x + \text{etc.} = \frac{2}{3}qq - qx + \frac{1}{4}x^2.$$

§. 8. Ex modo dicto valore seriei (C) instar corollarii, posito arcu $x=0$, deducitur valor seriei

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \text{etc.} = \frac{2}{3}qq,$$

quod theorema, si bene memini, iam diu ab aliis alia methodo fuit demonstratum. Similiter, posito $x=2q$, deduciter eadem series, cum signis alternatim permutatis, nempe

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{16} + \text{etc.} = \frac{1}{3}qq.$$

Si ambae hae series addantur, reperietur etiam

$$1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + etc. = \frac{1}{2}qq.$$

Poterit quoque vicissim quadratum quadrantis circuli per huiusmodi series numericas simplicissimas determinari. Erit nempe

$$qq = \frac{3}{2}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \text{etc.}\right)$$

vel

$$qq = 3\left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \text{etc.}\right)$$

vel etiam

$$qq = 2\left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \text{etc.}\right)$$

Atque sic deduximus valorem seriei (C) ex valore seriei (B) §. 5. expositae, ubi nunc notabimus, quod si praefatam seriem (B) generalius pro quacunque revolutione exprimere voluissemus ad normam paragraphi sexti; tunc quoque valorem seriei (C) generalius pro quavis data *n*tesima revolutione expressum obtinuissemus; scilicet

$$\cos.x+\frac{1}{4}\cos.2x+\frac{1}{9}\cos.3x+\frac{1}{16}\cos.4x+\text{etc.}$$
$$=\left(4nn-4n+\frac{2}{3}\right)qq-(2n-1)qx+\frac{1}{4}xx$$

qui valor locum habet, si arcus assumtus x fuerit maior, quam $4.(n-1.)q$ et minor, quam $4nq$, atque adeo consistat inter limites $4.(n-1.)q$ et $4nq$.

§. 9. Ex praemissis iam apparet, quemadmodum ex quavis serie inventa possit alia nova deduci, per meros arcus circulares summabilis; hoc modo alternatim series sinuum et series cosinuum prodibunt; omnes autem ex serie primitiva (A) paragraphi quarti, hybrida atque incongrua, sic erunt depromptae; non puto abs re fore, si operationem istam paullo ulterius prosecutus fuero eo fine, ut lex variationum tanto magis elucescat. Quod si itaque aequatio (C) in fine paragraphi septimi exposita iterum per dx multiplicetur postmodumque integretur absque ulla constantis additione (quia evanescente arcu x simul series eiusque valor appositus evanescunt); incidimus in novam seriem eiusdemque valorem,

$$\text{(D)}\quad \sin.x+\frac{1}{8}\sin.2x+\frac{1}{27}\sin.3x+\frac{1}{64}\sin.4x+\text{etc.}=\frac{2}{3}qqx-\frac{1}{2}qxx+\frac{1}{12}x^3.$$

In nova hac serie notari potissimum meretur casus, quo pro arcu primi termini arbitrario sumitur ipse quadrans circuli, quia hoc modo iterum, ut in paragrapho octavo, novam docemur aequationem inter seriem numericam et cubum quadrantis circuli; posito igitur $x=q$, reperitur series numerica

$$1-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\text{etc.}=\frac{1}{4}q^3$$

vel vicissim

$$q^3=4\left(1-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\text{etc.}\right).$$

§. 10. Multiplicata iterum aequatione (D) in praecedente paragrapho exposita per dx, factaque eius integratione cum additione constantis C, novam acquirimus aequationem

$$\cos.x + \frac{1}{2^4}\cos.2x + \frac{1}{3^4}\cos.3x + \frac{1}{4^4}\cos.4x + \text{etc.}$$
$$= -\frac{1}{3}qqxx + \frac{1}{6}qx^3 - \frac{1}{48}x^4 + C,$$

in qua si ponatur $x=0$, prodit

$$C = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \text{etc.}$$

Verum si et alii casus in subsidium vocentur, poterit constans C alio modo, ad praesens institutum magis accommodato, exprimi. Consideremus igitur casum, quo ponitur $x=2q$, sic obtinemus aequationem hanc aliam,

$$-1 + \frac{1}{2^4} - \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} = -\frac{1}{3}q^4 + C$$

sive inversis signis

$$1 - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{4^4} + \text{etc.} = \frac{1}{3}q^4 - C.$$

Notetur nunc, quod sit series

$$\left(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \text{etc.}\right)$$

ad seriem

$$\left(1 - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{4^4} + \text{etc.}\right)$$

ut 8 ad 7, quod ut demonstratum habeatur, ponatur C pro priori serie et s pro posteriori, sic erit

$$C - s = 2\left(\frac{1}{2^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{6^4} + \frac{1}{8^4} + \text{etc.}\right) = \frac{2}{2^4}\left(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \text{etc.}\right)$$
$$= \frac{1}{8}C;$$

est igitur

$$C - s = \frac{1}{8}C, \quad \text{sive} \quad s = \frac{7}{8}C;$$

substituto hoc valore in aequatione

$$1-\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}-\frac{1}{4^4}+\text{etc.}=\frac{1}{3}q^4-C,$$

habebimus

$$\frac{7}{8}C=\frac{1}{3}q^4-C,\quad \text{vel denique}\quad C=\frac{8}{45}q^4;$$

Atque hic valor est quantitatis in aequatione nostra principali substituendae, quo facto rursus novam obtinemus seriem eiusque valorem

(E)
$$\cos.x+\frac{1}{2^4}\cos.2x+\frac{1}{3^4}\cos.3x+\frac{1}{4^4}\cos.4x+\text{etc.}$$
$$=\frac{8}{45}q^4-\frac{1}{3}qqxx+\frac{1}{6}qx^3-\frac{1}{48}x^4.$$

Simul autem obtinuimus seriem numericam

$$1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\text{etc.}=\frac{8}{45}q^4$$

vel etiam

$$1-\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}-\frac{1}{4^4}+\text{etc.}=\frac{7}{45}q^4;$$

unde ex additione harum ambarum serierum prodit etiam

$$2\left(1+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7^4}+\text{etc.}\right)=\frac{1}{3}q^4$$

sive

$$1+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7^4}+\text{etc.}=\frac{1}{6}q^4$$

vel vicissim

$$q^4=6\left(1+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7^4}+\text{etc.}\right)$$

§. 11. Denique, ut hoc unum superaddam exemplum, iisdem insistendo vestigiis deducitur ex praefata aequatione (E) sequens nova aequatio

(F)
$$\sin.x+\frac{1}{2^5}\sin.2x+\frac{1}{3^5}\sin.3x+\frac{1}{4^5}\sin.4x+\text{etc.}$$
$$=\frac{8}{45}q^4x-\frac{1}{9}qqx^3+\frac{1}{24}qx^4-\frac{1}{240}x^5$$

Si in hac aequatione generali ponatur $x=q$, obtinebitur series citissime tandem convergens una cum eius valore expresso per quintam dimensionem quadrantis circuli, nempe

$$1-\frac{1}{3^5}+\frac{1}{5^5}-\frac{1}{7^5}+\text{etc.}=\frac{5}{48}q^5$$

atque vicissim

$$q^5=\frac{48}{5}\left(1-\frac{1}{3^5}+\frac{1}{5^5}-\frac{1}{7^5}+\text{etc.}\right)$$

Sic iam manifestum est, posse huiusmodi series altioris ordinis pro lubitu construi, quae omnes ex prima serie fundamentali (A) paragrapho quarto exposita successive fuerint erutae, tametsi per se non aliter quam incongrue vera dici possit. Unaquaevis autem series de novo eruta fons et origo est innumerarum, pro ratione arcus assumti x, quae omnes erunt summabiles; huiusmodi corollaria aliis sibi formanda relinquo, si qui sint, qui hasce disquisitiones haud fastidiant. Silentio quoque transmittam semitas quasdam compendiarias, quae ad novas altiorum ordinum series formandas conducant, quamvis hac de re legem condere generalem opus difficile putem.

§. 12. Quod ad series attinet, quibus diversae quantitates quadrantis q definiuntur, has ita seligere potui, ut nemo fit, qui non primo aspectu legem generalem, secundum quam singulae progrediantur, perspiciat. Quod si coefficientes hisce seriebus praefixi aeque perspicui essent, magno id commodo evenisset; quicquid sit, omnes, quos calculo subieci, simul conspectui exponam:

$$q=2\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\text{etc.}\right)\quad \text{conf. §. 5.}$$

$$q^2=2\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\text{etc.}\right)\quad \ldots\ \text{§. 8.}$$

$$q^3=4\left(1-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\text{etc.}\right)\quad \ldots\ \text{§. 9.}$$

$$q^4=6\left(1+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7^4}+\text{etc.}\right)\quad \ldots\ \text{§. 10.}$$

$$q^5=\frac{48}{5}\left(1-\frac{1}{3^5}+\frac{1}{5^5}-\frac{1}{7^5}+\text{etc.}\right)\quad \ldots\ \text{§. 11.}$$

Hinc apparet, dignitates altiores quadrantis q citissime convergere, simulque coefficientes crescere quam proxime in ratione radii ad quadrantem.

§. 13. Theoremata, quae attuli, omnia levi negotio derivata sunt ex theoremate abstracto primitivo, cuius vera interpretatio nondum fuerat observata; sed et alius theorematis mentionem feci paragrapho primo, non de cosinibus, sed de ipsis sinibus, quod plane eiusdem est naturae cum altero. Scilicet demonstravi in priori schediasmate, esse seriem infinitam

$$\sin.x+\sin.2x+\sin.3x+\sin.4x+\text{etc.}=\frac{\frac{1}{2}\sin.x}{\sin.\text{vers}.x}.$$

Inde vero iterum tot nova derivari possent theoremata, ac antea, nisi integratiunculae, per quas ivimus, nunc longe altioris indaginis, impedimentum facesserent. Prima quidem operatio parum negotii facessit; at vero sequentes omnes omnem protinus eludere videntur Analysin. Calculum pro prima illa operatione superaddam; de ulterioribus viderint alii.

§. 14. Multiplicata igitur praefata nostra aequatione per dx, factaque integratione oritur

$$-\cos.x-\frac{1}{2}\cos.2x-\frac{1}{3}\cos.3x-\frac{1}{4}\cos.4x-\text{etc.}=\int\frac{\frac{1}{2}dx\sin.x}{\sin.\text{vers}.x};$$

Ponatur $\sin.\text{vers}.x=z$;

sic fiet $\sin.x=\sqrt{2z-zz}$

et $dx=\dfrac{dz}{\sqrt{2z-zz}}$,

quibus valoribus substitutis oritur simpliciter

$$\int\frac{\frac{1}{2}dx\sin.x}{\sin.\text{vers}.x}=\frac{1}{2}\int\frac{dz}{z}=\frac{1}{2}\log.\frac{z}{C},$$

ubi per C intelligitur constans conveniens mox determinanda. Est igitur, mutatis cosinuum signis,

$$\cos.x+\frac{1}{2}\cos.2x+\frac{1}{3}\cos.3x+\frac{1}{4}\cos.4x+\text{etc.}=\frac{1}{2}\log.\frac{C}{z}.$$

Ut nunc determinetur constans C, in subsidium vocandus est casus particularis ad hoc negotium commodus, qualis est, si ponatur $x=q$, atque adeo $z=1$; sic enim oritur series numerica

$$-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\frac{1}{8}-\text{etc.}=\frac{1}{2}\log.C,$$

sive

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\text{etc.}=\log.\frac{1}{C}.$$

At vero notum est, seriem istam indicare logarithmum hyperbolicum ex binario: ergo nunc habetur

$$\log.2=\log.\frac{1}{C},\quad\text{sive}\quad 2=\frac{1}{C},$$

unde denique

$$C=\frac{1}{2}.$$

Sic obtinetur aequatio finalis

(G) $$\cos.x+\frac{1}{2}\cos.2x+\frac{1}{3}\cos.3x+\frac{1}{4}\cos.4x+\text{etc.}$$

$$=\frac{1}{2}\log.\frac{1}{2z}=\frac{1}{2}\log.\frac{1}{2\sin.\text{vers}.x}.$$

Ergo si fuerit $x=0$, vel etiam $x=4q$, fit summa seriei infinita, atque e contrario tota evanescit, cum sumitur $x={}^2\!/_3\,q$, vel $x={}^{10}\!/_3\,q$.

§. 15. Ex inventis valoribus serierum nostrarum (qui variante arcu x utique simul variant, sola excepta serie (A) §. 4.) intelligimus arcus designari posse tales, ut summa seriei maxima vel minima fiat. Determinatio horum maximorum vel minimorum pro seriebus nostris nunc per se patet. Sic series in fine paragraphi septimi posita, nempe

$$\cos.x+\frac{1}{4}\cos.2x+\frac{1}{9}\cos.3x+\frac{1}{16}\cos.4x+\text{etc.}$$

minima est, cum sumitur $x=2q$; tunc autem fit ipsa series $=-{}^1\!/_3\,qq$. Similiter series (D)

$$\sin.x+\frac{1}{8}\sin.2x+\frac{1}{27}\sin.3x+\frac{1}{64}\sin.4x+\text{etc.}$$

(vid. §. 9.) maxima fit, cum sumitur

$$x=2q-2q\sqrt{\frac{1}{3}}$$

minima autem quando ponitur

$$x=2q+2q\sqrt{\frac{1}{3}}$$

In priori casu fit summa seriei $=0{,}256\ q^3$, in posteriori $=-0{,}256\ q^3$ sive proxime $=\pm 1$. Sed et haec eadem series suos habet arcus x, pro quibus summa ipsius tota evanescit; cum autem haec summa sit semper

$$=\frac{2}{3}qqx-\frac{1}{2}qx^2+\frac{1}{12}x^3,$$

fiet hic valor $=0$, si sumatur vel $x=0$, vel $x=2q$, vel $x=4q$.

§. 16. Iam vero hic rursus aliquid emergit plane singulare, si ad series altiores progrediamur, ubi formula summatoria plura, quam tria, indicat puncta, pro quibus series evanescere possit, et plura, quam duo, puncta, in quibus series ad maximum vel minimum valorem reducatur: tunc nempe contingit, ut formula summatoria praeter vera huius conditionis puncta, simul alia indicet prorsus falsa; iteratum paradoxum quisque sibi solvet, modo meminerit totam praemissam theoriam unicam admittere revolutionem, ita ut arcus x nec maior accipi possit quam $4q$, nec minor nihilo sive negativus. Ergo omnes reiiciendae erunt radices, quarum valor x extra praefatos cancellos vagatur; reliquae omnes, non solum verae, sed et utiles, erunt retinendae. Hanc animadversionem exemplo illustrabo, quod petam a serie (F) paragrapho undecimo exposita, cuius scilicet summam invenimus

$$=\frac{8}{45}q^4x-\frac{1}{9}qqx^3+\frac{1}{24}qx^4-\frac{1}{240}q^5;$$

hanc formulam si faciamus $=0$, habebimus tres radices veras atque utiles, nempe

$$x=0; \qquad x=2q \quad \text{et} \quad x=4q.$$

His accedunt duae aliae radices non solum inutiles sed et prorsus falsae, nempe

$$x=2q-2q\sqrt{\frac{7}{3}} \quad \text{simulque} \quad x=2q+2q\sqrt{\frac{7}{3}}\,.$$

Dico autem ideo falsas esse, quia prior est negativa, et altera maior quam $4q$, atque sic ambae cancellos 0 et $4q$ transgrediuntur. Quod nunc attinet ad valores arcuum x, pro quibus summa seriei (F) maxima vel minima sit, oportet differentiale quantitatis summatoriae ponere aequale nihilo, unde habetur pro isto negotio

$$\frac{8}{45}q^4-\frac{1}{3}qqxx+\frac{1}{6}qx^3-\frac{1}{48}x^4=0,$$

quae aequatio debite tractata dat

$$x=2q\pm 2q\sqrt{\left((1\pm\frac{8}{15}\right)};$$

haec expressio quatuor involvit radices, nempe

$$x=2q+2q\sqrt{\frac{7}{15}};\quad \text{tum etiam}\quad x=2q-2q\sqrt{\frac{7}{15}},$$

deinde

$$x=2q+2q\sqrt{\frac{23}{15}}\quad \text{ac denique}\quad x=2q-2q\sqrt{\frac{23}{15}}.$$

Duae priores, quae proxime faciunt

$$x=3{,}366\,q,\quad \text{et}\quad x=0{,}634\,q,$$

cum contineantur intra limites 0 et $4q$, quaestioni praesenti optime satisfaciunt; duae posteriores autem radices, quae proxime faciunt

$$x=4{,}476\,q,\quad \text{et}\quad x=-0{,}476\,q,$$

cum extra praefatos limites evagentur, falsae sunt atque adeo reiiciendae.

§. 17. Praemissa theoria necessaria mihi videtur in explicanda doctrina de minimis vibrationibus chordarum tensarum uniformium. Sit chorda fixa in ambabus sui extremitatibus, sumaturque pro unitate radius circuli, cuius peripheria sit = longitudini chordae sive $=4q$: fuerit nunc chorda paululum incurvata a potentiolis unicuique puncto applicatis, quibus omnibus simul relaxatis motiunculae reciprocae in chorda oboriantur; ostendi autem in actis Acad. reg. Berol.[4] quod unicuique puncto insint vel inesse possint plures aut etiam innumerae vibratiunculae simplices atque regulares coexistentes, nec se ullo modo perturbantes. Sic sumto initio abscissarum in alterutra extremitate chordae, positaque abscissa qualicunque $=x$, minima applicata $=y$, demonstravi, assumi posse hanc aequationem pro curvatura primitiva:

$$y=\alpha\sin.x+\beta\sin.2x+\gamma\sin.3x+\delta\sin.4x+\text{etc.}$$

4 Cf. note 3 du II. 6* - St. 64* p. 118 h.v.

ubi quidem per α, β, γ, δ etc. intelliguntur parvulae quantitates arbitrariae et constantes. Notetur autem terminum α sin.x exprimere vibrationes primi ordinis, quatenus super dimidia chordae longitudine formantur, terminum β sin.$2x$ vibrationes secundi ordinis super chordae quarta parte, et sic porro: sic coëfficientes α, β etc. denotant amplitudines excursionum pro singulis vibrationum ordinibus. Oportet igitur, ut posito valore α maximo, quem argumentum nostrum physice consideratum ferre possit relative ad longitudinem chordae, oportet, inquam, ut valores α, β, γ, δ etc. minimum decrescant in ratione 1, 1/2, 1/3, 1/4 etc. imo cum summa huius seriei sit adhuc infinita, contingere posset, ut chorda aliquibus in locis enormiter ab axe recederet inter vibrandum; statuo propterea coëfficientes α, β, γ, δ etc. magis adhuc decrescere debere. Id vero praemissa theoria nostra egregie confirmat. Sic in serie §. 13. forent coëfficientes α, β, γ, δ etc. omnes inter se aequales; unde haberetur

$$y=\alpha\,(\sin.x+\sin.2x+\sin.3x+\sin.4x+\text{etc.})=\frac{\frac{1}{2}\,\alpha\,\sin.x}{\sin.\text{vers}.x};$$

ergo foret pro initio abscissarum, ubi $x=0$, prima applicata infinities maior quam α, quod contradictionem involvit cum problemate physico. Similiter in serie (B) paragraphi quinti, posito $x=0$, non evanescit prima applicata, quin valor seriei tunc sit $=q$, atque adeo prima applicata $=q\alpha$, quem valorem chorda inter vibrandum nunquam assumere potest. Haec satis probant, quam circumspecte procedendum sit, cum quantitatibus physicis valde parvis infinite parva in abstracto substituimus; nec occurritur incommodo, si coëfficientes α, β, γ, δ etc. proportionaliter utcunque diminuantur, nisi perfecte annihilentur; tunc autem integra chorda perfecte quiescit; huius insoliti remedii in toto praesentis dissertationis decursu plurima passim vidimus exempla. Sic series (A) §. 5. est $=-1/2$, qualiscunque sit arcus x, sive affirmativus sive negativus, sive finitus sive infinitus sive infinite parvus; attamen si fuerit arcus x perfecte nullus, sit series manifeste infinita.

§. 18. Praefatum incommodi genus afficere definit series nostras sinuum altiorum ordinum, cuiusmodi sunt series (D) et (E) §. §. 9 et 11. expositae, in quibus omnibus prima atque ultima applicata perfecte evanescunt, facta scilicet $x=0$, vel $x=4q$ sicut plenissime ad theoriam chordarum vibrantium applicari possint. Quod attinet ad seriem (D), haec subministrat talem aequationem pro curvatura chordae

$$\frac{y}{\alpha}=\frac{2}{3}\,qqx-\frac{1}{2}\,qxx+\frac{1}{12}\,x^3;$$

At vero series (F) dat aequationem

$$\frac{y}{a} = \frac{8}{45}q^4x - \frac{1}{9}qqx^3 + \frac{1}{24}qx^4 - \frac{1}{240}x^5,$$

atque sic porro, si ulterius progredi velimus. Pro priori serie habemus

$$\beta = \frac{1}{8}a; \qquad \gamma = \frac{1}{27}a; \qquad \delta = \frac{1}{64}a, \quad \text{etc.}$$

pro altera vero sit

$$\beta = \frac{1}{2^5}a; \qquad \gamma = \frac{1}{3^5}a; \qquad \delta = \frac{1}{4^5}a, \quad \text{etc.}$$

hinc cognoscimus amplitudines singularum vibratiuncularum specialium, ex quibus integer chordae motus vibratorius componitur. Porro, si tempusculum unius regularis vibrationis super dimidia chordae longitudine formatae dicatur t, haec tempuscula pro sequentibus vibratiuncularum classibus erunt successive

$$\frac{1}{2}t, \qquad \frac{1}{3}t, \qquad \frac{1}{4}t, \quad \text{etc.}$$

atque sic habemus notionem distinctissimam motus vibratorii in chorda, cuius curvatura primitiva expressa fuerit aequatione

$$\frac{y}{a} = \frac{2}{3}qqx - \frac{1}{2}qxx + \frac{1}{12}x^3$$

aut alia aequatione ad mentem theoriae nostrae formata, simulque intelligimus, fore, ut post quodvis tempusculum t singula chordae puncta ad momentum temporis perfecte quiescant, et figuram primitivam ad partes oppositas resumat integra chorda. Ex his concludo, posse in hoc argumento formulas analyticas *in abstracto* generaliter esse veras, quae pluribus in casibus specialibus *contradictionem* cum hypothesibus physicis involvant. Caeterum curvae, quas pro chorda vibrante methodus nostra subministrat, omnes ex duobus saltem ramis similibus et aequalibus, attamen quoad latitudinem aeque ac longitudinem situ inverso positis, instar literae S compressae, componuntur; analysis in superioribus ordinibus equidem plures alios indicare potest ramos, quos vero synthesis nostra nullo modo admittit, quia extra limites 0 et $4q$ cadunt. Praememoratae *contradictioni* aliter occurri non potest, quam faciendo vibratiunculas, non infinite parvas, sed perfecte nullas. Huiusmodi casus admittit analysis, physica repudiat.

Theoria elementaris serierum, ex sinibus atque cosinibus arcuum arithmetice progredientium diversimode compositarum, dilucidata.
Auctore Dan. Bernoulli.

Novi Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae. Bd.XVIII p.5–8. 1773 (1774)
II.7* - St.66*

Duas de consimili argumento dissertationes, ab Ill. *Bernoullio* ad Academiam transmissas, praecedentibus Commentariorum nostrorum tomis inservimus, in quarum una serierum quarundam incongrue verarum iusta interpretatio atque usus[1], in altera vero serierum infinitarum, quas arcuum arithmetice progredientium sinus vel cosinus formant, summatio traditur[2]. Editis ab eo inde tempore Commentariis Academiae Parisinae ad annum 1769.[3] novam de eodem hoc argumento meditandi ansam ex eo adeptus est Ill. Auctor, quod in isto volumine egregiam methodum a Dn. Abbate *Bossut* expositam cerneret, determinandi pro dato quocunque terminorum numero summas serierum, quas angulorum arithmetice progredientium sinus cosinusve eorumve potestates similes exhibent. Primum problema a Cel. *Bossut* resolutum consistit in summatione huius seriei

$$\sin. q+\sin. 2q+\sin. 3q+\sin. 4q+ \ldots\ldots \sin. nq$$

cuius invenit summam

$$S=\frac{\sin. q\,(1+\cos. q-\cos. nq-\cos.(n+1)q)}{1-\cos. 2q}$$

ubi numerus integer n determinatum exprimit terminorum summandorum numerum. Hanc eandem seriem Ill. *Bernoullius* in priori suo schediasmate est contemplatus, sed ita, ut *in infinitum continuata* supponeretur, qui quippe solus casus ambiguitate a nemine adhuc explicata intricabatur; ostenditque esse[4]

$$\sin. q+\sin. 2q+\sin. 3q+\sin. 4q+ \ldots. \sin. \infty q=\frac{\frac{1}{2}\sin. q}{\sin.\,\text{vers}.\, q}$$

1 Cf. II.5 - St.62 p.102 h.v.
2 Cf. II.6 - St.64 p.119 h.v.
3 Cf. note 3 du II.7 - St.66 p.138 h.v.
4 $\sin.\,\text{vers}.x = 1-\cos.x$.

quae summa ex formula Bossutiana colligitur esse

$$\frac{\sin. q\,(1+\cos. q-\cos. \infty\, q-\cos. (\infty+1)\, q)}{1-\cos. 2\, q};$$

hanc vero expressionem prima fronte aenigma videri insolubile, nemo inficiabitur, cum, quid pro

$$\cos. \infty\, q \quad \text{et} \quad \cos. (\infty+1)\, q$$

sit intelligendum, plane non pareat; dum contra formula Bernoulliana ab omni aequivocatione prorsus est libera. Quo vero formulae utriusque veritas et consensus patesceret, Ill. Auctor ex principiis metaphysicis hic ostendit, ambos istos terminos combinatos in formula Bossutiana, nempe

$$\cos. \infty\, q+\cos. (\infty+1)\, q,$$

nihilo aequari; quo demonstrato, aequatisque duabus istis summae eiusdem expressionibus, requiritur insuper, ut sit

$$\frac{1}{2 \sin. \text{vers.}\, q}=\frac{1+\cos. q}{1-\cos. 2\, q}$$

quod statim adparet, cum sit

$$1-\cos. 2\, q=2 \sin. q^2 \quad \text{et} \quad \sin. \text{vers.}\, q=1-\cos. q;$$

sic enim habebitur

$$\frac{1}{2}=\frac{1-\cos. q^2}{2 \sin. q^2}=\frac{\sin. q^2}{2 \sin. q^2}$$

aut denique

$$1=1.$$

Seriei cosinibus arcuum arithmetice progredientium formatae summam nova et eleganti methodo Cel. *Bossut* indagavit; reperitque esse

$$\cos. q+\cos. 2\, q+\cos. 3\, q+\cos. 4\, q+\ \ldots\ \cos. n\, q=\frac{\cos. q\,(\sin. n\, q+\sin. (n+1)\, q-\sin. q)}{\sin. 2\, q}$$

ubi quidem notissimum est, si sit $n=\infty$, hanc summam fore $=-1/2$. Docet itaque Ill. *Bernoullius*, etiam hoc casu pariter fore

$$\sin.\infty q + \sin.(\infty + 1) q = 0;$$

quo substituto ista formula abit in hanc

$$\frac{-\cos.q \sin.q}{\sin.2q} = -\frac{1}{2} \quad \text{ob} \quad \sin.q \cos.q = \frac{1}{2} \sin.2q.$$

Eodem modo etiam reliquae formulae summatoriae a Cel. *Bossut* ad datum quemcunque terminorum summandorum numerum exhibitae casui, quo series supponuntur in infinitum progredi, possunt adcommodari; unde principii, quo Illustr. Auctor utitur, metaphysici veritas et usus abunde colligitur, praesertim cum hae meditationes Cel. *Bossutii* commodam Ill. Auctori occasionem praebuerint, quid de ipso termino infinitesimo statuendum sit, uberius explicandi, quo demum facto formulas Bossutianas a finito perfecte determinato ad infinitum quodammodo indeterminatum extendere licet. Theoria haec Ill. *Bernoulli* cum duobus innitatur principiis; primo, quod proposita series infinita composita sit ex periodis, quae perfecte sine fine recurrunt eaedem; secundo, quod summa omnium terminorum in una eademque periodo contentorum aequetur nihilo; de utroque hoc principio complures observationes ad rem illustrandam perutiles in hac dissertatione superadduntur.

Theoria elementaria serierum, ex sinibus atque cosinibus arcuum arithmetice progredientium diversimode compositarum, dilucidata.

Novi Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae. Bd. XVIII p. 3–23. 1773 (1774)
II. 7 - St. 66

§. 1. Ab eo tempore, quo duo Academiae transmisi schediasmata, alterum de summationibus serierum quarundam incongrue veris earumque interpretatione atque usu[1], alterum de indole singulari serierum infinitarum, quas sinus vel cosinus angulorum arithmetice progredientium formant earumque summatione et usu[2]; ab eo, inquam, tempore, pervenit ad manus meas novum volumen Commentariorum Academiae scientiarum Parisinae A. 1769. inde post triennium publici iuris factum. Egregiam in hoc volumine D. Abb. *Bossut* pag. 453.[3] nobiscum communicavit methodum determinandae summae, pro quocunque numero terminorum dato, serierum, quas sinus vel cosinus arcuum arithmetice progredientium eorumve potentiae similes exhibent. Quae hac de re protulit sagacissimus Geometra, mihi ansam dederunt de argumento, quod in ambobus schediasmatis meis secundum vera principia, sed metaphysica potius quam geometrica, pertractavi, novas non nullas superaddendi observationes easque, ni fallor, nec steriles nec iniucundas.

§. 2. Ea est sinuum atque cosinuum indoles, ut una eademque quantitas ex illis composita plures admittat expressiones sub alia atque alia facie, quae inter se comparatae totidem subministrant theoremata plus minus elegantia, aliquando etiam fastidiosa, si velimus in diversis expressionibus identitatem valoris demonstrare, quia non aliter differunt, quam forma, quae arbitraria est multiplicique modo diversa esse potest; oportet itaque omnes et singulas quantitates ad eandem denominationem reducere, si id fieri possit, priusquam de aequalitate vel inaequalitate quantitatum signo *Sinus* vel *Cosinus* involutarum iudicium ferre liceat, nisi ea de re per theoremata iam demonstrata constet. Hoc ideo in antecessum monendum esse duxi, ne huiusmodi discussiones, quae solis principiis pure geometricis atque analysi vulgari conficiuntur, ad communem referantur censum cum illis, de quibus mox

1 Cf. II. 5 - St. 62 p. 101 h.v.
2 Cf. II. 6 - St. 64 p. 119 h.v.
3 Ch. Bossut «Manière de sommer les suites dont les termes sont des puissances semblables de Sinus ou Cosinus d'arcs qui forment une Progression arithmétique» Hist. et Mém. de l'Académie de Paris. 1769 p. 453.

sermo erit et quae necessario requirere videntur principium illud quasi metaphysicum, cuius usum feci in schediasmate de summationibus serierum quarundam incongrue veris earumque interpretatione, nec proprie differt principium istud a decantato *principio* metaphysico *sufficientis rationis*. Meminerimus autem, series nostras pertinere ad series recurrentes suasque habere periodos, post quas singulas perfecte recurrunt eaedem, simulque ipsos periodi terminos, modo affirmativos modo negativos, se ipsos destruere, quae circuli proprietas est, ita ut integra periodus ad nihilum reducatur; si porro unaquaevis periodus composita sit ex dato numero terminorum, manifestum est, fore, ut summa totidem terminorum se invicem in serie subsequentium sit semper $=0$, ubicunque horum terminorum primus accipiatur.

§. 3. His praemonitis iam propius ad praesens institutum meum accedo. Postquam nimirum in allegatis schediasmatis meis summam serierum nostrarum, si hae infinitae ponantur, exhibui atque abunde demonstravi, quam incongrua sit summa, etsi legitime inventa pluribusque methodis longe a se invicem diversis constanter confirmata; in memoriam revocavi veram totius mysterii explicationem, quam olim, cum Petropoli agerem, observatam habueram eaque arrepta occasione argumentum istud metaphysicum, meaque sententia in geometria pura haud demonstrabile, uberius aperui. Post haec omnia incidi in novas formulas Bossutianas, §. 1. allegatas, easque nova methodo erutas pro quocunque terminorum numero determinato, quem vocat Auctor n, quas cum inspicerem, protinus me cupido incessit explorandi, quid formulae istae indicent, si numerus terminorum n infinitus statuatur, ut Bossutiana cum meis conferre liceret, inflammataque cupido fuit, cum viderem subesse aliquid, in hoc examine, quod omnem solutionem pure geometricam eludat, rursusque ad principia nostra metaphysica, sed alio modo, recurrendum esse. En nunc quod res est.

§. 4. Primum, quod Cel. *Bossut* solvit problema, consistit in summanda serie sinuum, quorum arcus arithmeticam formant progressionem, nimirum serie

$$\sin. q+\sin. 2q+\sin. 3q+\sin. 4q+\sin. 5q+ \ldots . \sin. nq$$

in qua numerus n, qui semper integer est, exprimit determinatum terminorum summandorum numerum. Invenit autem laudatus Author quaesitam seriei summam

$$s=\frac{\sin. q[1+\cos. q-\cos. nq-\cos.(n+1)q]}{1-\cos. 2q}$$

ubi litera q denotat datum arcum in circulo, cuius radius unitate exprimitur; haec autem formula summatoria toto coelo differt ab ea, quam theoria serierum recurrentium subministrat, quamvis utriusque valor perfecte sit unus idemque, nec unquam ulla laborant amphibolia hae formulae, qualiscunque numerus accipiatur integer pro litera n; semper enim termini summatorii valorem exhibent perfecte eundem, qui ab additione reali terminorum oritur, qualiscunque pro n accipiatur numerus integer et qualiscunque sit arcus q. Sic itaque dubium non est, quin etiam vera sit summatio Bossutiana in casu, quo series in infinitum continuatur, quem ego solum casum in primo schediasmate §. 1. allegato *de summationibus serierum quarundam incongrue veris* scrupulose examinavi, quia solus mirabili illa ambiguitate involutus est, cuius veram interpretationem nemo adhuc, quantum quidem scio, exposuerat.

§. 5. Notetur vera formula seriei, quam pro summatione eius dedi in praefato schediasmate in fine §. 13. pro theoria serierum recurrentium[4] atque ut consensus tandem formulae nostrae cum Bossutiana tanto clarius patescat, substituatur litera q literae x a nobis adhibitae; sic dabit formula nostra summam seriei infinitae[5]

$$\sin. q + \sin. 2q + \sin. 3q + \sin. 4q + \sin. 5q \ldots\ldots + \sin. \infty q = \frac{\frac{1}{2}\sin. q}{\sin.\mathrm{vers.}\, q}.$$

At vero insignis Geometra noster hanc eandem summam facit aequalem

$$\frac{\sin. q\,[1 + \cos. q - \cos. \infty q - \cos.(\infty + 1) q]}{1 - \cos. 2q}.$$

Igitur requirit utriusque methodi consensus, ut statuatur

$$\frac{\sin. q\,[1 + \cos. q - \cos. \infty q - \cos.(\infty + 1) q]}{1 - \cos. 2q} = \frac{\frac{1}{2}\sin. q}{\sin.\mathrm{vers.}\, q}.$$

Equidem formula mea ad dextram posita ab omni aequivocatione libera est; at vero Bossutiana prima fronte aenigma videtur insolubile. Quid enim, quaeso, ponendum erit pro $\cos. nq$ vel pro $\cos.(n+1)q$, si per n intelligatur numerus absolute infinitus? Hoc viderint illi, qui voluerint mecum ad principium metaphysicum sufficientis rationis confugere. Ego vero in hoc examine eandem valere methodum, quam adhibui in schediasmate meo primo §. 8. non potui non primo quaestionis intuitu cognoscere.

4 Cf. II.5 - St.62 p.111 h.v.

5 $\sin.\mathrm{vers.}\, x = 1 - \cos. x$.

§. 6. Si scilicet (in quacunque periodo id demum fieri mente concipias) terminum numero n indicatum consideres, perspicuum est, hunc terminum non variari a numero periodorum variato;
sit numerus omnium periodorum praecedentium $= m$,
numerus omnium terminorum in quavis periodo $= f$,
erit generaliter $n = mf + g$,
ubi nunc g exprimit indicem termini quaesiti,
si hunc terminum numeres ab initio periodi, in qua eum existere fingis; ergo terminus ipse idem erit pro indice n et pro indice g et cum id constantissime ita se habeat, verum manebit, etiamsi numeros n et m vere infinitos assumas. Videamus nunc, quis in abstracto valor ponendus sit in una eademque periodo pro termino, cuius index est g; is vero valor unice deducendus est ex natura infiniti, quae postulat, secundum sana axiomata metaphysica, ut aequum ius cadat in singulos eiusdem periodi terminos; unde sequitur, quod verus valor quaesitus in abstracto statuendus sit aequalis summae omnium eiusdem periodi terminorum divisae per numerum horum terminorum; sed in seriebus nostris summa omnium terminorum eiusdem periodi $= 0$; ergo *in abstracto* erit etiam $\cos. nq$ vel $\cos. \infty q = 0$. Eodem modo demonstratur, quod in formula Bossutiana valor termini $\cos. (\infty + 1) q$ sit $= 0$; fateor tamen hic aliquid subesse, quod ulteriori explicatione opus habet; etenim formula haec proprie indicat duos seriei terminos se invicem subsequentes, simulque exigit theoria nostra, ut ambo termini eidem periodo sint inclusi. Ut ambo momenta inter se consistere possint, res hunc in modum pertractanda erit. Sit rursus n numerus infinitus ponaturque quaevis seriei propositae periodus composita ex terminis

$$A + B + C + D \ldots\ldots + M + N + P + Q = 0.$$

Sit iterum numerus horum terminorum $= f$; inquiramus iam in omnes valores possibiles quantitatis compositae

$$\cos. nq + \cos. (n + 1) q$$

combinando terminos, donec perfecte recurrant. Sic obtinebimus

$$A + B; \quad B + C; \quad C + D \ldots\ldots M + N; \quad N + P; \quad P + Q; \quad Q + A$$

post quos tota periodus perfecte recurrit; sic numerus horum terminorum coniugatorum sit iterum $= f$ simulque eorum summa

$$= 2A + 2B + 2C \ldots\ldots 2N + 2P + 2Q,$$

quae cum adhuc sit $=0$, sequitur, ambos terminos combinatos in formula Bossutiana, nempe

$$\cos.nq+\cos.(n+1)q \quad \text{esse} \quad =0,$$

posito pro n numero vere infinito, eodem iure, quo idem demonstravimus pro unico termino $\cos.nq$; haec metaphysice vera sunt, non geometrice, quia numerus n non est specifice determinatus.

§. 7. Praemissa hacce nostra theoria, cuius principia plane eadem sunt, quibus usus sum in schediasmate de summationibus incongrue veris, facile nunc nobis erit invenire verum valorem formulae Bossutianae §. 4. recensitae pro casu, quo ponitur numerus n vere infinitus, eiusque aequalitatem cum formula nostra

$$\frac{\frac{1}{2}\sin.q}{\sin.\text{vers}.q}$$

demonstrare, facto enim

$$\cos.nq+\cos.(n+1)q=0,$$

formula summatoria Bossutiana §. 4. exposita mutatur in hanc simpliciorem absque ulla amphibolia

$$s=\frac{\sin.q[1+\cos.q]}{1-\cos.2q}.$$

Igitur nunc aliud non superest, quam ut demonstremus quod sit

$$\frac{\sin.q[1+\cos.q]}{1-\cos.2q}=\frac{\frac{1}{2}\sin.q}{\sin.\text{vers}.q} \quad \text{sive} \quad \frac{1+\cos.q}{1-\cos.2q}=\frac{1}{2\sin.\text{vers}.q}.$$

Est vero

$$\text{sinus versus } q=1-\cos.q$$

simulque

$$\cos.2q=(\cos.q)^2-(\sin.q)^2,$$

hisque substitutis valoribus aequivalentibus factaque multiplicatione per crucem, prodit

$$2-2(\cos.q)^2=1-(\cos.q)^2+(\sin.q)^2$$

sive

$$1=(\cos.q)^2+(\sin.q)^2$$

aut denique

$$1=1.$$

Ergo ambae nunc formulae perfecte inter se conveniunt.

§. 8. Ex principio, quod §. 6. explicui, facillimum nunc erit deducere quoque summam seriei in infinitum continuatae pro cosinibus arcuum arithmetice progredientium, quam Auctor noster (§. 3.) problemate secundo pertractat, ubi nova et eleganti sua methodo demonstrat, quod sit

$$\cos.q+\cos.2q+\cos.3q+\cos.4q+\,.....\,+\cos.nq$$
$$=\frac{\cos.q\,[\sin.nq+\sin.(n+1)q-\sin.q]}{\sin.2q}.$$

Notissimum autem est theorema, quod series proposita, si pro n sumatur numerus vere infinitus, fiat $=-1/2$, quamvis theorema istud longe diverso sensu accipiendum sit, quam communiter accipitur, nec tamen unquam aliquid falsi sive directe sive indirecte inde deduci possit. Cum vero solutio Bossutiana sit pure geometrica pro omni numero terminorum finito, res iterum erit Geometrarum attentione digna, si inquiratur, quid ista solutio indicet, cum pro n numerus vere infinitus supponitur, praesertim quod ista inquisitio argumento nostro propria sit nec eius modus alias locum habere possit.

§. 9. Patet autem, hanc seriem cosinuum, cuius modo mentio facta fuit, iterum pertinere ad illas series recurrentes, quae suis periodis perpetuo regeneratis, perfecte iisdem, gaudeant, et aggregatum ex omnibus uniuscuiusvis periodi terminis semper ad nihilum reduci; igitur idem adhuc subsistet principium, cuius ope, pro serie sinuum in infinitum continuata, invenimus §. 6. quod statuendum sit

$$\cos.nq+\cos.(n+1)q=0.$$

Quodsi nunc pro summanda serie cosinuum in infinitum continuata iisdem vestigiis insistamus, reperiemus pariter

$$\sin.nq+\sin.(n+1)q=0.$$

His vero substitutis valoribus in aequatione Bossutiana invenimus pro serie in infinitum continuata, vocatis in subsidium nostris principiis, sequentem

$$\cos.q+\cos.2q+\cos.3q+\cos.4q+\text{etc.}=\frac{-\cos.q\times\sin.q}{\sin.2q}$$

notum autem est, quod sit

$$\cos. q \times \sin. q = \frac{1}{2} \sin. 2q$$

ergo habemus

$$\cos. q + \cos. 2q + \cos. 3q + \cos. 4q + \text{etc.} = -\frac{1}{2}$$

plane ut a Geometris haec series definiri solet, utcunque paradoxa haec determinatio videri debeat.

§. 10. Eodem plane modo, quo usi sumus, licebit formulas summatorias reliquas, quas Geometra gallus exhibuit pro numero terminorum determinato n, ita restringere, ut summam serierum earundem sed sine fine continuatarum indicent, nec, si recte iudico, id alio modo praestari poterit; totum negotium in eo simpliciter consistit, ut deleantur singuli termini signo $\sin. \infty q$ vel $\cos. \infty q$ affecti; Ego vero aliud non intendi, quam ut principii metaphysici, quod nos eo perduxit, veritatem et usum tanto magis manifestarem atque amplificarem. In primo schediasmate, ante aliquot abhinc annos communicato, principium istud uberius explicui atque adhibui pro summandis seriebus nostris infinitis iisque summationibus prorsus heteroclitis genuine interpretandis; nunc vero ostendere volui, quid de ipso termino infinitesimo ad mentem eiusdem principii statui et quomodo in abstracto determinari debeat, quo demum facto liceat formulas Bossutianas a finito perfecte determinato ad infinitum quodammodo indeterminatum extendere. Si habeatur quantitas $1/m$, haec utique perfecte erit determinata, si m fuerit numerus determinatus qualiscunque; quid vero statuendum erit, si ponatur $m=0$ et $1/m=\infty$? an tunc valor emergens pariter erit perfecte determinatus? mihi non videtur in abstracto. Attamen requirit argumentum nostrum, ut pro numero n accipiatur numerus infinitus simulque exacte determinatus nec meo iudicio, huic postulato satisfieri potest, quam cum pro n sumantur omnes numeri in una eademque periodo et pro quovis numero n determinetur valor termino conveniens ac denique inter omnes hos valores sumatur medius; hac operatione metaphysice obtinetur, quod geometrice fieri non potest, perinde ac si sorti res committeretur, quisnam valor ponendus sit pro formulis

$$\sin. nq,\ \cos. nq,\ \sin. (n+1)q,\ \cos. (n+1)q \text{ etc.}$$

quando supponitur $n=\infty$; erit nimirum valor expectationis pariter medius inter omnes valores possibiles eosdemque aeque probabiles, atque in hoc solo valore consistit *sufficiens ratio*, quam natura non potest non sequi.

§. 11. Patet ex praemissis, theoriam nostram duobus inniti principiis; *primum* est, ut proposita series infinita composita sit ex periodis, quae perfecte sine fine recurrant eaedem, *secundum* ut summa omnium terminorum unam eandemque periodum constituentium sit $=0$; Primo principio subiiciuntur omnes series sinuum vel cosinuum, vel eorundem quadratorum, cuborum aliarumve dignitatum, si modo arcus arithmetice progrediantur, quod quidem non apparet in seriebus analytice expressis, qualis, verbi gratia, est

$$\sin. q+\sin. 2q+\sin. 3q+\sin. 4q \ldots\ldots +\sin. nq,$$

sed quod manifestum sit pro singulis exemplis, quia semper sit, ut arcus aliquoties repetitus tandem expleat peripheriam sive semel sive pluries sumtam, quo facto termini iidem eodem ordine necessario recurrunt, hinc numerus terminorum singulis periodis communis eorumque summa constanter eadem.

Quod attinet ad secundum principium, quo hanc summam terminorum in quavis periodo aequalem nihilo statuimus, id quidem obtinet in seriebus sinuum atque cosinuum, at vero si eorum dignitates accipiantur, quod Academicus Parisinus acute fecit, non sine modificatione principium accipiendum erit. De utroque principio pauca quaedam superaddam.

§. 12. Sit integra circuli peripheria $=p$
atque per f et g intelligantur duo numeri qualescunque inter se primi; tum in proposito exemplo numerico ponatur $fq=gp$;
hoc modo recurret series post quosvis terminos, qui unam efficient periodum. Denotentur hi termini literis $a, b, c \ldots d, e$, quorum aliqui erunt affirmativi caeteri negativi. His positis docet theoria nostra, fore summam seriei propositae in infinitum continuatae

$$=\frac{fa+(f-1)b+(f-2)c\ldots\ldots 2d+e}{f}.$$

Quamvis autem haec summa appareat incongrua, attamen egregie conspirat cum summatione ex quibuscunque aliis principiis legitime deducta, quod plus satis demonstravi. Mirabilis ista proprietas ex vera infiniti absoluti natura deducitur.

Quod si iam arcus q et peripheria p incommensurabiles ponantur, erit numerus f simul infinitus et unica periodus ex infinitis terminis constabit; verum hoc non obstante series proposita censenda est composita ex infinitis periodis, quia est absolute infinita et nullo modo a numero terminorum uniuscuiusque periodi limitatur. Ita fit ut summa seriei infinitae

$$\cos. q+\cos. 2q+\cos. 3q+\cos. 4q+\text{etc.} \quad \text{sit constanter} \quad =-\frac{1}{2},$$

etiamsi ponatur v. gr. $q\sqrt{7}=p$,

quo in casu nunquam satis continuari potest series, ut perfecte resurgat periodosque formet; nihil tamen impedit, quo minus mente periodos concipiamus easque infinities repetitas putemus.

§. 13. Sunt et non nulla de periodis evanescentibus monenda. Proprietas est serierum nostrarum, quae a sinibus vel cosinibus formantur, ut omnes termini affirmativi in quavis periodo destruant omnes negativos atque adeo summam terminorum ad nihilum reducant, haeque series solae proprie ad institutum nostrum pertinent. At D. Abb. *Bossut* alias superaddit series summabiles, si modo numerus terminorum fuerit finitus; hae vero novae series non sunt sine grano salis accipiendae; suasque periodos quidem formant easdem, sed non evanescentes; summa harum serierum infinitarum necessario simul infinita est nec adeoque ad censum nostrum pertinent; huiusmodi series formantur a quadratis aliisve dignitatibus paribus sinuum cosinuumve ad arcus arithmetice progredientes pertinentium, quia scilicet omnes termini in serie fiunt positivi; videantur problemata Bossutiana 3. 4. 7. et 8., quae ipsa tamen sub alia facie cum theoria nostra egregie conspirant. Aliter se res habet in seriebus, quae a dignitatibus formantur imparibus; hae enim periodis gaudent, quae certa cum restrictione iterum annihilantur; huc pertinent problemata Bossutiana 5 et 6, quibus alia similia superaddi possent. Ipsa vero annihilatio plerumque ex sola terminorum genesi per se patet. Ita in serie sinuum, nempe

$$\sin. q + \sin. 2q + \sin. 3q + \text{etc.},$$

quivis terminus eiusdem periodi in omni exemplo numerico suum habet terminum socium sub signo contrario, sive numerus terminorum f fuerit par sive impar, et quoniam si impar est, terminus socio orbus semper sit $= 0$, patet necessario quamvis periodum ad nihilum reduci. Imo etiamnum annihilabitur periodus, si cuiusvis termini similis functio accipiatur, quae signum termino praefixum non mutet; Ergo et annihilantur periodi in serie

$$(\sin. q)^3 + (\sin. 2q)^3 + (\sin. 3q)^3 + \text{etc.}$$

Aliter se res habet, si dimensionibus imparibus substituantur pares, quia tunc omnes termini necessario fiunt affirmativi, unde periodi, quamvis eaedem recurrant, non annihilantur sed potius eandem ubique summam formant; ergo hae series in infinitum continuatae, summam faciunt infinitam, nec porro ad argumentum nostrum pertinent. Sic in problemate 3 et 7 authoris nostri, in quorum altero sumuntur quadrata terminorum in altero biquadrata, summae indicatae fiunt infinitae, si pro n ponatur numerus infinitus.

§. 14. Quae modo monui de seriebus sinuum, pertinent etiam ad series cosinuum, sive per se considerentur sive ut series generatrices aliarum serierum, modo numerus f sit par.; verum quoties pro f sumitur numerus impar, recedit exemplum a norma praescripta atque termini eiusdem periodi equidem se destruunt, at non contraria identitate repetitorum terminorum, sed valore extincto terminorum collectorum signis contrariis affectorum. Non immorabor hisce extricationibus, quia istud negotii facilius ex ipsis formulis Bossutianis conficitur, etiamsi Auctor nullam harum periodorum earumque annihilationum mentionem faciat; tanto praestantior videbitur methodus geometrica, qua usus est, tantoque magis natura serierum nostrarum elucessit.

§. 15. Quoniam singulae periodi perfecte resurgunt eaedem, sufficiet primam indicasse periodum; haec semper ex formulis summatoriis Auctoris nostri deducetur,

si ponatur $$n=f;$$

tum vero erit ubique (ob $fq=gp$ §. 12)

$$\begin{gathered}
\sin. nq \quad \text{sive} \quad \sin. fq=0; \\
\cos. nq=1; \\
\sin.(n+1)q=\sin. q; \\
\cos.(n+1)q=\cos. q; \\
\sin. 3nq=0; \\
\cos. 3nq=1; \\
\sin. 3(n+1)q=\sin. 3q \\
\text{etc.}
\end{gathered}$$

Quod si iam per n intelligatur numerus terminorum unamquamvis periodum constituentium atque per s summa cuiusvis periodi, facile erit hanc summam ex formulis Auctoris nostri deducere. Percurram praecipua eius problemata ponendo ubique $n=f$.

I. $$s=\sin. q+\sin. 2q+\sin. 3q \,\ldots\ldots + \sin. nq$$

$$=\frac{\sin. q[1+\cos. q-\cos. nq-\cos.(n+1)q]}{1-\cos. 2q}=\frac{\sin. q[1+\cos. q-1-\cos. q]}{1-\cos. 2q}=0.$$

II. $$s=\cos. q+\cos. 2q+\cos. 3q \,\ldots\ldots + \cos. nq$$

$$=\frac{\cos. q[\sin. nq+\sin.(n+1)q-\sin. q]}{\sin. 2q}=0.$$

III. $$s=(\sin. q)^2+(\sin. 2q)^2+(\sin. 3q)^2 \,\ldots\ldots + (\sin. nq)^2$$

$$=\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}\cos. 2q\left(\frac{\sin. 2nq+\sin.(n+1)2q-\sin. 2q}{\sin. 4q}\right)=\frac{1}{2}n-0=\frac{1}{2}f.$$

Ergo summa periodi, cuius singuli termini per constructionem hic sunt affirmativi, in quavis periodo semper est aequalis dimidio numero terminorum.

IV. $$s=(\cos.q)^2+(\cos.2q)^2+(\cos.3q)^2\,.....+(\cos.nq)^2$$

$$=\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}\cos.2q\left(\frac{\sin.2nq+\sin.(n+1)2q-\sin.2q}{\sin.4q}\right)=\frac{1}{2}n+0=\frac{1}{2}f.$$

Ergo summa periodi eadem, quae in articulo praecedente.

V. $$s=(\sin.q)^3+(\sin.2q)^3+(\sin.3q)^3\,.....+(\sin.nq)^3$$

$$=\frac{3}{4}\sin.q\left(\frac{1+\cos.q-\cos.nq-\cos.(n+1)q}{1-\cos.2q}\right)$$

$$-\frac{1}{4}\sin.3q\left(\frac{1+\cos.3q-\cos.3nq-\cos.3(n+1)q}{1-\cos.6q}\right)=0.$$

VI. $$s=(\cos.q)^3+(\cos.2q)^3+(\cos.3q)^3\,.....+(\cos.nq)^3$$

$$=\frac{3}{4}\cos.q\left(\frac{\sin.nq+\sin.(n+1)q-\sin.q}{\sin.2q}\right)$$

$$+\frac{1}{4}\cos.3q\left(\frac{\sin.3nq+\sin.3(n+1)q-\sin.3q}{\sin.6q}\right)=0.$$

Eodem modo demonstratur annihilatio periodorum in reliquis problematibus ab Auctore solutis, si modo signa conserventur, qualia sunt in simplici serie generatrice; secus fiunt series sine fine continuatae valore suo infinitae, quia periodos habent numero infinitas easque omnes inter se aequales. Haec de natura periodorum; quod ad summam serierum sine fine progredientium attinet, hanc determinavi §. 12. Equidem problema tertium et quartum proprie ad argumentum nostrum non pertinent, quia summam obtinent infinitam; nil tamen impedit, quo minus omne id, quod indeterminati habent, in solam periodum, quam ut ultimam quodam modo considerare licet, reiiciamus, quia si in genere numerus periodorum integrarum dicatur m, summa seriei semper censeri potest

$$=\frac{1}{2}mf+\frac{fa+(f-1)b+(f-2)c\,.....+2d+e}{f}.$$

§. 16. Notetur denique, fieri in casu peculiari posse, ut periodi revera non annihilentur, etiamsi in genere annihilatio earum locum habeat. Id contingere potest in seriebus, quae ex dignitatibus cosinuum formantur, cum numerus f est impar simulque formula denominatorem habet aequalem nihilo, sic, ut fractio habeatur, in qua tam denominator quam numerator sit nihilo aequalis. Dabo huius observationis exemplum. In problematibus praecedentis paragraphi accipiatur sextum, in quo series supponitur, quae conflatur ex cubis cosinuum. Ponatur in hac serie generali $q = \frac{1}{3}p$ sive $q = 120°$ habebitur pro hoc casu $f = 3$ et quaevis periodus formabitur ex terminis $-\frac{1}{8} - \frac{1}{8} + 1$, qui sunt cubi ex cosinibus 120°, 240° et 360°. Est vero summa horum trium terminorum, ex quibus periodus quaevis componitur $= \frac{3}{4}$ nec adeoque annihilatur. Attamen hic casus minime contradicit formulae problematis sexti, quia denominator secundi membri, nempe $\sin. 6q$, sive $\sin. 720°$. simul etiam evanescit, unde aliqua suboritur amphibolia in membro posteriori formulae sextae, dum prius membrum aperte manet $= 0$. Verus valor posterioris membri eruitur, si in fractione

$$\frac{\sin. 3nq + \sin. 3(n+1)q - \sin. 3q}{\sin. 6q}$$

substituatur loco arcus q alius arcus a priori infinite parum diversus, nempe arcus $q + a$, retento valore $n = f = 3$, quia valor verus q mox restituitur; hoc posito mutatur praefata fractio in hanc alteram

$$\frac{\sin. 9(q+a) + \sin. 12(q+a) - \sin. 3(q+a)}{\sin. 6(q+a)} = (\text{ob } 3q = p)\, \frac{\sin. 9a + \sin. 12a - \sin. 3a}{\sin. 6a}.$$

Quia vero arculus a est infinite parvus, non differt sinus ab arcu; ergo habebitur

$$\frac{9a + 12a - 3a}{6a} \quad \text{sive} \quad 3.$$

unde fit pro nostro exemplo

$$\frac{\sin. 3nq + \sin. 3(n+1)q - \sin. 3q}{\sin. 6q} = 3,$$

atque hic valor multiplicandus erit per $\frac{1}{4}\cos. (3q + 3a)$ sive simpliciter per $\frac{1}{4}$; unde tandem verus periodi valor fit $= \frac{3}{4}$ plane ut res ipsa postulat. Atque sic in hoc casu speciali contingit, ut series ista in infinitum continuata veram summam habeat infinitam, quae tamen in genere spectata esse deberet finita, haec contradictio apparens exinde oritur, quod in hoc exemplo speciali periodi non annihilentur nec adeoque hypotheses nostrae locum habere possint; taceo alia huiuscemodi corollaria sive aequivoca sive minus clara.

§. 17. Praeter praememoratum casum, quo formulae summatoriae Bossutianae simul numeratorem ac denominatorem ad nihilum reducunt, non video alios, qui ulla laborent difficultate; minus obvia haec est proprietas, quando numerus f est impar atque series formatur ex cosinibus eorumve dignitatibus imparibus, utpote in quibus non sunt bini atque bini termini, qui se mutuo destruant, sed demum omnes termini collecti in unoquovis cyclo vel periodo se destruunt, quod patet ex paragrapho decimo quinto. Totam hanc rem unico illustrabo exemplo. Sit series formata ex cubis cosinuum, nempe

$$(\cos. q)^3 + (\cos. 2q)^3 + (\cos. 3q)^3 + \text{etc.}$$

Ponatur in hac serie $q = \frac{1}{5}p$
atque adeo $f = 5$;
habebitur series numerica

$$(\cos. 72°)^3 + (\cos. 144°)^3 + (\cos. 216°)^3 + \text{etc.}$$

in qua periodus quaevis constat ex quinque terminis, post quos usque recurrit eadem; radices cubicae istorum terminorum sive ipsi cosinus in tabulis habentur

$$0{,}30901 - 0{,}80901 - 0{,}80901 + 0{,}30901 + 1{,}00000$$

ergo radices in quavis periodo perfecte annihilantur. Egregia est haec proprietas iam diu cognita, quia generalis est pro omni numero f; sed et cubi horum terminorum, si aggregantur, ad nihilum reducuntur; quod §. 15. exposui atque ex formulis summatoriis Bossutianis deduxi. Sunt autem cubi fractionibus decimalibus expressi

$$0{,}02951 - 0{,}52951 - 0{,}52941 + 0{,}02951 + 1{,}00000,$$

quorum aggregatum rursus $= 0$, quod exemplum confirmat annihilationem periodorum in proposita serie ex cubis cosinuum, qui arcubus arithmetice progredientibus respondent, formata. Superest ut ostendam modum, quo summa seriei propositae in infinitum continuatae definiatur. Dico autem id obtineri, si in formula sexta §. 15. ab D. *Abbate Bossut* demonstrata termini

$$\sin. nq; \qquad \sin. (n+1)q; \qquad \sin. 3nq \quad \text{et} \quad \sin. 3(n+1)q$$

deleantur (§. §. 9 et 10), quo facto invenitur summa modo dicta

$$s = \frac{3}{4}\cos. q \times \frac{-\sin. q}{\sin. 2q} + \frac{1}{4}\cos. 3q \times \frac{-\sin. 3q}{\sin. 6q} = -\frac{3}{8} - \frac{1}{8} = -\frac{1}{2};$$

Ergo eadem est summa pro serie cosinuum et pro serie eorundem cuborum.

Iam vero imprimis notatu dignum puto, quod plane eadem summa proveniat, si ad ductum §. 12. determinetur; posito enim

$$f=5;\quad a=0{,}02951;\quad b=-0{,}52951;\quad c=-0{,}52951;\quad d=0{,}02951 \quad \text{et} \quad e=1{,}00000$$

fit

$$\frac{5a+4b+3c+2d+e}{5}=-\frac{1}{2}.$$

Mirabilem istum consensum, methodum inter geometricam et metaphysicam, equidem iam abunde manifestavi in schediasmate de summatoribus serierum quarundam incongrue veris earumque interpretatione, nunc autem amplificavi dum ostendi interpretationem, quae secundum eadem principia nostra facienda sit de sinubus aut cosinubus arcuum infinities sumtorum pro ratione circumstantiarum.

§. 18. Denique notari meretur discrimen inter positionem $fq=p$ et positionem generaliorem $fq=gp$ intelligendo per f et g numeros integros qualescunque inter se primos; totum nempe discrimen in eo consistit, quod termini iidem ordinem saltem varient in singulis periodis: sic si, verbi gratia ponatur $5q=3p$ sive $q={}^3\!/_5\,p$,

dabit series

$$(\cos. q)^3+(\cos. 2q)^3+(\cos. 3q)^3+\text{etc.}$$

seriem numericam, cuius periodi sunt

$$0{,}52951+0{,}02951+0{,}02951-0{,}52951+1{,}00000,$$

ubi termini non aliter quam ordine locationis differunt a terminis in praecedente paragrapho expositis. Equidem in his exemplis eadem oritur summa pro serie in infinitum continuata, quae antea; attamen, si generalius res examinatur, fieri potest, ut a solo terminorum ordine mutato, alia atque alia exoriatur summa, etiamsi quaevis periodus ex iisdem terminis sit composita. Potest etiam theoria nostra de seriebus ex sinibus vel cosinibus aut eorum dignitatibus, applicari ad quasvis series recurrentes, in quibus periodi annihilantur atque sic sub facie infinities generaliori usui venire.

Adversaria analytica miscellanea de fractionibus continuis. Auctore Dan. Bernoulli

Novi Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae. Bd. XX p. 5–9. 1775 (1776)
II.8* - St.70*

Fractionum continuarum theoria, quae superiori iam seculo, summorum Geometrarum, Brouncheri, Wallisii, Hugenii aliorumque commentationibus inclaruit, novam, etiam hisce temporibus, praeclaris Illustrium virorum *Euleri*, *Bernoulli*, *La Grangii*, in ea uberius excolenda studiis celebritatem adipiscitur. In praesenti dissertatione Ill. Auctor id potissimum operam dat, ut casus examinet, quibus expressiones fractionales infinitae formula finita definiri queant sive algebraica sive transcendentali. Expressionis in hoc genere simplicissimae

$$\cfrac{1}{m+\cfrac{1}{m+\text{etc.}}}$$

valorem acuto ratiocinio ex ipsa *convergentiae* indole deducit; si enim supponamus, istam expressionem continuo magis magisque ad certum et determinatum aliquem valorem, qui sit $=\mathrm{S}$, convergere; post numerum infinitum concatenatarum eiusmodi fractionum, valor expressionis non variabitur, etiamsi a fronte superaddatur nova fractio $1/m$; ita, ut iam tota series sit

$$\frac{1}{m+\mathrm{S}};$$

quamobrem ex praemisso ratiocinio erit

$$\frac{1}{m+\mathrm{S}}=\mathrm{S};$$

adeoque quaesitus expressionis valor

$$\mathrm{S}=\frac{-m\mp\sqrt{(4+m^2)}}{2},$$

designante m numerum quemcunque; ad quem valorem termini fractionis continuae eo convergunt citius, quo maior valor numeri m fuerit assumtus.

Veritatem huius formulae bina exempla pro m numero positivo tam rationali, quam irrationali evoluta, abunde probant; assumto scilicet signo positivo membri radicalis, ut sit

$$S = \frac{-m + \sqrt{(4+m^2)}}{2}.$$

Si vero pro m numerum negativum $= -n$ assumere placeat; tum, statuto membri radicalis altero signo, formula adhibenda erit

$$S = \frac{-m - \sqrt{(4+m^2)}}{2};$$

adeoque

$$S = \frac{n - \sqrt{(4+n^2)}}{2}.$$

Adplicatio huius formulae ad casum simplicissimum, $m = 0$, qui medium quasi inter duos praecedentes tenet, binos pro S valores suppeditat, scilicet $S = 1$; et $S = -1$. Paradoxi huius evolutionem tradit Ill. Auctor, ex principiis suis in dissertatione de seriebus sinuum vel cosinuum angulorum arithmetice progredientium praecedentibus nostris Commentariis inserta explicatis. Praemissa solutio, quamvis et plana et elegans, hypothesi tamen cuidam innititur; istas scilicet expressiones ad certum et determinatum aliquem valorem magis magisque convergere; neque igitur inconcussa staret eius praecisio, si forte istae expressiones ad terminos data lege pereodice recurrentes utcunque inter se inaequales, convergerent. Alia igitur et a priori plane diversa methodo idem argumentum pertractat Ill. Vir; scilicet fractiones continuas successive, a fractione uni-membri progrediendo ad bimembrem, trimembrem atque ita porro, in aequivalentes convertit fractiones simplices, quarum tum istam detegit proprietatem, ut numeratores seriem recurrentem secundi ordinis constituere; denominatores vero lege plana et obvia progredi evincat; quo id est adeptus, ut pro qualicunque termino N fractionum istarum simplicium, qui fractionis continuae membrorum numerum N continentis valorem exprimit, formulam generalem assignare valeat, quae quidem ita deprehenditur expressa. Valor fractionis continuae supra memoratae N membra complexae

$$= \frac{2(m + \sqrt{[4+m^2]})^N - 2(m - \sqrt{[4+m^2]})^N}{[m + \sqrt{[4+m^2]})^{N+1} - (m - \sqrt{[4+m^2]})^{N+1}}.$$

Iam vero cum de fractionibus continuis in infinitum progredientibus quaestio sit; id potissimum quaeritur, quisnam sit huius expressionis valor, si fuerit $N = \infty$. Facile autem patet, fore tum,

1) *pro m numero positivo*

$$S=\frac{2}{m+\sqrt{(4+m^2)}}=\frac{-m+\sqrt{(4+m^2)}}{2}$$

prorsus, uti priori methodo fuit inventum.

2) *Pro m numero negativo*

$$S=\frac{2}{m-\sqrt{(4+m^2)}}=\frac{-m-\sqrt{(4+m^2)}}{2}$$

adeoque si $m=-n$; habebitur

$$S=\frac{n-\sqrt{(4+n^2)}}{2}$$

quae formula iterum cum ea, quam altera methodus suppeditavit, perfecte congruit.

At simplicissimum fuit fractionum continuarum genus, quod Ill. Auctor hic est contemplatus, in quo scilicet eadem prorsus fractio in quolibet termino recurrit; succedit secunda harum fractionum species, ubi binae fractiones alterno ordine perpetuo recurrunt; veluti

$$\cfrac{n}{m+\cfrac{q}{p+\cfrac{n}{m+\text{etc.}}}}$$

cuius valor ita exprimitur

$$S=\frac{n-mp-q+\sqrt{(4mnp+[n-mp-q]^2)}}{2m}$$

quas vocat Ill. Auctor fractiones continuas secundi ordinis. Eadem methodus et pro altioribus ordinibus succedit; et quotuscunque fuerit ordo fractionum continuarum; valor quaesitus semper aequatione quadratica exprimi poterit; unde ista methodus pro fractionibus *periodicis* egregii utique usus est. Adplicuit eandem Ill. Auctor ad progressionem post periodicas simplicissimam, ponendo in singulis fractionibus unitatem pro numeratore et numeros naturales pro denominatoribus se invicem subsequentibus, veluti

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\text{etc.}}}}$$

huiusque seriei notabiles detexit proprietates, quarum ope valor quaesitus commoda et celeri adproximatione potest definiri; attamen ad eum geometrica praecisione determinandum, concessis praesertim quadraturis vel signis summatoriis, nova requiri videntur calculi artificia.

Adversaria analytica miscellanea de fractionibus continuis.

Novi Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae. Bd.XX p.3-23. 1775 (1776)
II.8 - St.70

§. 1. Haud dedignati sunt viri Illustres summique Geometrae superioris saeculi Milord Brouncher[1], Wallis[2], Huyguens[3] aliique theoriam fractionum continuarum commentari atque in usus suos convertere, quin etiam hisce proximis temporibus Geometrae sagacissimi *Eulerus*[4] et *de la Grange*[5], tot sublimibus Inventis clari, argumentum istud arithmeticum haud parum promoverunt atque ab oblivione vindicarunt; liceat egregiis observationibus leviusculas quasdam superadiicere, plerasque excerptas ex adversariis olim a me congestis. Nec mihi propositum est rem systematice prosequi nec peculiarem usum inhiare. Fractiones continuae abruptae, aliud non sunt, quam simplices fractiones sub forma plurium fractionum, inter se a divisione continua concatenatarum, quas magnus adhibuit Huguenius ad proportiones, pro admissa aliqua aberratione, simplicissimis numeris exprimendas. Examinabo potissimum fractiones continuas data lege in infinitum progredientes, cuiusmodi celebre nobis dedit exemplum Illustris *Brouncherus*, argumenti huius Auctor, pro determinanda ratione inter quadratum et circulum ei inscriptum, quam Wallisius ex profundissimis abditis eruerat modoque valde diverso expresserat. Animus erat inquirendi, quibusnam in casibus expressiones nostrae in infinitum continuatae valorem obtineant communi analysi determinabilem. Miratus sum paucissimos esse hosce casus eosque simplicissimos; praeter hos reliqui omnes ad formulas transcendentales conducere videntur: nec tamen, quantum ego quidem scio, ullum adhuc a Geometris prolatum fuit exemplum ea de re aliud quam Brouncherianum.

§. 2. Initium faciam ab expressione fractionum continuarum nullibi abruptarum inter omnes simplicissima maximeque obvia. Proponatur scilicet investigandus valor sequentis expressionis

1 Correspondance Lord Brouncker et J. Wallis; cf. oeuvres de Fermat.
2 J. Wallis «Arithmetica infinitorum» Oxonii (1655).
3 Ch. Huygens «Descriptio automati planetarii» Leipzig (1703).
4 L. Euler E71 «De fractionibus continuis» Comment. Acad. Sc. Petrop. Vol. 9 (1737). Opera Omnia ser. I vol. 14.
5 J.L. Lagrange «Solutions d'un problème d'arithmétique» Miscellanea Touriniensia Vol.4 (1766-1769); «Sur la solution des problèmes indéterminés du second degré» Mém. Berlin (1767); «Additions au mémoire sur la résolution des équations numériques» Mém. Berlin (1770).

$$\cfrac{1}{m+\cfrac{1}{m+\cfrac{1}{m+\cfrac{1}{m+\text{etc.}}}}}$$

ubi m indicat numerum qualemcunque sive affirmativum sive negativum, integrum aut fractum, rationalem aut irrationalem. Si ponatur, hanc expressionem continue magis magisque convergere ad certum et determinatum aliquem valorem; necesse erit, ut post numerum infinitum concatenatarum fractionum, valor expressionis haud porro varietur, si nova superveniat fractio. Sit itaque pro fractionibus infinities repetitis valor expressionis $=\mathrm{S}$ atque puta novum praefigi terminum, ita ut qui fuit primus nunc fiat secundus; erit tunc valor expressionis

$$=\frac{1}{m+\mathrm{S}};$$

atque sic habebimus (per hypothesim)

$$\mathrm{S}=\frac{1}{m+\mathrm{S}},$$

sive

$$\mathrm{S}^2+m\mathrm{S}=1$$

vel

$$\mathrm{S}=\frac{-m+\sqrt{4+mm}}{2},$$

quae solutio unicuique obvia est.

§. 3. Verus utique valor est, quem modo dedimus, atque si ad exempla pure numerica descendere lubeat, luculenter apparebit, quam cito plerumque a quavis nova adiecta fractione expressio ad valorem istum approperet. Sit, verbi gratia, $m=8/3$, dabit formula nostra, pro expressione infiniti-membri, $\mathrm{S}=1/3$. At si sumatur valor expressionis successive pro fractione prima simplici, dein pro fractione bimembri, trimembri et quadrimembri, obtinebuntur valores specifici

$$\frac{3}{8};\quad \frac{24}{73};\quad \frac{219}{656}\quad \text{et}\quad \frac{1968}{5905},$$

in quibus, si numeratores retineantur, denominatores sola unitate aberrant, alternis vicibus in defectu sive in excessu, unde apparet, quam cito fractiones abruptae convergant ad propositam fractionem infinitimembrem eiusque valorem S; etiamsi pro m numerus fractus fuerit assumtus. Praefati autem termini numerici pro fractionibus abruptis successive determinandis facillime continuantur, quia quivis numerator novi termini est triplum denominatoris ultimi termini, denominator autem in novo termino est triplum eiusdem numeratoris modo inventi unitate auctum vel diminutum, prouti index novi termini fuerit par vel impar.

§. 4. Unicum pariter sufficiet exemplum, quo appareat nihil obstare, quin pro m quantitas assumatur irrationalis.
Ponatur, exempli causa, $m=\sqrt{5}$;
sic dabit formula in fine paragraphi secundi exposita valorem fractionis infinitimembris

$$S=\frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

Si vero in expressione proposita sumantur successive valores pro fractione unimembri, bimembri, trimembri etc. obtinebuntur termini

$$\frac{1}{5}\sqrt{5}\,; \quad \frac{1}{6}\sqrt{5}\,; \quad \frac{6}{35}\sqrt{5}\,; \quad \frac{7}{41}\sqrt{5}\,; \quad \frac{41}{240}\sqrt{5}\,; \quad \text{etc.}$$

Utamur termino quinto $^{41}\!/_{240}\sqrt{5}$ ut videamus quantum distet ab termino infinitesimo

$$S=\frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

Est vero

$$\sqrt{5}=2{,}236068\,;$$

ergo

$$\frac{41}{240}\sqrt{5}=0{,}381995$$

et

$$S=0{,}381966,$$

qui ambo numeri in quinta demum figura in diversa abire incipiunt. In genere apparet quod termini a fractionibus continuis abruptis provenientes tanto citius ad valorem S convergant, quanto maior assumtus fuerit valor numeri m et vicissim tanto tardius quanto minor est numerus m.

§. 5. Denique etiam quaeritur, quid futurum fit quando pro m sumitur numerus negativus; dico autem tunc quantitatem radicalem in formula paragraphi secundi negative esse accipiendam atque sic fore

$$S = \frac{-m - \sqrt{4+mm}}{2},$$

ubi si sumatur numerus m negative oritur

$$S = \frac{m - \sqrt{4+mm}}{2},$$

qui valor negative idem est, qui fuit in paragrapho secundo. Notabile mihi videtur, quod pro casu specialissimo $m=0$ fiat perinde $S=1$ et $S=-1$. Video hic iterum, quod passim monui in praecedentibus dissertationibus occassione serierum, quas formant sinus vel cosinus arcuum circularium arithmetice progredientium, nempe distinguendum esse inter nihilum absolutum et inter infinite parvum; In priori enim casu fit $S = 1/_{\infty\times 0}$; in posteriori $S = \pm 1$ atque si hanc rem prosequamur per singula expressionis membra, prouti fecimus paragrapho tertio, obtinebimus successive pro valoribus expressionis abruptae $\infty . 1/_{\infty} . \infty . 1/_{\infty}$ etc. Sic tota quaestio in ambiguo posita manet. At in altero casu termini numero impares, utcunque magni ab initio, continue decrescunt crescuntque termini pares, donec omnes ad eandem magnitudinem tandem reducantur, quae erit proxime ± 1, prouti minima quantitas assumpta m fuerit vel positiva vel negativa.

§. 6. Erunt fortasse, quibus solutio paragrapho secundo exposita minus videatur apodictica, nec eos prorsus improbarem, ideo quod non semper satis liqueat, expressionem definere in valorem constantem et determinatum, etiamsi certum sit eum esse finitum; etenim posset tandem expressio convergere ad terminos periodice atque data lege recurrentes, utcunque inter se inaequales, prouti notum est seriem formatam ex sinibus vel cosinibus Arcuum circularium arithmetice progredientium formare huiusmodi perpetuos recursus; hac ratione inductus argumentum nostrum alio prosequar modo a priori plane diverso.

Convertatur successive expressio fractionum continuarum in aequivalentes fractiones simplices, incipiendo ab expressione uni-membri et pergendo ad expressionem bimembrem, trimembrem, quadrimembrem etc. Sic successive orientur valores

$$\frac{1}{m} \cdot \frac{m}{mm+1} \cdot \frac{mm+1}{m^3+2m} \cdot \frac{m^3+2m}{m^4+3mm+1} \cdot \frac{m^4+3mm+1}{m^5+4m^3+3m} \cdot \frac{m^5+4m^3+3m}{m^6+5m^4+6mm+1} \cdot$$

$$\frac{m^6+5m^4+6mm+1}{m^7+6m^5+10m^3+4m} \cdot \quad \text{etc.}$$

Duo sunt in hac progressione fractionum simplicium notanda; primum est, quod quivis numerator idem sit quod denominator praecedentis termini, ita ut series numeratorum eadem sit cum serie denominatorum, hoc saltem discrimine, quod secundus numerator idem sit cum primo denominatore, tertius numerator cum secundo denominatore et sic porro: igitur sufficiet considerasse seriem numeratorum. Secunda observatio, quae hic potissimum notanda venit, in hoc consistit, quod praefata numeratorum series pertineat ad classem serierum recurrentium et quidem ad ordinem secundum, quando quidem unusquisque terminus conflatur ex duobus terminis, qui illum praecedunt; sint nempe tres termini contigui qualescunque A, B et C; dico fore $C = mB + A$, quae est proprietas serierum recurrentium secundi ordinis, theoriam autem generalissimam harum serierum earumque usum insignem pro radicibus omnium aequationum algebraicarum facillimo negotio determinandis docui in variis schediasmatis, veteribus Commentariis insertis[6].

§. 7. Ad normam praememoratae theoriae construatur pro incognita y aequatio secundi ordinis

$$yy = my + 1,$$

cuius ambae radices sunt

$$y = \frac{m + \sqrt{(4+mm)}}{2} \quad \text{et} \quad y = \frac{m - \sqrt{(4+mm)}}{2}.$$

Hae ambae radices nos eo conducent, ut non solum valorem termini infinitesimi seriei nostrae sed et cuiuscunque termini, cuius index designatus sit numero N, indicare possimus absque interventu terminorum praecedentium; erit enim terminus generalis seriei

$$= \alpha\left(\frac{m + \sqrt{4+mm}}{2}\right)^{N} + \beta\left(\frac{m - \sqrt{4+mm}}{2}\right)^{N};$$

coefficientes autem α et β determinantur ex duobus primis seriei terminis, qui hic sunt 1 et m et qui provenire debent pro casibus $N = 1$ et $N = 2$; sic reperitur

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{4+mm}} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{-1}{\sqrt{4+mm}},$$

quibus substitutis sit tandem terminus generalis seriei nostrae

$$= \frac{(m + \sqrt{4+mm})^{N} - (m - \sqrt{4+mm})^{N}}{2^{N}\sqrt{4+mm}}.$$

6 Cf. II.5 - St.62 p.101 h.v.

Confirmabitur iste terminue generalis, quoties pro N numerus assumitur integer, quamvis calculus fiat satis taediosus pro numeris maiusculis.
Sit $\mathrm{N}=3$,
fit

$$(m+\sqrt{4+mm})^3=m^3+3\,mm\sqrt{4+mm}+3\,m(4+mm)+(4+m^2)\sqrt{(4+m^2)}\,,$$

atque pariter

$$(m-\sqrt{4+mm})^3=m^3-3\,mm\sqrt{4+mm}+3\,m(4+mm)-(4+mm)\sqrt{4+mm}\,;$$

haec posterior quantitas si a priori subtrahatur, prodit

$$6\,mm\sqrt{4+mm}+(8+2\,mm)\sqrt{4+mm}\,,$$

quae quantitas dividenda est per

$$2^{\mathrm{N}}\sqrt{4+mm}\quad \text{sive per}\quad 8\sqrt{4+mm}\,,$$

quo facto prodit simpliciter, pro tertio termino, $mm+1$ qualis est in praecedente paragrapho, si ad solos spectes numeratores.

§. 8. Quod nunc attinet ad denominatores, hos pro quovis termino habebis, si inter numeratores sumas sequentem terminum, id est, si loco N ponas $\mathrm{N}+1$. Sic itaque quivis denominator conveniens indici N erit

$$=\frac{(m+\sqrt{4+mm})^{\mathrm{N}+1}-(m-\sqrt{4+mm})^{\mathrm{N}+1}}{2^{\mathrm{N}+1}\sqrt{4+mm}}\,.$$

Denique si numeratorem N tesimum dividas per denominatorem N tesimum; habebis valorem fractionis continuae N membris

$$=\frac{2\,(m+\sqrt{4+mm})^{\mathrm{N}}-2\,(m-\sqrt{4+mm})^{\mathrm{N}}}{(m+\sqrt{4+mm})^{\mathrm{N}+1}-(m-\sqrt{4+mm})^{\mathrm{N}+1}}\,.$$

Atque sic habemus terminum generalem pro qualicunque termino fractionum simplicium paragrapho sexto expositarum, quae aequivalent fractioni continuae toties repetitae quoties unitas continetur in exponente N, quam fractionem voco N membrem. Igitur haec solutio, ex theoria serierum recurrentium petita, infinities generalior est solutione superius paragrapho secundo exposita simulque uno intuitu totius argumenti imaginem repraesentat. Verum ad causam propero principalem.

§. 9. Quaeritur nunc tandem, quisnam verus sit valor expressionis nostrae, si fractiones continuae in infinitum progrediantur, id est, si pro N numerus assumatur infinitus. Dico autem duos hic esse casus a se invicem distinguendos, prouti m fuerit numerus positivus vel negativus. In priori casu sit terminus primus tam in numeratore quam in denominatore infinities maior quam terminus secundus; in altero contrarium obtinet, igitur si fuerit m numerus positivus, reiiciendus erit secundus terminus numeratoris aeque ac denominatoris atque sic valor formulae generalis in praecedente paragrapho expositae fit

$$=\frac{2(m+\sqrt{4+mm})^{\mathrm{N}}}{(m+\sqrt{4+mm})^{\mathrm{N}+1}} \quad \text{sive} \quad =\frac{2}{m+\sqrt{4+mm}};$$

Nec valor iste differt a valore in paragrapho secundo, ubi altera methodo invenimus

$$\mathrm{S}=\frac{-m+\sqrt{4+mm}}{2};$$

est scilicet

$$\frac{2}{m+\sqrt{4+mm}}=\frac{-m+\sqrt{4+mm}}{2},$$

quod sola multiplicatio per crucem indicat. Quod si fuerit m numerus negativus; reiiciendus erit primus terminus relatus ad secundum, tam in numeratore quam denominatore formulae in praecedente paragrapho inventae, quo facto habetur

$$\frac{-2(m-\sqrt{4+mm})^{\mathrm{N}}}{-(m-\sqrt{4+mm})^{\mathrm{N}+1}} \quad \text{sive} \quad \frac{2}{m-\sqrt{4+mm}},$$

in qua postrema formula si m mutetur in $-m$; oritur negative idem valor, qui affirmative valet pro altero casu, quod idem in paragrapho quinto demonstravi.

§. 10. Simili modo pertractandae erunt omnes fractiones continuae infinitae, quae ubique perfecte recurrunt pro quavis nova fractione, unde indoles expressionum nostrarum haud parum dilucebit. Exempla huius animadversionis sequentia allegabo.

I.
$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\text{etc.}}}}}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

II. $$\cfrac{2}{2+\cfrac{2}{2+\cfrac{2}{2+\cfrac{2}{2+\text{etc.}+}}}} = -1+\sqrt{3}$$

III. $$\cfrac{m}{m+\cfrac{m}{m+\cfrac{m}{m+\cfrac{m}{m+\text{etc.}}}}} = \frac{-m+\sqrt{4m+mm}}{2}$$

IV. $$\cfrac{n}{m+\cfrac{n}{m+\cfrac{n}{m+\cfrac{n}{m+\text{etc.}}}}} = \frac{-m+\sqrt{4n+mm}}{2}$$

V. $$\cfrac{n}{-m+\cfrac{n}{-m+\cfrac{n}{-m+\cfrac{n}{-m+n+\text{etc.}}}}} = \frac{m-\sqrt{4n+mm}}{2}$$

VI. $$\cfrac{-n}{m-\cfrac{n}{m-\cfrac{n}{m-\cfrac{n}{m-\text{etc.}}}}} = \frac{-m+\sqrt{mm-4n}}{2}$$

VII. $$\cfrac{-n}{-m-\cfrac{n}{-m-\cfrac{n}{-m-\cfrac{n}{-m-\text{etc.}}}}} = \frac{m-\sqrt{mm-4n}}{2}$$

Hae variae formulae varia nobis subministrant corollaria notatu haud indigna, quorum praecipua nunc indicabo.

§. 11. (*a*) Ex tribus prioribus exemplis inter se collatis apparet, non licere terminos fractionum, id est, numeratorem ac denominatorem mutare, etiamsi valor uniuscuiusque fractionis inde non mutetur, atque singulas fractiones perfecte eodem modo esse ubique replicandas tam ratione terminorum quam signorum.

(*b*) Hinc etiam sequitur, diversa ab invicem esse exemplum quartum et septimum, etiamsi fractiones n/m et $-n/-m$ per se sumtae alias recte censeantur inter se aequales. Notetur autem, numeros n et m poni per se positivos in formulis nostris et a solis signis praefixis $+$ vel $-$ indicari an sint affirmative vel negative accipiendis. Mutatio fractionis n/m in $-n/-m$ nihil aliud est quam terminorum multiplicatio per -1. Sed nullae multiplicationes, quae formam fractionis ullo modo permutent, admittendae sunt.

(*c*) Ob eandem rationem differt exemplum quintum a sexto, quia scilicet forma differunt ab invicem fractiones $n/-m$ et $-n/m$, utut valore suo eaedem.

(*d*) Tanta vis inest duabus praecedentibus notis, ut valor appositus in exemplo quarto sit semper realis, qui potest fieri imaginarius in exemplo septimo atque idem intelligendum est de exemplis quinto et sexto.

(*e*) Lex generalis theoriae nostrae haec est ut, quando literae n signum negativum praeponitur, idem signum sit praeponendum literae n in quantitate radicali, sicuti videtur in exemplo sexto ac septimo. Verum quando signum negativum numero m est praefixum, sicuti in exemplo quinto et septimo, tunc non solum signum contrarium, in valore fractionum continuarum, praeponendum est literae m, sed integra quantitas radicalis sub signo negativo adhibenda est.

(*f*) In solis exemplis VI et VII. emergens valor fieri potest imaginarius et fit imaginarius, si fuerit $n > \frac{1}{4}mm$. De hoc casu paucula seorsim dicam.

§. 12. Videamus igitur, quemadmodum fractiones continuae infinitae in praememorato casu suam indolem, statum scilicet imaginarium, prodant atque hunc in finem unicum allegemus exemplum. Ponatur $n=1$ et $m=1$ atque adeo $n > \frac{1}{4}mm$. Sic oritur valor fractionum pro exemplo sexto §. 10.

$$= \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$$

ac pro exemplo septimo

$$= \frac{1-\sqrt{-3}}{2};$$

Quod si autem ipsae expressiones ordine suo evolvantur, progrediendo ab fractione uni-membri, ad fractionem bimembrem, trimembrem, quadrimembrem etc. oriuntur successive pro utroque exemplo sequentes termini

$$-1.-\infty.0.-1.-\infty.0-\text{etc.}$$

in casu priore atque

$$1.+\infty.0.1.+\infty.0.\ \text{etc.}$$

in casu posteriore atque hae ambae series sic in infinitum progrediuntur pro singulis trinis terminis subsequentibus, nec adeoque ad valorem fixum convergere possunt, unde non mirum inventum valorem radice imaginaria exprimi.

In ipso limite inter utrumque statum, ubi scilicet est $n=1$ et $m=2$, resultans series terminorum sua specie aliquid intermedii habet, quandoquidem pro exemplo sexto invenitur series

$$-\frac{1}{2}\cdot-\frac{2}{3}-\frac{3}{4}\cdot-\frac{4}{5}\cdot-\frac{5}{6}\cdot-\text{etc.}$$

quae eadem cum signis affirmativis valet pro exemplo septimo, quaeque proprie non pertinet, sive numeratores sive denominatores spectentur, ad recurrentes; attamen uterque terminorum ordo hac gaudet proprietate, ut quivis terminus compositus sit ex duplo termino praecedente demto ante-praecedente. Demonstravi autem in veteribus Commentariis[7], simili titulo omnes series, quae dicuntur, algebraicas, pertinere ad series recurrentes. Ex praememorata serie terminorum per se liquet, fore terminum infinitesimum aequalem unitati sive negative sive affirmative sumtae, prout sermo sit de exemplo sexto vel septimo, id quod etiam formulae nostrae appositae indicant.

§. 13. Hactenus de fractionibus continuis infinitis earumque valore, in quibus perfecte eadem fractio haud interrupta ubique recurrat. Progredior ad ordinem secundum, quem ita voco, quando binae fractiones alterno ordine perpetuo recurrunt.

Ponam duas fractiones qualescunque n/m et q/p ex quarum perpetuo recursu formetur fractio continua in infinitum extensa sequentem in modum

$$\cfrac{n}{m+\cfrac{q}{p+\cfrac{n}{m+\cfrac{q}{p+\cfrac{n}{m+\text{etc.}}}}}}$$

quaeritur valor huius expressionis ex infinitis fractionibus compositae. Sit rursus valor iste $=\mathrm{S}$ atque puta duos novos terminos expressioni praefigi servata eius lege; habebis

7 Cf. II.5 - St.62 p.101 h.v.

$$\cfrac{n}{m+\cfrac{q}{p+\mathrm{S}}}$$

sive

$$\frac{np+n\mathrm{S}}{mp+m\mathrm{S}+q};$$

haec autem mutatio restituit perfecte fractionem continuam propositam utpote in infinitum extensam. Erit igitur

$$\frac{np+n\mathrm{S}}{mp+m\mathrm{S}+q}=\mathrm{S}.$$

unde invenitur

$$\mathrm{SS}+\frac{mp+q-n}{m}\mathrm{S}=\frac{np}{m}$$

ac denique[8]

$$\mathrm{S}=\frac{n-mp-q+\sqrt{4mnp+(mp+q-n)^2}}{2m}.$$

Ex ista formula sequentia defluunt corollaria.

(*a*) Si ponatur $q=n$ et $p=m$, obtinetur

$$\mathrm{S}=\frac{-m+\sqrt{4n+mm}}{2};$$

quod conforme est exemplo quarto paragraphi decimi.

(*b*) Si $q=0$ fit $\mathrm{S}=n/m$, atque sic in proposita expressione fractionum continuarum sola remanet fractio prima n/m, reliquis omnibus evanescentibus. Sed si in valore S accipiatur quantitas radicalis negative, fit $\mathrm{S}=-p$, qui valor revera hypothesi nostrae analytice satisfacit, simul autem applicatione sua inutilis est.

(*c*) Si rescindatur prima fractio n/m ita, ut expressio incipiat ab fractione q/p, indeque prorsus continuetur, ut ante; tunc mutabitur valor expressionis mutatusque eadem methodo reperitur ut ante; Sed et absque ullo novo calculo invenitur convertendo simpliciter, in priori expressione, literas n et q pariter atque literas m et p, atque sic alter iste valor expressionis fractionis continuae, quem vocabo σ, sequenti modo exprimitur,

8 corr. de: $\mathrm{S}=\frac{n-mp-q+\sqrt{4mmp+q-n)^2}}{2m}$ P.R.

$$\sigma = \frac{q-pm-n+\sqrt{4pqm+(pm+n-q)^2}}{2p}.$$

Simul autem ipsa argumenti natura facit

$$S = \frac{n}{m+\sigma},$$

quod ex sola expressione proposita patet, unde plura compendia in calculis locum invenient.

§. 14. Singulae praecedentis paragraphi formulae egregie contrahuntur, si omnes numeratores ponantur unitati aequales, servatis denominatoribus m et p, quo facto talis oritur expressio in infinitum continuanda.

$$\cfrac{1}{m+\cfrac{1}{p+\cfrac{1}{m+\cfrac{1}{p+\cfrac{1}{m+\text{etc.}}}}}}$$

quae supponit $n=q=1$, hisque substitutis valoribus, provenit

$$S = \frac{-p+\sqrt{\left(pp+\frac{4p}{m}\right)}}{2}$$

atque

$$\sigma = \frac{-m+\sqrt{\left(mm+\frac{4m}{p}\right)}}{2},$$

fitque simul, si inventi valores S et σ substituantur,

$$S = \frac{1}{m+\sigma},$$

quam simplicitatem haud expectassem, nisi illam praecognitam habuissem. Caeterum et hic, quod iam supra §. 11. coroll. (e) in casu simili monui, probe dispiciendum, an quantitates radicales negative sint accipiendae vel affirmative.

Quoties terminus $4p/m$ est negativus; atque si simul fuerit $4p/m > pp$, sive $p < 4/m$ fiunt valores S et σ imaginarii.

Exempl. 1. sit $m = 1$ et $p = 2$; habetur

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+1+\text{etc.}}}}} = S = \frac{-2+\sqrt{12}}{2} = -1+\sqrt{3}\,;$$

tum etiam, refecto primo membro, fit

$$\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\text{etc.}}}}} = \sigma = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$$

Quod si vero in isto exemplo fractiones continuae mutentur in fractiones simplices successive pro uno, duobus, tribus etc. membris, fit successive

$$S = 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{11} \cdot \frac{11}{15} \cdot \quad \text{et} \quad \sigma = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{11} \cdot \frac{11}{30},$$

ubi iam quintus terminus proxime accedit ad verum inventum valorem indicatum.

Exempl. 2. Ponatur nunc, retentis reliquis denominatoribus, $p = -5$; habebitur

$$\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{1-\text{etc.}}}}}} = S = \frac{5-\sqrt{5}}{2}\,.$$

Refectoque primo membro oritur pro expressione socia

$$-\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{1-\text{etc.}}}}} = \sigma = \frac{-1+\sqrt{\frac{1}{5}}}{2}\,.$$

Quod si fractiones continuae successive permutentur in fractiones simplices, hae satis cito convergunt ad determinatos valores S et σ, etiamsi pro priori mutatum fuerit signum quantitati radicali praefixum, pro altero retentum, cuius rei ratio peritiores haud effugiet.

Exempl. 3. Sit porro $p=-4$, pro qua positione utrobique quantitas radicalis evanescit fitque $S=+2$ et $\sigma=-1/2$. fractiones autem simplices pro hoc exemplo oriuntur successive

$$1\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{8}{5}\cdot\frac{5}{3}\cdot\quad \text{etc.}$$

pro S et

$$-\frac{1}{4}\cdot-\frac{1}{3}\cdot-\frac{3}{8}\cdot-\frac{2}{5}\cdot-\frac{5}{12}-\text{etc.}$$

pro σ uterque quidem valor ad praescriptum accedit, at lentius.

Exempl. 4. Denique ponatur $p=-2$, quae positio facit

$$S=\frac{2-\sqrt{-4}}{2}\quad \text{vel} \quad =1-\sqrt{-1}$$

ac

$$\sigma=\frac{-1+\sqrt{-1}}{2};$$

uterque valor imaginarius est, unde colligendum est, fractiones simplices, fractionibus continuis successive substitutas, ad nullum convergere valorem fixum, quod quidem ex ipsis fractionibus simplicibus resultantibus confirmatur, utpote quae sunt $1.2.\infty.0.1.$ etc. pro valore S simulque $-1/2.-1.\infty.0.-1/2.-$etc. pro valore σ.

§. 15. Eadem, qua usi sumus methodo, pertractari poterunt fractiones continuae tertii vel cuiuscunque altioris ordinis, in quibus nimirum eaedem fractiones, eodem ordine sub eodemque signo recurrunt post quamvis periodum, sive ex tribus sive ex pluribus fractionibus composita sit; hanc observationem unico illustrabo exemplo et quidem paulum compendiario. Proponatur nempe expressio in infinitum continuata

$$\cfrac{1}{m+\cfrac{1}{p+\cfrac{1}{r+\cfrac{1}{m+\cfrac{1}{p+\cfrac{1}{r+\text{etc.}}}}}}}=S.$$

Reperitur talis aequatio

$$S=\frac{1+pr+pS}{m+r+mpr+S+mpS}.$$

sit, verbi gratia, $m=1;\ p=2$ et $r=3$,
habebitur

$$S=\frac{-4+\sqrt{37}}{3},$$

qui valor facillima appropinquatione confirmatur. Quod si vero assumitur $r=p=m$ obtinebitur aequatio

$$mmSS+SS+m^3S+mS=mm+1 \quad \text{vel} \quad SS+mS=1$$

vel

$$S=\frac{-m+\sqrt{4+mm}}{2},$$

prouti invenimus §. 2. Efficietur etiam ut valor emergens S fiat pure rationalis, si assumatur arbitraria $p=-1/m$ tunc enim fit simpliciter

$$S=\frac{m-r}{mm+1}.$$

Ponatur, exempli gratia, $m=2;\ p=-1/2;\ r=1;$
sic expressio recte disposita proveniet

$$\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{-\frac{1}{2}+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{-\frac{1}{2}+\cfrac{1}{1+\text{etc.}}}}}}}=S=\frac{1}{5}.$$

Quotuscunque autem fuerit ordo fractionum continuarum, id est, ex quotcunque membris periodus quaevis composita sit, valor S semper aequatione quadrata poterit exprimi

§. 16. Qui praefatam contulerit theoriam cum Euleriana[9] (vid. nov. Commentar. Acad. Tom. XI. pag. 28.) simulque cum ea, quae extat in elementis Algebrae *Euleri* vel potius in additionibus huius operis, multas passim observabit conclusiones, egregie conspirantes, etiamsi methodo diversa erutas; modum autem nostrum suis peculiaribus aliquando gaudere posse commodis proxima occasione exponam. Impraesentiarum non alio fine negotium istud suscepi, quam ut examinarem, quibus in casibus expressiones *fractionales* infinitae formula definiri possint finita sive algebraica sive *transcendentali*, cuiusmodi est Brounkeriana a quadratura circuli pendens[10]. Subsidium ab inductione expectabam, adhibita methodo §. §. 6, 7, 8 et 9 exposita; sperabam me perventurum ad series recurrentes altiorum ordinum quarum terminus generalis semper est in potestate, at spes me fefellit. Vidi potius quid non sit quam quid sit. Novas orsus sum disquisitiones ab exemplo, post periodicas fractiones, simplicissimo, ponendo in singulis fractionibus unitatem pro numeratore et numeros naturales pro denominatoribus singulis se invicem subsequentibus. Nempe fractio continua haec est,

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5+\text{etc.}}}}}}$$

nec puto legem progressionis fingi posse simpliciorem.

§. 17. Analysin pro hoc exemplo sic rursus institui. Commutavi fractiones continuas in simplices incipiendo a fractione uni-membri indeque progrediendo ad fractionem continuam bimembrem, trimembrem, quadrimembrem et sic porro, hoc modo obtinui successive sequentes valores[11]

$$\frac{1}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{7}{10}\cdot\frac{30}{43}\cdot\frac{157}{225}\cdot\frac{972}{1393}\cdot\frac{6961}{9976}\cdot\frac{56660}{81201}\cdot\frac{516901}{740785}\cdot\frac{5225670}{7489051}\cdot\frac{57999271}{83120346}\cdot\text{etc.}$$

In his fractionibus tam numeratores quam denominatores notabili gaudent proprietate communi, cuius ope absque ullo negotio in immensum continuari potest

9 L. Euler E323 «De Usu novi algorithmi in problemate Pelliano solvendo» Novi Comment. Acad. Sc. Petrop. Vol. 11, 1765 (1767) p. 28–66. Opera Omnia ser. I vol. 3; E387 «Vollständige Anleitung zur Algebra» St. Petersbourg 1770. Opera Omnia ser. I vol. 1.

10 Cf. notes 1 et 2 p. 156 h.v.

11 huitième et neuvième termes: corr. de $\frac{5660}{81201}$ et $\frac{516901}{740795}$ A. dB.

fractionum progressio. Sint scilicet sive in serie numeratorum sive in serie denominatorum tres termini contigui A, B et C, sitque index termini C $=n$, erit

$$\mathrm{C}=n\mathrm{B}+\mathrm{A};$$

sic quintus numerator 157 sit $=5\times30+7$ pariterque quintus denominator $225=5\times43+10$.

Gaudet praeterea ista fractionum series hac proprietate ut, si bini termini qualescunque per crucem multiplicentur, ambo producta sola unitate differant, alternis vicibus in excessu atque defectu. Sic si numerator termini nostri decimi multiplicetur per denominatorem undecimi, prodit numerus

$$4343594984 81820$$

atque si numerator undecimi multiplicetur per denominatorem decimi idem oritur numerus sola unitate auctus; sequitur exinde, fractiones mox fieri inter se tantum non aequales; confirmatam habebimus hanc consequentiam, si fractionem quintam 157/225, parum a prima remotam, comparemus cum undecima 57999271/83120346 quae ultima est a nobis computata, videbimus fractionem priorem super alteram peccare in excessu at vix sensibili. Sic igitur acquiescere poterimus praefato valore 57999271/83120346 sive fractione decimali 0,6978. Dubium non est, quin detur formula verum valorem geometrica accuratione determinans, concessis praesertim quadraturis vel signis summatoriis; at eius inventio nova in calculo instituendo requirere videtur artificia.

Disquisitiones ulteriores de indole fractionum continuarum. Auct. Dan. Bernoulli

Novi Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae. Bd. XX p. 9–11. 1775 (1776)
II. 9* – St. 71*

Qui ea, quae in praecedente Ill. Auctoris dissertatione[1] de eodem hoc argumento sunt prolata, debite perpenderit, facile perspiciet, fractionum continuarum theoriae ibi propositae insigne allatum iri incrementum, si methodus in promtu foret, cuius ope fractiones simplices, fractionis continuae dato terminorum numero constantis valorem exprimentes, sine operosa earundem conversione analytico aliquo artificio assignari possent. Tradit igitur Ill. Auctor initio huius dissertationis per opportunum compendium, quo omnis in continuandis fractionibus simplicibus labor insigniter sublevatur, ita, ut currente veluti calamo nova quaevis fractio simplex formari atque conseribi possit, idque quacunque tandem lege, regulari sive pro arbitrio variata, fractio continua progrediatur. Qua occasione data, Ill. Auctor de famosa fractione continua Brouncheriana, quae in infinitum producta excessum quadrati supra circulum ei inscriptum, unitate expressum, indicat, novas adfert observationes, et notae *correctioni Wallisianae* aliam substituit multo efficaciorem, qua scilicet efficitur, ut valores perspicuis passibus ad veritatem accedant. Regula, quam Ill. Auctor proponit pro continuandis fractionibus istis, quas diximus, simplicibus generalis est pro omnibus qualibuscunque fractionibus continuis, ad indices arbitrarios constructis, iisque sive abruptis sive in infinitum continuatis. Casus autem, ubi indices vel periodico recurrunt ordine, vel constanter iidem permanent, soli videntur, qui fractionem continuam infinitam reddant mutabilem in expressionem finitam; a quibus si discesseris, non nisi adpropinquationes ad verum valorem obtinent; tumque de eo potissimum quaestio est, ubinam abrumpere operationem sit consultius et quaenam, si adcuratiorem desideres determinationem, adhibenda sit correctio minori labore determinanda.

Sequentes Ill. Auctoris observationes ad theoriam de fractionibus continuis sub forma generalissima spectatam pertinent; et quanta in iis tractandis adhibenda sit circumspectio, notabilioribus exemplis comprobant; ita, v. c. singulares casus sunt, si inter membra fractionis continuae occurrat aliquod, cuius vel numerator vel denominator sit $=0$; vel si membrum intermedium sit negativum, veluti $-f/g$ ubi quidem sollicite dispiciendum, num ista fractio sit $-f/+g$ vel $+f/-g$;

1 Cf. II. 8 – St. 70 p. 156 h. v.

qui bini casus, per se iidem, differunt tamen ob diversitatem, quam sequentibus membris inducunt, si talis fractio negativa sit *intermedia;* quae ipsa quoque ratio est, cur indices $+a/+b$ et $-a/-b$ inter se differe sint censendi, unde vix satis praedicari potest necessitas, ut, qui proponit fractionem quandam continuam, non solum valorem indicum, sed et formam eorum tam ratione terminorum, quam signorum, distincte exprimat, ex quo et id perspicitur, eos, qui formas fractionales semper tales constituunt, ut singuli numeratores unitate exprimantur, minimam huius argumenti particulam exhaurire; et facile in errores prolabi posse; quod Ill. Auctor exemplo comprobat.

Sub finem dissertationis theoria hic proposita comparatur cum Euleriana Tomo XI. horum Comment. tradita; et usus fractionum continuarum in *evolutione radicum quadratarum* ostenditur, ubi id imprimis peculiare habet Ill. Auctor, ut radices quadratas, v.c. $\sqrt{7}$; $\sqrt{13}$; $\sqrt{61}$; etc. fractionibus continuis *inferiorum* ordinum veluti primi ordinis, ubi constanter indices permanent iidem, exprimere doceat.

Disquisitiones ulteriores de indole fractionum continuarum.

Novi Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae. Bd. XX p. 24–47. 1775 (1776)
II. 9 - St. 71

§. 1. Cum nuper, data occasione, theoriam, de fractionibus continuis[1] ruminarem, incidi, ut fieri plerumque solet, in aliquot huius argumenti proprietates, quae visae fuerunt notatu digniores, quasque partim in superiori transactione exposui; quas reliquas feci exponam in praesente, non quod altioris indaginis eas crediderim, sed quod non meminerim fuisse indicatas saepeque non fine matura diiudicatione interpretandas putem.

Usus fractionum continuarum saepissime requirit, ut in fractiones simplices permutentur, ita ut hae fiant successive aequales fractionibus continuis incipiendo ab unimembri indeque progrediendo ad bimembres, trimembres et sic porro. Duo dedi huius praecepti exempla in priori transactione §. §. 6. 16 et 17. Observavi autem hac de re regulam generalem pro fractionibus continuis qualibuscunque et utcunque variabilibus.

§. 2. Fractionem continuam sub forma considerabo generalissima, quae ita se habet,

$$\cfrac{a}{\alpha + \cfrac{b}{\beta + \cfrac{c}{\gamma + \cfrac{d}{\delta + \cfrac{e}{\varepsilon + \cfrac{f}{\phi + \text{etc.}}}}}}}$$

huius adeoque membra, quae vocabo *indices*, sunt

$$\frac{a}{\alpha} \cdot \frac{b}{\beta} \cdot \frac{c}{\gamma} \cdot \frac{d}{\delta} \cdot \frac{e}{\varepsilon} \cdot \frac{f}{\phi} \quad \text{etc.}$$

Absit autem, ut dicamus, rem esse merae curiositatis numeratores

$$a.b.c.d.e.f. \text{ etc.}$$

1 Cf. II. 8 - St. 70 p. 156 h.v.

generaliter exprimere, cum sufficiat unitatem pro singulis numeratoribus adhibere. Convertamus fractionem continuam in fractionem simplicem, pro uno, duobus, tribus etc. membris, atque sic habebimus successive sequentes fractiones simplices

$$\frac{a}{\alpha}\cdot\frac{a\beta}{\alpha\beta+b}\cdot\frac{a\beta\gamma+ac}{\alpha\beta\gamma+b\gamma+\alpha c}\cdot\frac{a\beta\gamma\delta+ac\delta+a\beta d}{\alpha\beta\gamma\delta+b\gamma\delta+\alpha c\delta+\alpha\beta d+bd}$$
$$\frac{a\beta\gamma\delta\varepsilon+ac\delta\varepsilon+a\beta d\varepsilon+a\beta\gamma e+ace}{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon+b\gamma\delta\varepsilon+\alpha c\delta\varepsilon+\alpha\beta d\varepsilon+bd\varepsilon+\alpha\beta\gamma e+b\gamma e+\alpha ce}\ \text{etc.}$$

Apparet ergo, quam fastidiosum foret opus, hasce fractiones multo ulteriores prosequi, cum tam numeratores quam denominatores continue magis magisque fiant compositi; decima iam fractio numeratorem habebit ex quinquaginta quinque membris et denominatorem ex octuaginta novem compositum. Attamen non alio fine totum suscipitur negotium, quam ut fractio remotior reperiatur, quae vix differat a fractionibus sequentibus; haec enim natura est fractionum continuarum infinitarum, ut nisi, veluti data opera, indices $a/\alpha.\ b/\beta.\ c/\gamma.$ etc. varie intorqueantur, ad valore n convergant constantem.

§. 3. Cum igitur non minus necessarium sit quam operosum, ut fractio continua, pluries novo membro aucta, in fractionem simplicem convertatur; peroportune mihi contigit compendium, quo omnis in continuandis fractionibus simplicibus labor insigniter sublevatur, ita ut currente veluti calamo nova quaevis fractio simplex formari atque conscribi possit; compendium istud generale est, quacunque lege fractio continua progrediatur sive regulari sive pro arbitrio variata, id est, utcunque progrediantur indices fractionis continuae, quos vocavi

$$\frac{a}{\alpha}\cdot\frac{b}{\beta}\cdot\frac{c}{\gamma}\cdot\frac{d}{\delta}\cdot\frac{e}{\varepsilon}\cdot\frac{f}{\phi}\ \text{etc.}$$

Sint duae ultimae fractiones simplices iam inventae M/N et P/Q atque denotet f/ϕ indicem fractionis simplicis proxime subsequentis, dico fore hanc novam fractionem

$$=\frac{\mathrm{P}\phi+\mathrm{M}f}{\mathrm{Q}\phi+\mathrm{N}f};$$

Igitur tota regula pro invenienda nova fractione in hoc consistit, ut numerator ultimae fractionis multiplicetur per denominatorem novi indicis atque numerator penultimae fractionis per numeratorem novi indicis. Sic erit aggregatum productorum aequale numeratori novae fractionis sive

$$=\mathrm{P}\phi+\mathrm{M}f,$$

atque si eadem plane operatiuncula repetatur cum denominatoribus inventis Q et N, habebitur novus denominator

$$=Q\phi+Nf;$$

integra autem superveniens fractio simplex erit

$$=\frac{P\phi+Mf}{Q\phi+Nf};$$

sic aliud non requiritur, quam ut inter scribendum praememorato modo literae ϕ et f iuxta ponantur. Secundum hanc normam fiet in praecedente paragrapho fractio simplex sexta

$$=\frac{a\beta\gamma\delta\varepsilon\phi+ac\delta\varepsilon\phi+a\beta d\varepsilon\phi+a\beta\gamma e\phi+ace\phi+a\beta\gamma\delta f+ac\delta f+a\beta df}{a\beta\gamma\delta\varepsilon\phi+b\gamma\delta\varepsilon\phi+ac\delta\varepsilon\phi+a\beta d\varepsilon\phi+bd\varepsilon\phi+a\beta\gamma e\phi+b\gamma e\phi+ace\phi+a\beta\gamma\delta f+b\gamma\delta f+ac\delta f+a\beta df+bdf}.$$

Praestantissimum utique est hoc compendium, simul autem satis obvium, ut mihi vix persuadere possim, a nemine adhuc fuisse ante me animadversum. Quod si vero, relictis expressionibus analyticis, ad exempla pure arithmetica et numerica descendamus, quaevis fractio, ex solo uno numeratore et denominatore constans, simplicissimam postulat multiplicationem per numerum f et ϕ.

§. 4. Exposito non obstante adminiculo, taediosus requiritur calculus ad fractionem simplicem remotiorem determinandam, quoties indices

$$\frac{a}{\alpha}\cdot\frac{b}{\beta}\cdot\frac{c}{\gamma}\cdot \quad \text{etc.}$$

maioribus numeris iisque in progessu suo valde divergentibus exprimuntur. Arripio hanc occasionem pauca quaedam dicendi de famosa fractione continua Brouncheriana[2], quae omnium prima ab Illustri Auctore in scenam producta fuit. In hac fractione continua, indices

$$\frac{a}{\alpha}\cdot\frac{b}{\beta}\cdot\frac{c}{\gamma}\cdot \quad \text{etc.}$$

ita progrediuntur

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{2}\cdot\frac{25}{2}\cdot\frac{49}{2}\cdot\frac{81}{2}\cdot\frac{121}{2}\cdot \quad \text{etc.}$$

2 Correspondance Lord Brouncker et J. Wallis; cf. oeuvres de Fermat.

Ipsa autem fractio continua in infinitum producta indicare dicitur excessum quadrati super circulum ei inscriptum, unitate expressum. At certe fractio continua resultans pro aliquo indicum numero hoc laborat incommodo, ut non solum ad magnos protinus perducat numeros, sed et ipsi valores lento ac vago gradu ad verum accedant, cuius rei ratio posita est in magna divergentia indicum; sola speciosa novitatis gratia expressionem Brouncherianam ab oblivione eripuit. Cum autem non liceat absque maximo labore fractionem continuam ad magnum terminorum numerum evehere eiusque valorem explorare, *Wallisius*[3] correctionem adhibuit pro ultimo indice, in quo subsistere placet, et quidem pro eius denominatore; haec correctio in eo consistit, ut, loco binarii, in ultimo denominatore ponat binarium auctum radice numeratoris. Vi huius correctionis, si in septimo indice subsistere lubeat, hic faciendus erit

$$= \frac{169}{2+13} \quad \text{vel} \quad = \frac{169}{15}$$

mutato denominatore 2 in 15.
Ergo in hoc exemplo septem indices veriores erunt

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{9}{2} \cdot \frac{25}{2} \cdot \frac{49}{2} \cdot \frac{81}{2} \cdot \frac{121}{2} \cdot \frac{169}{15};$$

Hi indices subministrant sequentes successive fractiones simplices

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{13} \cdot \frac{29}{76} \cdot \frac{156}{789} \cdot \frac{2661}{7734} \cdot \frac{24198}{110937} \cdot \frac{712679}{2971101};$$

quarum ultima etsi correcta valde adhuc deficit a vero expressionis, in infinitum continuatae, valore. Quod si ultimae fractioni unitatem addamus, habebimus proxime valorem quadrati circulo circumscripti, posito ipso circulo aequali unitati; unde deducitur ratio quadrati ad circulum inscriptum ut 3683780 ad 2971101, quae iuxta minor est in ratione proxime ut 39 ad 40. Si in septimo termino correctio (qua index naturalis $169/2$ mutatus fuit in $169/15$) non adhibita fuisset, ultima fractio simplex oritura fuisset $498105/1528920$, ex qua deducitur ratio inter quadratum et circulum ut 2027025 ad 1528920 quae ratio nunc peccat in excessu in ratione proxime ut 27 ad 26. unde concludo expressionem continuam Brouncherianam infinitam per se tardissime ad scopum tendere nec correctionem ultimi termini a *Wallisio* descriptam esse admodum efficacem; aliam exponam correctionem, quae visa mihi fuit haud parum efficacior et quae quodammodo inseruire poterit in

3 J. Wallis «Arithmetica infinitorum» Oxonii (1655)

confirmationem singularis theorematis Brouncheriani. Convertamus fractiones simplices, omissa correctione Wallisiana, nempe

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{13}\cdot\frac{29}{76}\cdot\frac{156}{789}\cdot\frac{2661}{7734}\cdot\frac{24198}{110937}\cdot\frac{498105}{1528920}$$

in fractiones decimales, quae erunt

0,5000; 0,1538; 0,3816; 0,1977; 0,3441; 0,2181; 0,3257;

theorema autem Brouncherianum indicat fractionem 0,2732, ad quam progressio fractionum simplicium convergere et denique tantum non attingere deberet. Quis huiusmodi approximationem dignam labore existimet, cum vel ultimus terminus tam enormiter a vero valore recedat? Attamen si inter singulos binos terminos contiguos sumantur media arithmetica, haec facile cum theoremate conciliabuntur; termini intermedii sic se habebunt

0,3269; 0,2677; 0,2896; 0,2709; 0,2811; 0,2719.

Separentur hi termini in duas classes, alteram pro terminis ordine suo imparibus, alteram pro paribus; prima classis constabit ex terminis

0,3269; 0,2896; 0,2811;

secunda ex terminis

0,2677; 0,2709; 0,2719;

In utraque classe valores perspicuis passibus tendunt ad fractionem 0,2732 ab Illustri *Brounchero* pro quatuor figuris erutam, et quidem descendendo in prima classe, ascendendo in secunda; praeferenda autem est classis secunda, quia eius termini multo minus variabiles sunt, atque sufficiunt in ilia tres termini in confirmationem theorematis, cuius demonstratio directa tot spinis obsita est. Quod si autem media arithmetica inter successivos valores fractionum simplicium theorema confirmant, idem quoque confirmatum habebimus pro progressione fractionum simplicium ipsarum, quia tandem fiunt inter se aequales.

§. 5. Quae in praegressa dissertatione §. §. 16 et 17.[4] exposui, casus sunt particulares regulae nostrae generalissimae, §. 3. huiusce posterioris transactionis, expositae; haec regula generalis est pro omnibus qualibuscunque fractionibus continuis, ad indices arbitrarios constructis, iisque sive abruptis sive in infinitum

4 Cf. II.8 - St.70 p.171 h.v.

continuatis. Ergo progressio fractionum simplicium in genere transcendenter recurrens est, quia indices habet varibiles et pertinet ad secundum ordinem, quia quivis terminus ex duobus praecedentibus construitur; nemo autem, quod sciam, docuit exprimere terminum generalem in huiusmodi seriebus transcendenter recurrentibus, nisi studiose efficiatur, ut indices vel recurrant periodice vel constanter iidem permaneant, quos casus in prima nostra dissertatione pertractavimus et quos solos esse existimo, qui fractionem continuam in infinitum continuatam reddant mutabilem in expressionem finitam sive algebraicam sive numericam. Praeter hosce casus nihil habemus nisi adpropinquationes ad verum quaesitum valorem; tunc autem disquirendum est, ubinam consultius sit abrumpere operationem et quaenam correctio adhiberi possit, minori labore determinanda, si accuratiorem rei determinationem desideremus. Atque in hoc negotio rite conficiendo plurima colligere licet adminicula in paragrapho nostro tertio, si attentius perpendatur.

§. 6. Si inter membra vel indices fractionis continuae aliquis occurrat, cuius numerator sit $=0$, hic casus etsi per se clarus aliquam meretur attentionem. Puta fractionem continuam successive mutatam in fractiones simplices aequivalentes, quarum duae ultimae sint rursus M/N et P/Q, sitque f/ϕ index proxime imminens; erit proxima fractio simplex

$$=\frac{P\phi+Mf}{Q\phi+Nf} \qquad (§.\ 3.);$$

pone $f=0$, habebis

$$\frac{P\phi}{Q\phi}.$$

Deinceps novus superveniat index qualiscunque l/λ, habebis proximam fractionem simplicem resultantem

$$=\frac{P\phi\lambda+Pl}{Q\phi\lambda+Ql};$$

pro alio sequente indice qualicunque m/μ, oritur sequens fractio simplex

$$=\frac{P\phi\lambda\mu+Pl\mu+P\phi m}{Q\phi\lambda\mu+Ql\mu+Q\phi m} \qquad \text{etc.}$$

omnium harum fractionum simplicium communis est valor P/Q nec adeoque porro variabilis, quacunque lege variabili indices progrediantur. Sint, verbi gratia, indices pro fractione continua

$$\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{0}{1}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4} \quad \text{etc.}$$

Ex his formabuntur fractiones simplices ad ductum regulae §. 3. sequentes

$$\frac{1}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{9} \cdot \frac{22}{33} \cdot \frac{106}{159} \quad \text{etc.}$$

Idem etiam sequitur ex fractionibus simplicibus §. 2. expositis; fac ibi $c=0$, fient singulae fractiones simplices, quae post secundam sequuntur, ipsi secundae aequales sive

$$=\frac{a\beta}{a\beta+b},$$

si, deletis terminis in quibus est litera c, numeratorem et denominatorem dividas per eorum maximum communem divisorem. Sic pro fractione simplici sexta, quae paragrapho tertio plenissime exposita est, deletis praefatis terminis, oritur fractio

$$\frac{a\beta\gamma\delta\varepsilon\phi+a\beta d\varepsilon\phi+a\beta\gamma e\phi+a\beta\gamma\delta f+a\beta df}{a\beta\gamma\delta\varepsilon\phi+b\gamma\delta\varepsilon\phi+a\beta d\varepsilon\phi+bd\varepsilon\phi+a\beta\gamma e\phi+b\gamma e\phi+a\beta\gamma\delta f+b\gamma\delta f+a\beta df+bdf},$$

in qua tam numerator quam denominator communem habent divisorem

$$\gamma\delta\varepsilon\phi+d\varepsilon\phi+\gamma e\phi+\gamma\delta f+df$$

factaque divisione oritur simplex fractio

$$\frac{a\beta}{a\beta+b}.$$

Egregie igitur congruunt expressiones nostrae ipsi argumenti naturae. Sequitur ex inde quod error, qui ex abruptione fractionis continuae committitur, tanto minor est, quanto minorem habuerit numeratorem index proximus quantoque maiorem denominatorem. Caeterum hanc annotationem unice in confirmationem formulae nostrae §. 3. adiicere placuit.

§. 7. Aliam induit speciem argumentum nostrum, cum retentis denominationibus in praecedente paragrapho adhibitis ponitur $\phi=0$, id est, cum in indice proxime imminente ponitur denominator $=0$. Sint rursus post duas ultimas fractiones, quas voco simplices; M/N et P/Q tres indices proximi f/ϕ; l/λ et m/μ, ponaturque $\phi=0$, manentibus caeteris qualibuscunque; provenient inde sequentes fractiones simplices

$$\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}} \cdot \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}} \cdot \frac{\mathrm{M}f}{\mathrm{N}f} \cdot \frac{\mathrm{M}f\lambda+\mathrm{P}l}{\mathrm{N}f\lambda+\mathrm{Q}l} \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{M}f\lambda\mu+\mathrm{P}l\mu+\mathrm{M}fm}{\mathrm{N}f\lambda\mu+\mathrm{Q}l\mu+\mathrm{N}fm}$$

Intelligitur ex duabus ultimis fractionibus, quare in tertia fractione retinendus sit factor communis f; ratio nempe est, quod essentialiter concurrat ad formandos terminos sequentes; postquam autem fractiones constructae sunt, tunc demum in alios usus licet illas ad minimos terminos reducere. Exinde videmus, *primo* quod valor novae fractionis simplicis, indici respondentis, cuius denominator ponitur aequalis nihilo, sit $=\mathrm{M}/\mathrm{N}$ sive $=$fractioni simplici ante-praecedenti; sic si sextus index denominatorem habeat nihilo aequalem; orietur valor quartae fractionis; *secundo* quod eadem nova fractio non sit exprimenda per M/N sed per $\mathrm{M}f/\mathrm{N}f$, multiplicando scilicet eius terminos per numeratorem indicis novae fractioni respondentis.

Iam vero quaeritur, quomodo ambo haec praecepta conveniant cum formulis §. §. 2. et 3. exhibitis: id ut appareat utar formula paragraphi tertii, in qua supponam $\phi=0$; pro hac suppositione contrahitur formula generalior in hanc specialiorem

$$\frac{a\beta\gamma\delta f+ac\delta f+a\beta df}{a\beta\gamma\delta f+b\gamma\delta f+ac\delta f+a\beta df+bdf},$$

cuius valor, facta divisione per f, est quartus terminus §. 2. expositus. Sic igitur expressiones nostrae generales egregie inter se cohaerent; verum ut et alteram partem confirmemus, nunc supponemus denominatorem γ, pro tertia fractione simplici, aequalem nihilo, ut et aliquot terminos sequentes examinare possimus; fractio simplex tertia §. 2. haec est

$$\frac{a\beta\gamma+ac}{a\beta\gamma+b\gamma+ac};$$

ponatur $\gamma=0$ et prodibit tertia fractio simplex ac/ac, cuius valor est$=a/a$ atque adeo $=$ primae fractioni simplici; si ulterius pergatur, habebitur pro quarta fractione, posito $\gamma=0$,

$$\frac{ac\delta+a\beta d}{ac\delta+a\beta d+bd}.$$

Sic igitur habemus pro secunda fractione

$$\frac{a\beta}{a\beta+b};$$

pro tertia

$$\frac{ac}{ac}$$

atque pro quarta

$$\frac{ac\delta+a\beta d}{ac\delta+a\beta d+bd};$$

sic hae tres fractiones rectissime respondent regulae nostrae §. 3. explicatae, secus atque fieret si pro tertia fractione ac/ac poneretur simpliciter a/a, quia post duas fractiones simplices contiguas

$$\frac{a\beta}{a\beta+b} \quad \text{et} \quad \frac{a}{a}$$

haec eadem regula dat pro sequente fractione simplice

$$\frac{a\delta+a\beta d}{a\delta+a\beta d+bd},$$

cuius valor non idem est cum vero valore

$$\frac{ac\delta+a\beta d}{ac\delta+a\beta d+bd};$$

unicus est casus, in quo conveniunt ambae expressiones, nempe cum ponitur $c=1$.

Ex hisce animadversionibus intelligimus, quod si fractiones continuas successive omnes transformare velimus in fractiones simplices eumque in finem quamvis fractionem simplicem formare ex duabus praecedentibus fractionibus iamiam inventis, secundum regulam nostram §. 3. descriptam, quod, inquam, non liceat fractiones simplices resultantes ad minores terminos reducere, etiamsi id fieri possit. Haec omnia veram theoriam de fractionibus continuis, sive abruptis sive in infinitum progredientibus, sub forma generalissima spectatam illustrant.

§. 8. Unum superest hac occasione minime silentio praetermittendum; nempe ut omnis circumspectio adhibeatur, quando indices occurrunt negativi. Si aliquis datur index negativus, dispiciendum erit an negativus ponendus sit ob numeratorem negativum posito denominatore affirmativo, an ob denominatorem negativum posito numeratore affirmativo; sin in fractione continua abrupta ultimus index fuerit negativus, uterque modus eodem recidit, at aliter se res habet, si de aliquo indice intermedio sermo sit; tunc enim inter se differunt fractiones $-s/t$ et $s/-t$, non per se sed ob diversitatem quam sequentibus membris in fractione continua iniiciunt, igitur quisque analysta rem omnem accuratissime secum determinet; optime extricabimus questionem per exemplum.

Sermo sit de secundo indice b/β; si quis hunc indicem reducere velit ad duos trientes negative sumptos, nondum satis suam sententiam aperuit; an ponet

$$\frac{-2}{3} \quad \text{an} \quad \frac{2}{-3} \quad \text{vel etiam} \quad \frac{-\frac{2}{3}}{1} \quad \text{vel} \quad \frac{\frac{2}{3}}{-1}\,?$$

Singuli casus pro re nata locum habere possunt aeque ac innumeri alii, quandoquidem nihil impedit, quominus literis b et β numeros fractos substituamus; igitur, ut tollatur omnis ambiguitas, requiritur ut pro quovis indice tam numerator quam denominator, unusquisque cum suo vero signo simulque cum praescriptis terminis, ut, inquam, haec omnia rite indicentur et quidem tam ratione fractionum per se affirmativarum, quam negativarum, quandoquidem etiam inter se differre censendi sunt indices $+b/+\beta$ et $-b/-\beta$. Postquam singuli indices hoc modo exacte fuerunt, praescripti, erunt, in fractione continua formanda singula membra signo affirmativo inter se connectenda. Sic si pro fractione formanda tri-membri proponantur tres indices $1/1 \cdot -2/3 \cdot 2/1$, fiat

$$a=1;\qquad \alpha=1;\qquad b=-2;\qquad \beta=3;\qquad c=2\quad \text{et}\quad \gamma=1$$

formabiturque fractio continua

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{-2}{3+\cfrac{2}{1}}}\text{, cuius valor} = \frac{5}{3},$$

quem etiam formula nostra

$$\frac{\alpha\beta\gamma+\alpha c}{a\beta\gamma+b\gamma+a c} \qquad (\S.\ 2.)$$

recte indicat; at si indices proponatur

$$a=1;\qquad \alpha=1;\qquad b=2;\qquad \beta=-3;\qquad c=2\quad \text{et}\quad \gamma=1,$$

formabitur fractio continua

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{-3+\cfrac{2}{1}}}\quad \text{cuius valore nunc} = -1,$$

quem rursus eadem formula nostra optime indicat; si porro indices sint formati ex valoribus

$$a=1;\qquad \alpha=1;\qquad b=-2;\qquad \beta=-3;\qquad c=2\quad \text{et}\quad \gamma=1$$

formabitur fractio continua

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{-2}{-3+\cfrac{2}{1}}}\quad \text{quae est} = \frac{1}{3},$$

idemque valor denuo ex formula allegata oritur, cum tamen fractio continua

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{3+\cfrac{2}{1}}} \quad \text{sit} = \frac{5}{7}$$

sive immediate sumta, sive per formulam aestimata. Alius rursus valor oritur, si retentis caeteris denominationibus ponatur

$$b = \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad \beta = 1\,;$$

Ita pro fractione continua habemus

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{2/3}{1+\cfrac{2}{1}}} \quad \text{cuius valor} = \frac{9}{11},$$

quem iterum exhibet formula nostra sub iisdem denominationibus.

§. 9. Nec dum sic omnibus liberamur ambiguitatibus; postquam enim pro quovis indice fractionali, tam numerator quam denominator, unusquisque cum vero suo signo sive affirmativo sive negativo, fuerunt probe definiti, insuper definiendum erit an talis fractio sit affirmative vel negative accipienda. Nos autem in praesente pertractatione quemvis indicem sub signo affirmativo adhibuimus ita, ut in fractione continua, unusquisque numerator sub signo + additus sit praecedenti denominatori, cum tamen indici signum negativum praefixum esse possit; sic index ita se habere potest $-(b/\beta)$ vel $-(-b/\beta)$ vel $-(-b/-\beta)$. In huiusmodi casibus licebit praefatos indices transformare, absque ulla laesione valoris pro fractione continua, modo denominator in indice nihil mutetur; transformatio in eo consistat ut ponatur

$$+\frac{-b}{\beta}\,; \quad +\frac{b}{\beta}\,; \quad +\frac{b}{-\beta}\,;$$

quo facto omnia ad hypotheses et denominationes nostras paragraphi secundi reducta habebimus. Sic fractio continua

$$\cfrac{1}{1-\cfrac{-1}{2+\cfrac{1}{3}}} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3}}} = \frac{7}{10},$$

pariterque fractio continua

$$\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3}}} = \cfrac{1}{1+\cfrac{-1}{2+\cfrac{1}{3}}} = \frac{7}{4}.$$

Inde deducitur regula, indices fractionales ita semper esse praescribendos ut in formanda fractione continua singulae fractiones sub signo affirmativo inter se esse connectendas in antecessum supponatur; haec autem suppositio nihil demit universalitati theoriae nostrae semperque locum habet.

§. 10. Vix satis praedicari potest necessitas, quae postulat, ut non solum ad valorem fractionis sed et ad formam eius, tam ratione signorum quam terminorum attendamus. Qui indices fractionales formant, quorum singuli numeratores unitate exprimuntur, hi minimam argumenti particulam exhauriunt, imo facile se in errorem praecipitant, quando theorema nostrum paragraphi tertii adhibeut ad valores fractionum continuarum successive determinandos. Hanc observationem exemplo illustrabo.

Problema. Quaeritur progressio indicum fractionalium talis ut fractiones continuae inde formatae successive valores obtineant, qui ita progrediantur

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{6}{7} \cdot \quad \text{etc.}$$

Sint indices quaesiti

$$\frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\beta} \cdot \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{1}{\delta} \cdot \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{1}{\phi} \cdot \quad \text{etc.}$$

formabitur inde fractio continua,

$$\cfrac{1}{\alpha+\cfrac{1}{\beta+\cfrac{1}{\gamma+\cfrac{1}{\delta}+\text{etc.}}}}$$

cuius valores successive ponendi erunt aequales

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \quad \text{etc.}$$

hinc deducitur

$$\alpha=2, \qquad \beta=-2$$

pro duobus terminis initialibus; ex his fit pro tertio termino (§. 3.)

$$\frac{2\gamma+1}{3\gamma+2}=\frac{3}{4}$$

sive

$$\gamma=-2;$$

deinceps pro termino quarto

$$\frac{3\delta+2}{4\delta+3}=\frac{4}{5}$$

seu

$$\delta=-2 \text{ etc.}$$

Sic indices quaesiti

$$\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}\cdot\frac{1}{\gamma}\cdot\frac{1}{\delta}\cdot\frac{1}{\varepsilon}\cdot\frac{1}{\phi}\cdot \quad \text{etc.}$$

proveniunt

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{-2}\cdot\frac{1}{-2}\cdot\frac{1}{-2}\cdot\frac{1}{-2}\cdot\frac{1}{-2} \text{ etc.}$$

ipsaque fractio continua hanc induit formam

$$\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{-2+\cfrac{1}{-2+\cfrac{1}{-2+\cfrac{1}{-2+\cfrac{1}{-2+\text{etc.}}}}}}}$$

quae successive sequentes subministrat valores seu fractiones simplices

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{12}{19}\cdot\frac{29}{46}\cdot\frac{70}{111}\cdot \quad \text{etc.}$$

atque hi valores plane sunt diversi a valoribus propositis

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{6}{7}\cdot \quad \text{etc.}$$

Errorem proditurum non obscure provideram; vera obtinebitur solutio, si quaesiti indices generaliter exprimuntur iisque utamur ad normam §. 3. descriptam; sint scilicet indices fractionales quaesiti

$$\frac{a}{\alpha}\cdot\frac{b}{\beta}\cdot\frac{c}{\gamma}\cdot\frac{d}{\delta}\cdot\frac{e}{\varepsilon}\cdot\frac{f}{\phi}\cdot \quad \text{etc.}$$

quorum statim duo priores vulgari calculo determinentur qui deinceps docebunt tam numeratores quam denominatores cum veris eorundem signis, hoc modo invenitur

$$a=1; \qquad b=-1; \qquad c=-1; \qquad d=-1; \qquad e=-1; \qquad f=-1;$$

singuli autem denominatores fiunt $=2$; sunt itaque veri indices

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{-1}{2}\cdot\frac{-1}{2}\cdot\frac{-1}{2}\cdot\frac{-1}{2}\cdot \quad \text{etc.}$$

atque adeo fractio continua haec erit

$$\cfrac{1}{2+\cfrac{-1}{2+\cfrac{-1}{2+\cfrac{-1}{2+\text{etc.}}}}}$$

cuius successive valores secundum praescriptam legem sunt

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{6}{7}\cdot \quad \text{etc.}$$

Quod si vero, calculo vulgari absque subsidio paragraphi tertii, singuli numeratores ponantur $=1$ atque successive determinentur denominatores; reperiuntur veri indices aliter expressi, nempe

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{-2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{-2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{-2}\cdot \quad \text{etc.}$$

tuncque fractio continua sub alia forma, quamvis aequivalente, talis obtinetur

$$\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{-2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{-2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{-2+\text{etc.}}}}}}}$$

in qua denominatores signum alternant.

§. 11. Sequitur exinde huiusmodi fractiones continuas *a posteriori* formari posse, quae pro quocunque membrorum numero dato praescriptum obtineant valorem; si in praefato exemplo numerus membrorum dicatur N, erit valor fractionis continuae

$$=\frac{N}{N+n}$$

atque, si fuerit infinita, assurget ad unitatem, quod conforme est exemplo quarto paragraphi decimi prioris dissertationis, rescisso enim primo membro, quod reliquum est, fit $= -1$; ergo summa fractionis continuae in infinitum continuatae sit

$$=\frac{1}{2+1}=1.$$

Sic quoque pro valoribus successivis

$$\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{8}{13}$$

fiunt indices fractionales

$$\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{1}\cdot \quad \text{etc.}$$

Pro valoribus

$$\frac{1}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{7}{4}\cdot\frac{9}{5} \quad \text{etc.}$$

reperientur indices

$$\frac{1}{1}\cdot\frac{-1}{3}\cdot\frac{-1}{2}\cdot\frac{-1}{2} \quad \text{etc.}$$

qui fractionem continuam in infinitum extensam formant

$$= \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{3 - 1}} = 2,$$

ut legi praescriptae conforme est. Si velis, ut recurrentes valores prodeant,

$$\frac{1}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{2}{3} \quad \text{etc.};$$

assumes indices

$$\frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{0} \cdot \frac{1}{0} \cdot \frac{1}{0} \cdot \frac{1}{0} \quad \text{etc.}$$

Quaecunque fingatur lex, qua valores in serie continua progredi ponuntur, si ista lex talis sit, ut terminus infinitesimus exinde intelligatur, erit fractio continua in infinitum extensa praefato termino infinitesimo aequalis et quia non dari fractiones continuas infinitas existimo, quarum valor algebraice determinari possit praeter illas, quarum indices fractionales, certo modo, recurrant; oportet, si recte iudico, ut pro huiusmodi casibus, quaesiti indices semper desinant in terminos periodice recurrentes.

§. 12. Si quis integram hanc theoriam nostram conferre velit cum ea, quam illustris geometra, *Leonhardus Eulerus* exposuit in novis commentariis tom. XI. pag. 33. et seq.[5] ambas methodos nostras valde diversas quidem at minime contrarias deprehendet, simulque intelliget, quam necesse sit, ut indicibus fractionalibus utamur generalius expressis.

Praelaudatus Auctor multa habet *de evolutione radicum quadratarum per fractiones continuas*, atque methodum docet ingeniosam omnium numerorum integrorum radices quadratas ad fractiones continuas reducendi. Id vero infinitis modis fieri potest, nec enim quaestio per se est determinata; veruntamen fractiones continuae, quae adhiberi possunt, omnes eius sunt indolis, ut indices periodice recurrant iidem eodemque ordine; unde non male reducentur ad ordinem, primum, secundum, tertium etc. prouti quaevis periodus vel ex uno, vel ex duobus, vel ex tribus terminis etc. constiterit. Nec necesse est ut periodus semper a primo termino incipiat; hoc autem titulo praeferendae videntur fractiones continuae, quae ad simpliciorem pertinent ordinem. Notetur hic, me alio sensu accipere *indices* ac fecit magnus *Eulerus*; ego quidem, ut rem generalius explicarem, per *indicem* intelligo quamvis novam fractionem simplicem in fractione continua occurrentem, veluti

5 Cf. note 9 du II. 8 – St. 70 p. 171 h.v.

$$\frac{a}{\alpha}\cdot\frac{b}{\beta}\cdot\frac{c}{\gamma}\cdot\frac{d}{\delta}\cdot\frac{e}{\varepsilon}\cdot\frac{f}{\phi}\quad\text{etc.}$$

memoratus autem Auctor cum haud alios numeratores quam unitatem adhibere constituisset, per indicem intelligit solum fractionis denominatorem pro subintellecto numeratore 1 nec primum numerum in tabula ipsius proprie ad fractionem continuam pertinere censendum puto. Igitur ut sermone communi utamur, necesse mihi erit indicibus Eulerianis

$$\alpha,\beta,\gamma\quad\text{etc.}$$

substituere

$$\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}\cdot\frac{1}{\gamma}\quad\text{etc.}$$

Sic quando ponitur pro $\sqrt{7}$ successio indicum 2.1.1.1.4.1.1.1.4. mihi scribendum erit, servato initiali numero,

$$2\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1}\quad\text{etc.}$$

ubi incipiens binarius indicat numerum addendum fractioni continuae regulari atque periodicae quarti ordinis

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\text{etc.}}}}}}$$

cuius valor, si in infinitum continuata censeatur, fit $=-2+\sqrt{7}$; ergo si binarius fractioni continuae addatur, oritur $\sqrt{7}=$ binario eadem fractione continua aucto, plane ut exprimitur in citata tabula.

§. 13. Notetur nunc, quod in praecedente paragrapho praestitit fractio continua quarti ordinis, id quoque praestare posse fractionem continuam primi ordinis, si modo admittere velimus numerum fractum pro numeratore ubique recurrente, nempe $3/4$ vel $3:4$; Si enim formetur fractio continua primi ordinis

$$S=\cfrac{3:4}{2+\cfrac{3:4}{2+\cfrac{3:4}{2+\text{etc.}}}}$$

dico fore

$$\sqrt{7}=2+2\,\mathrm{S},$$

videatur in praecedente pertractione §. 9. formula IV. ponendo $m=2$
et $n=3:4$;
Nec ullus est numerus, cuius radix quadrata non possit infinitis modis per fractionem continuam determinari, quia etiam pro denominatore continue recurrente numerus fractus adhiberi potest; sic si formetur fractio continua

$$\mathrm{S}=\cfrac{3:16}{5:2+\cfrac{3:16}{5:2+\cfrac{3:16}{5:2+\text{etc.}}}}$$

invenitur

$$\sqrt{7}=\frac{5}{2}+2\,\mathrm{S}.$$

Incongrua videbitur huiusmodi fractio continua; attamen ideo commendabilis, quia mox admodum ad verum valorem approperat. Si enim vel duo sola prima membra in fractione continua sumuntur; invenitur $\sqrt{7}=545/206$; est autem $\sqrt{7}=2.6457$ et $545/206=2.6456$. Sed valeant huiusmodi fractiones continuae quantum possunt; pergo ad alia exempla scopo nostro magis accommoda.

Pro $\sqrt{13}$ adhibet Celeberrimus Auctor fractionem continuam quinti ordines, hoc modo

$$\sqrt{13}=3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{1+\text{etc.}}}}}}}$$

Huic substitui potest fractio continua primi ordinis

$$\sqrt{13}=3+2\,\mathrm{S}\quad\text{ubi}\quad \mathrm{S}=\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+\text{etc.}}}}$$

Pro $\sqrt{61}$ fractione continua utitur idem Auctor, quae pertinet ad ordinem undecimum, cuius indices sunt

$$\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{14} \quad \text{etc.}$$

pro unaquavis periodo, quae in infinitum continuati deindeque septenario aucta dat valorem $\sqrt{61}$. huic fractioni continuae, magno labore erutae, substitui potest fractio continua primi ordinis

$$S=\cfrac{3}{7+\cfrac{3}{7+\cfrac{3}{7+\text{etc.}}}}$$

erit enim

$$\sqrt{61}=7+2\,S.$$

Nihil porro impedit, quo minus fractione continua utamur prorsus negativa, saepius efficaciori. Sic invenio

$$\sqrt{60}=8+2\,S,$$

ubi

$$S=\cfrac{-1}{8-\cfrac{1}{8-\cfrac{1}{8-\text{etc.}}}}$$

Si in ista fractione continua acquiescamus tribus prioribus terminis; fit

$$S=\frac{-63}{496}; \qquad 2\,S=\frac{-63}{248}$$

atque adeo

$$\sqrt{60}=8+2\,S=\frac{1921}{248}.$$

Quam longe exactissimus sit iste valor, intelligitur ex tabula logarithmorum; est enim

$$\log.\sqrt{60}=0{,}8890756$$

et

$$\log.\frac{1921}{248}=0{,}8890757$$

et cum incertus sit in tabulis numerus ultimae figurae, nondum dici potest, an revera ambo logarithmi in septima figura differant nec ne.

§. 14. Sic itaque abunde videmus totum negotium infinitis modis semper absolvi posse fractione continua, quam ad *primum ordinem* refero. Nec tamen inde concludendum est, non dari aditum ad ordines altiores; methodum hac de re plenissimam exhibui in priori dissertatione paragrapho 13. et sequentibus. Ulteriorem eius explicationem paucis dabo pro ordine secundo. Si construatur fractio continua secundi ordinis, cuius ambo indices initiales perpetuo recurrentes sint n/m et q/p, ostendi loco citato fore valorem fractionis continuae in infinitum continuatae

$$\mathrm{S}=\frac{n-mp-q+\sqrt{4mnp+(mp+q-n)^2}}{2m}:$$

Inde habetur, si quantitatem signo radicali involutam designemus per N, talis valor

$$\sqrt{\mathrm{N}}=-n+mp+q+2mS.$$

Istae expressiones egregie contrahuntur, si in ambobus indicibus ponatur numerator $=1$; tunc enim simpliciter obtinetur

$$\mathrm{S}=\frac{-p+\sqrt{\left(pp+\dfrac{4p}{m}\right)}}{2}$$

atque

$$\sqrt{\left(pp+\frac{4p}{m}\right)}=p+2\mathrm{S}$$

fuerit, verbi gratia, $m=1$ et $p=2$, erit $\mathrm{S}=-1+\sqrt{3}$, adeoque $\sqrt{3}=1+\mathrm{S}$, ubi per S in hoc exemplo intelligitur valor fractionis continuae, cuius indices sunt

$$\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2}\quad\text{etc.}$$

prorsus ut habet *Eulerus* pro suo indicandi modo.

Unicum denique superaddam exemplum pro fractione continua tertii ordinis, de qua egi in praecedente dissertatione §. 15. Sint tres indices, qui primam constituunt periodum

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12};$$

ex his formabitur fractio continua, cuius valor $\mathrm{S}=-6+\sqrt{41}$; ergo $\sqrt{41}=6+\mathrm{S}$ sive$=$ senario aucto fractione continua, cuius indices $1/2\cdot 1/2\cdot 1/12$ quem valorem etiam indicat tabula Euleriana.

Wahrscheinlichkeits-rechnung

B.L. van der Waerden

Specimen theoriae novae de mensura sortis.
III. 1 - St. 22
Commentarii Acad. Petropol. V, 1730–31 (1738), p. 175–192.
Siehe auch I. Todhunter «A History of the Mathematical Theory of Probability» (1865, Neudruck Chelsea, New York 1949) p. 213–222 und p. 609.

Daniel erinnert zuerst an die übliche Definition des «Wertes einer Erwartung». Man erhält diesen Wert, indem man jeden einzelnen erwarteten Betrag mit der Anzahl der Fälle, in denen man diesen Betrag erhält, multipliziert und die Summe dieser Produkte durch die Anzahl der gleichmöglichen Fälle dividiert.

Nach dieser Definition, so sagt Daniel, würde ein armer Mann, der mit gleicher Wahrscheinlichkeit nichts oder zwanzigtausend Dukaten erhalten würde, seine Erwartung ebensohoch einschätzen, wie wenn er zehntausend Dukaten sicher erhielte. Dieses hält er nicht für richtig, vielmehr muss man mit dem Zustand der Person (conditio) rechnen: Ob sie reich oder arm ist. Er unterscheidet daher zwischen dem *Wert* (valor), der nach der obigen Regel berechnet wird, und dem *Vorteil* (emolumentum), der unter Berücksichtigung des Zustandes der Person berechnet wird.

Um nun diesen Vorteil berechnen zu können, nimmt Daniel an, dass der Vorteil, der zu einem unendlich kleinen Vermögenszuwachs dx gehört, dem vorhandenen Vermögen umgekehrt proportional ist, also

$$dy = \frac{b\,dx}{x}\cdot$$

Daraus erhält er für das Emolumentum den Ausdruck

$$y = b \log \frac{x}{a},$$

wobei a das Vermögen vor der Entscheidung des Loses ist. Dabei muss man für a einen positiven Wert annehmen, denn «man kann von niemandem sagen, dass er gar nichts besitzt, ausser wenn er vor Hunger stirbt». Um den gesamten Vorteil Y zu berechnen, hat man die einzelnen y-Werte jeweils mit der Anzahl der Fälle zu multiplizieren und die Summe dieser Produkte durch die Anzahl der gleichmöglichen Fälle zu dividieren. Sind $\mathrm{A\,C}, \mathrm{A\,D}, \ldots$ die einzelnen Vermögenswerte nach der Entscheidung und $\mathrm{A\,B} = a$ das Vermögen vor der Entscheidung, so erhält man für Y den Ausdruck

$$Y = \left(m b \log \frac{\mathrm{A\,C}}{\mathrm{A\,B}} + n b \log \frac{\mathrm{A\,D}}{\mathrm{A\,B}} + \cdots\right) : (m + n + \cdots).$$

Der Vorteil Y ist also gleich gross, wie wenn man mit Sicherheit den Betrag $\mathrm{AP}=X$ als neues Vermögen erhielte, der nach der Formel

$$Y=b\log\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{AB}}=b\log\frac{X}{a}$$

berechnet wird. Für den äquivalenten Betrag X erhält Daniel die Formel

$$X=\mathrm{AP}=(\mathrm{AC}^m\cdot\mathrm{AD}^n\cdot\cdots)^{1:(m+n+\cdots)}.$$

In §. 13 wird gezeigt, dass ein vollkommen ehrliches Spiel, in dem beide Spieler die gleiche Chance haben, einen bestimmten Geldbetrag vom andern zu erhalten, beiden Spielern zum Nachteil gereicht, weil das geometrische Mittel immer kleiner ist als das arithmetische.

Als Anwendung seiner Theorie behandelt Daniel ein Versicherungsproblem. Ein Kaufmann in Petersburg hat in Amsterdam Ware gekauft. Wenn die Ware in Petersburg ankommt, kann er sie für zehntausend Rubel verkaufen, aber er weiss, dass von hundert Schiffen, die in dieser Jahreszeit von Amsterdam nach Petersburg fahren, fünf untergehen. Er kann die Ladung versichern zu einer Prämie von achthundert Rubel, was ihm übermässig vorkommt. Ob es für ihn vorteilhaft ist, die Versicherung abzuschliessen, hängt nach Daniel davon ab, wieviel er ausser der Ware noch besitzt. Dieser Betrag sei x. Wenn er nicht versichert, ist sein gesamtes Vermögen soviel wert wie

$$\sqrt[100]{(x+10\,000)^{95}x^5}=\sqrt[20]{(x+10\,000)^{19}x}\,.$$

Wenn er aber die Ware versichert, erhält er in jedem Fall $x+9200$ Rubel. Der Wert von x, bei dem es gleichgültig ist, ob er versichert oder nicht, ist aus der Gleichung

$$(x+10\,000)^{19}x=(x+9200)^{20}$$

zu bestimmen. Man findet ungefähr $x=5043$.

Man kann auch fragen, welches Vermögen der Versicherer mindestens besitzen muss, damit die Versicherung für ihn vorteilhaft ist. Man findet durch eine ähnliche Rechnung den Mindestwert des Vermögens $y=14\,243$.

In § 16 zeigt Daniel anhand eines Beispiels, dass es vorteilhafter ist, mehrere kleine Verluste zu riskieren als einen grösseren. Ein Kaufmann besitzt 4000 Dukaten, ausserdem hat er in fremden Ländern Waren im Wert von 8000 Dukaten. Wenn er die ganze Ware einem Schiff anvertraut, so ist sein gesamter Besitz unter der Annahme, dass von zehn Schiffen gewöhnlich eines untergeht, soviel wert wie

10751 Dukaten. Verteilt er aber die Ware gleichmässig auf zwei Schiffe, so ist der Wert 11033 Dukaten.

Am Schluss wendet Daniel seine Theorie auf das berühmte Petersburger Problem an. Das Problem wird so formuliert: Peter wirft eine Münze so oft in die Höhe, bis einmal die Vorderseite erscheint. Wenn das beim ersten Wurf geschieht, hat Paul ihm einen Dukaten zu bezahlen, wenn beim zweiten Wurf, zwei Dukaten, wenn beim dritten Wurf, vier, wenn beim vierten, acht Dukaten und so weiter, wobei die Anzahl der Dukaten jedesmal verdoppelt wird. Frage: Was ist der Erwartungswert von Paul *(sors Pauli)?*

Wenn man nach der üblichen Definition den Erwartungswert berechnet, so findet man unendlich, was absurd erscheint. Niklaus Bernoulli drückt es in einem Brief an Daniel vom 27. August 1728 so aus: «le calcul donne ... une somme infinie, ce qui paroit absurde, puisque il n'y a personne de bon sens, qui voulut donner 20 ecus.»

Den ganzen Briefwechsel zwischen Niklaus, Pierre de Montmort, Gabriel Cramer, Johann und Daniel Bernoulli hat O. Spiess in einer sehr interessanten Arbeit «Zur Vorgeschichte des Petersburger Problems» (Werke von Jakob Bernoulli, Band 3, Birkhäuser, Basel 1975, S. 557–567) publiziert. Aus dem Briefwechsel scheint hervorzugehen, dass das Paradoxon des unendlichen Erwartungswertes für Daniel der eigentliche Anlass war, über die Berechtigung des Begriffes Erwartungswert nachzudenken und seine Arbeit «Specimen Theoriae Novae de Mensura Sortis» zu schreiben. Ich sage «scheint hervorzugehen», denn ein Brief von Daniel an seinen Vater Johann, in dem Daniel die Auflösung des Petersburger Paradoxons durch Einführung des Begriffes «emolumentum» mitteilt, ist verloren. Berechnet man dieses «emolumentum» nach den Formeln Daniels, so findet man natürlich einen endlichen Wert, wie Daniel in § 19 richtig bemerkt.

Als Anhang zu seiner Arbeit hat Daniel einen Brief von Gabriel Cramer an Niklaus Bernoulli vom 21. Mai 1728 abdrucken lassen, in dem eine andere Auflösung des Paradoxons geboten wird. Dieser Brief ist als Nr. 8 in der Arbeit von O. Spiess abgedruckt. Cramer meint: «... les mathématiciens estiment l'argent à proportion de sa quantité, et les hommes de bon sens à proportion de l'usage qu'ils en peuvent faire». Mit einer Summe über 2^{24} Ecus kann man nicht viel mehr anfangen als mit 2^{24} Ecus, oder vielmehr, man kann niemals mehr als 2^{24} Ecus erhalten, sagt Cramer. Ersetzt man alle höheren Summen in der unendlichen Reihe durch 2^{24} Ecus, so wird der Erwartungswert genau 13 Ecus. «Ainsi *moralement parlant* mon esperance est reduite à 13 ecus et mon equivalent à autant, ce qui paroit bien plus raisonnable que de la faire infini», schreibt Cramer.

In der Fortsetzung des Briefes geht Cramer noch einen Schritt weiter und führt den Begriff *Valeur morale* ein. Der moralische Wert einer Geldsumme wird versuchsweise proportional zur Quadratwurzel der Geldsumme angesetzt. Damit kommt Cramer dem Begriff «emolumentum», den Daniel zugrunde legt, schon sehr nahe, nur dass Daniel ganz richtig die Bewertung einer zusätzlichen Geldsumme vom Vermögen, das man schon hat, abhängig macht.

Laplace hat den Inhalt von Daniels Arbeit grösstenteils in seine «Théorie analytique des Probabilités» (Paris 1812, Chap. 10, S. 432–445) übernommen, nur hat er den Begriff «emolumentum» von Daniel in «espérance morale» umbenannt, vielleicht in Anlehnung an Cramer, dessen Brief er aus dem Anhang zur Arbeit von Daniel kannte. Bei Poisson («Recherches sur la Probabilité», Paris 1837, S. 75) wird der Widerspruch zwischen dem gesunden Menschenverstand und der mathematischen Rechnung durch die einfache Bemerkung gelöst, dass Peter nur ein beschränktes Vermögen hat und daher keinen unbeschränkten Betrag bezahlen kann. In Cramers Brief war diese einleuchtende Lösung schon durch die Worte «ou plutot que je ne puisse jamais recevoir plus de 2^{24} ecus» angedeutet.

Disquisitiones physico-astronomicae problematis ab inclyta scientiarum academia regia, quae Parisiis floret, iterum propositi.
Quelle est la cause physique de l'inclinaison des plans des orbites des planetes par rapport au plan de l'equateur de la revolution du soleil autour de son axe; et d'où vient que les inclinaisons de ces orbites sont differentes entre elles.
IVb. 1 - St. 24
Französische Übersetzung mit Erläuterungen von Daniel Bernoulli:
Recherches physiques et astronomiques sur le probleme propose pour la seconde fois par l'Académie Royale des Sciences de Paris.
Die französische Übersetzung wurde abgedruckt im «Recueil des pièces qui ont remporté le prix de l'Académie Royale des Sciences», Tome 3, 1734 (1735), p. 93–122, der lateinische Text anschliessend auf p. 123–144.
Ce texte est imprimé dans le vol. 3.

Die Pariser Akademie stellte das Problem zum ersten Mal für 1732, sodann erneut für 1734. Der Preis wurde geteilt zwischen Daniel und seinem Vater Johann.

Daniel stellt zunächst die Frage: Kann es ein Zufall sein, dass die Ebenen der Planetenbahnen alle sehr nahe bei einer Ebene liegen, die sich in ihrer Mitte befindet?

Um diese Frage zu beantworten, sucht Daniel unter allen Planetenbahnen die zwei, die den grössten Winkel miteinander bilden. Er findet die Bahnen von Merkur und der Erde mit einem Winkel von 6°54′ untereinander; alle anderen Winkel sind kleiner. Sodann fragt er, wie gross die Wahrscheinlichkeit ist, dass die andern Bahnen per Zufall zwischen den Grenzen liegen, die durch diese beiden Bahnen bestimmt sind. Man wird sehen, so sagt er, dass diese Wahrscheinlichkeit so klein ist, dass sie als eine moralische Unmöglichkeit gelten kann.

Der Begriff «moralisch unmöglich» wurde von Jacob Bernoulli in die Wahrscheinlichkeitsrechnung eingeführt. Jacob schreibt nämlich in der «Ars conjectandi», Teil IV, Kap. I[1]:

«*Moralisch gewiss* ist etwas, dessen Wahrscheinlichkeit nahezu der vollen Gewissheit gleichkommt, sodass ein Unterschied nicht wahrgenommen werden kann. *Moralisch unmöglich* dagegen ist das, was nur soviel Wahrscheinlichkeit besitzt, als dem moralisch Gewissen an der vollen Gewissheit mangelt. Wenn man also das, was $^{999}/_{1000}$ der Gewissheit für sich hat, als moralisch gewiss betrachtet, so ist das, was nur $^{1}/_{1000}$ der Gewissheit für sich hat, moralisch unmöglich.»

Daniel schneidet die Planetenbahnen mit einer Sphäre. Die Durchschnitte sind Grosskreise. Er basiert nun seine Wahrscheinlichkeitsberechnung auf der Annahme, dass alle diese Bahnen in einer Zone von der Breite 6°54′ auf der Sphäre liegen. Das ist nicht richtig. Weil die Bahnen Winkel von höchstens 6°54′ mit der Ekliptik einschliessen, liegen sie in einer Zone von der Breite 13°48′, deren Mittellinie die Ekliptik ist. Weil sie auch mit der Merkurbahn Winkel von höchstens 6°54′ bilden, liegen sie in einer zweiten Zone von der Breite 13°48′, die gegen die erste um 6°54′ geneigt ist. Der Durchschnitt dieser beiden Zonen ist ein von 4 Kreisbögen berandeter Bereich, dessen Breite zwischen 6°54′ und 13°48′ variiert. Dieser Bereich ist nicht in einer Zone von der konstanten Breite 6°54′ enthalten. Daniels Ausgangspunkt ist also falsch.

Daniel sagt nun, dass seine Zone ungefähr ein Siebzehntel der Kugelfläche enthielte. Dann fährt er fort: «Wenn man annimmt, dass die Planetenbahnen rein zufällig verteilt sind, so hat man die Wahrscheinlichkeit zu berechnen, dass sie alle in eine gegebene Zone hineinfallen. Für jeden einzelnen Planeten ist diese Wahrscheinlichkeit $^{1}/_{17}$, also für 5 Planeten $^{1}/_{17^5}$.»

Bernoulli hat diese Wahrscheinlichkeit ganz falsch berechnet: in Wahrheit ist sie viel kleiner. Um das nachzuweisen, genügt es, die Erdbahn, also die Ekliptik, als fest gegeben anzunehmen und zu fragen: Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Bahnen der fünf übrigen Planeten Winkel von höchstens 6°54′ mit der Erdbahn bilden?

Wenn diese Bahnebenen rein zufällig verteilt wären, so wären auch ihre Pole über die ganze Kugel gleich verteilt. Die Nordpole wären dann gleich verteilt auf einer Halbkugel. Was ist nun die Wahrscheinlichkeit, dass sie alle in einem Kreis vom Radius 6°54′ um den Nordpol der Ekliptik liegen? Die Fläche eines solchen Kreises ist weniger als der 138. Teil der Fläche der Halbkugel, also ist die Wahrscheinlichkeit, dass die 5 Nordpole alle hineinfallen, kleiner als $^{1}/_{138^5}$. Nimmt man noch die zusätzliche Bedingung hinzu, dass auch die Winkel der Planeten-

1 Werke von Jakob Bernoulli, Bd. 3, Birkhäuser, Basel 1975. Lateinischer Text S. 240, Übersetzung S. 14.

bahnen untereinander höchstens 6°54′ betragen sollen, so wird die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses noch kleiner.

Daniels Behauptung, dass eine rein zufällige Verteilung der Bahnebenen der Planeten «moralisch unmöglich» sei, ist also richtig, aber die geometrische Wahrscheinlichkeit hat er nicht richtig bestimmt.

Daniel selbst hat Zweifel, ob seine geometrische Betrachtung wohl ganz richtig sei, denn er schreibt in einer Zusatzbemerkung zur französischen Übersetzung: «Je ne donne pas à cette méthode toute la précision géométrique ..., mais je m'en suis contenté, parce qu'il ne s'agit ici que d'avoir quelque idée générale de la chose.»

Daniel gibt dann noch zwei weitere Rechenmethoden, die aber ebensowenig richtig sind.

In § VI geht Daniel dazu über, die Ursache zu untersuchen, wodurch die Ebenen der Planetenbahnen so nahe zusammenliegen[2].

Essai d'une nouvelle analyse de la mortalite causee par la petite verole, et des avantages de l'inoculation pour la prevenir.
III.2 - St.51
Hist. et Mém. de l'Acad. Royale des Sciences de Paris, 1760 (1766), p. 1-45.

Diese Abhandlung fängt mit einer «Introduction apologétique» an, die erst im April 1765 geschrieben wurde. Die eigentliche Abhandlung wurde am 30. April 1760 der Akademie vorgelegt. Daniel hat sie, wie er auf S. 2 (S. 235 h.v.) mitteilt, geschrieben: «... à la prière du feu M. de Maupertuis, qui se trouvoit alors à Bâle et que je voyois très-souvent ...». Nachdem die Abhandlung vorgelegt war, wurde sie von d'Alembert kritisiert. D'Alemberts Kritik wurde unter dem Titel «Sur l'application du Calcul des Probabilités à l'inoculation de la petite Vérole» im zweiten Band seiner «Opuscules Mathématiques, S. 26-97», publiziert. Eine gute Wiedergabe seiner Argumentation findet man bei Todhunter «A History of the Mathematical Theory of Probability, S. 265-271». In der «Introduction apologétique» (S. 1-6 der Abhandlung von Daniel) (S. 235-238 h.v.) nimmt Daniel zu der Kritik «d'un grand mathématicien» Stellung. Ich gehe darauf nicht näher ein.

Daniels Ziel ist, die Vorteile der Impfung gegen die Pocken zahlenmässig zu erfassen. Er geht von zwei Annahmen aus. Erstens nimmt er an, dass unabhängig vom Alter im Durchschnitt jedes Jahr der achte Teil oder allgemeiner der n-te Teil derjenigen, die die Pocken noch nicht gehabt haben, davon befallen wird, und

2 Siehe ebenfalls D.B. Bd. 3, Mechanica (IVb.1 - St.24), wo die physikalische Bedeutung der Arbeit besprochen wird.

zweitens, dass von diesen immer einer von 8 oder allgemeiner einer von m an der Krankheit sterben wird. Ob diese beiden Hypothesen für alle Altersstufen gelten oder nur bis zum Alter von 20 Jahren, das macht für die Rechnung wenig aus, denn von den Menschen über 20 Jahren haben die meisten die Pocken schon gehabt und werden nicht erneut befallen.

Das jetzige Alter eines Menschen sei x, die Anzahl der Überlebenden dieses Alters $= \xi$ und die Anzahl von diesen, die noch nicht die Pocken gehabt haben, $= s$. Die Anzahl derer, die während der Zeit dx die Pocken bekommen, ist nach der ersten Hypothese

$$\frac{s\,dx}{n}.$$

Unter diesen werden nach der zweiten Hypothese

$$\frac{s\,dx}{mn}$$

an den Pocken sterben. Die gesamte Sterblichkeit in der Zeit dx ist $-d\xi$, also ist die Anzahl derer, die aus anderen Ursachen sterben,

$$-d\xi - \frac{s\,dx}{mn}.$$

Um die Zahl derer zu erhalten, die noch nicht die Pocken gehabt haben und in der Zeit dx aus anderen Ursachen sterben, muss man die eben erhaltene Zahl mit s/ξ multiplizieren. So erhält man die Differentialgleichung

$$-ds = \frac{s\,dx}{n} - \frac{s\,d\xi}{\xi} - \frac{s\,s\,dx}{mn\xi}.$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung wird gefunden, indem man $q = \xi/s$ als neue abhängige Variable einführt. Man findet für q die Differentialgleichung

$$mn\,dq = (mq-1)\,dx$$

deren Lösung lautet

$$n\log(mq-1) = x + C.$$

Für s findet man schliesslich

$$s = \frac{m}{(m-1)e^{x/n}+1}\xi$$

oder für $m = n = 8$

$$s = \frac{8}{7e^{x/8}+1}\,\xi.$$

Für die Bestimmung von ξ, der Zahl der Überlebenden, zieht Daniel die berühmten Tafeln von Halley[3] heran. Er nimmt an, dass von 1300 neugeborenen Kindern 1000 das erste Lebensjahr vollenden; für alle höheren Lebensalter übernimmt er die Überlebenszahlen von Halley. Aus diesen ξ-Werten berechnet er die s-Werte für die ersten 24 Lebensjahre. Indem er das Mittel aus zwei aufeinanderfolgenden s-Werten durch 8 dividiert, findet er die Anzahl derjenigen, die in einem bestimmten Lebensalter von den Pocken befallen werden. Ein Achtel von diesen wird im selben Jahr an den Pocken sterben. Durch Summation erhält Daniel die Anzahl derjenigen, die bis zu einem bestimmten Lebensjahr an den Pocken gestorben sind. Bis zum Alter von 25 Jahren sind es 98. Addiert er dann noch die 3, die in einem höheren Alter an den Pocken sterben werden, so erhält er insgesamt 101 Opfer der Pocken, also ungefähr ein Dreizehntel der ganzen Generation. Das stimmt recht genau mit den Beobachtungen in Breslau und anderen Städten überein. Daraus folgt (wenn man die Bevölkerung als stabil annimmt), dass die Mortalität dieser Krankheit ein Dreizehntel der gesamten Mortalität ausmacht. Nach der Tabelle am Schluss der Arbeit sterben im neunten Lebensjahr 4 von 670 noch lebenden Kindern an den Pocken und 6 an allen anderen Krankheiten zusammen: in diesem Alter ist das Verhältnis am schlimmsten.

In § 11 stellt Daniel die Frage, wie viele Überlebenden man in jedem Lebensalter gewinnen würde, wenn es gelänge, durch Impfung die Pocken gänzlich zu beseitigen. Er berechnet eine Tafel, in der für jedes Lebensalter bis zu 25 Jahren zunächst die Zahl der Überlebenden beim jetzigen Zustand, sodann die Zahl der Überlebenden nach Beseitigung der Pocken angegeben wird. Die Differenz ist am grössten in den Altersgruppen von 20 bis 22 Jahren: sie beträgt dann nämlich 80,3 (auf 1300 Geburten). Das Verhältnis der Zahl der Überlebenden im «Etat non-variolique» zur jetzigen Zahl nimmt auch in höherem Alter noch weiter zu und nähert sich dem Grenzwert $m/(m-1)$, also $8/7$ für $m=8$. Das beweist Daniel, indem er eine Differentialgleichung ganz analog der früheren löst. Die abhängige Variable in dieser Gleichung ist ζ: die Anzahl der Überlebenden im Alter x unter der Annahme, dass keiner mehr an Pocken stirbt. Das Verhältnis ζ/ξ nähert sich dem Grenzwert $m/(m-1)$. Auch die Vergrösserung der mittleren Lebensdauer wird diskutiert. Die Vorteile der Impfung, so schliesst Daniel seine Abhandlung, überwiegen die Gefahren bei weitem.

3 E. Halley «An Estimate of the Degrees of Mortality of Mankind, drawn from curious Tables of the Births and Funerals at the City of Breslaw, with an Attempt to ascertain the Price of Annuities upon Lives» Phil. Trans. 17, S.596–610 (1693). Siehe auch die Werke von Jakob Bernoulli, Bd.3, Birkhäuser, Basel 1975, S.536.

Reflexions sur les avantages de l'inoculation, par M. Daniel Bernoulli.
III.3 - St.52
Mercure de France (Juin 1760), p. 173-190.

Diese Schrift beruht auf den Ergebnissen der Arbeit III.2 - St.51.

De usu algorithmi infinitesimalis in arte coniectandi specimen.
III.4 - St.55
Nova Commentarii Acad. Petropol. XII, 1766-67 (1768), p. 87-98.

Kommentar von H. Straub, ein wenig modifiziert:

In dieser Arbeit behandelt Daniel Bernoulli anhand von Urnenmodellen wahrscheinlichkeitstheoretische Probleme, die in der unmittelbar folgenden Arbeit «De duratione media matrimoniorum ...» (III.5 - St.56) zur Anwendung gelangen. Zugleich will er damit den Gebrauch der Infinitesimalrechnung in der Wahrscheinlichkeitsrechnung für kontinuierlich, aber zufällig sich ändernde Zustände rechtfertigen.

Den Ausgangspunkt seiner Betrachtungen liefert das folgende Modell: In einer Urne sind 2n numerierte Zettel, von denen je zwei und nur zwei dieselbe Nummer tragen. Die zwei gleich numerierten Zettel bilden jeweils ein «Paar». Gefragt wird, wie viele Paare nach einer vorgegebenen Zahl von Ziehungen wahrscheinlich (probabiliter) noch vorhanden sind. Was wirklich berechnet wird, ist nicht der wahrscheinlichste Wert der Anzahl der Restpaare, sondern der Erwartungswert x dieser Anzahl. Daniel bezeichnet mit r die Anzahl der übrigbleibenden Zettel nach den Ziehungen. Er leitet eine Rekursionsformel für x her und gelangt zum Ergebnis

$$x = \frac{(r-1)r}{4n-2} \cdot \tag{1}$$

In der Anwendung auf die infinitesimale Methode kann man dieses Urnenmodell nur gebrauchen, wenn man sich die Anzahl Zettel in der Urne unendlich gross vorstellt, so dass jede einzelne Ziehung eine unendlich kleine Änderung dr der Variablen r bewirkt. Die Verminderung der Paare, dx, berechnet sich wie folgt: Nach einer bestimmten Anzahl Ziehungen sind noch r Zettel da, wovon 2x Zettel x Paare bilden. Von den r verschiedenen Ziehungsmöglichkeiten bei der nächsten Ziehung ist in (r−2x) Fällen dx=0 und in 2x Fällen gilt dx=dr. Daraus folgt die Differentialgleichung

$$dx = \frac{2x\,dr}{r}$$

mit der Anfangsbedingung $x=n$ für $r=2n$. Ihre Lösung lautet

$$x=\frac{rr}{4n}. \tag{2}$$

Formeln (1) und (2) stimmen zwar nicht überein, aber für grosse r und n kann (1) durch (2) angenähert werden.

Der nächste Schritt führt nun zu einer Verallgemeinerung dieses Modells: Bei jedem Paar sei nun der eine Zettel weiss und der andere schwarz. Den beiden Sorten von Zetteln werden verschiedene Ziehungswahrscheinlichkeiten zugeordnet. Die frühere Variable r (Anzahl Restzettel) wird dadurch additiv in s (für schwarze) und in t (für weisse Zettel) aufgeteilt. Bei abnehmendem r mögen die Zahlen s und t sich nach einem vorgegebenen Gesetz (secundum datam legem) ändern. Der Erwartungswert der Zahl der Restpaare wird wieder mit x bezeichnet. Betrachten wir *zuerst die Verminderung dx, die von der Ziehung eines schwarzen Zettels herrührt: die übriggebliebenen s schwarzen Zettel werden eingeteilt in x Zettel, die noch ihren weissen Partner haben, und $(s-x)$ alleinstehende. Von diesen s Ziehungsmöglichkeiten bei der nächsten Ziehung ist also dx in x Fällen$=ds$ und in $(s-x)$ Fällen$=0$. Ein analoger Beitrag für dx stammt von der Verminderung dt, so dass daraus die partielle Differentialgleichung*

$$dx=\frac{x\,ds}{s}+\frac{x\,dt}{t}$$

mit den Anfangsbedingungen $x=s=t=n$ resultiert. Sie wird so gelöst:

$$\frac{dx}{x}=\frac{ds}{s}+\frac{dt}{t}$$

$$\log\frac{x}{n}=\log\frac{s}{n}+\log\frac{t}{n}$$

$$\frac{x}{n}=\frac{st}{nn}$$

also

$$x=\frac{st}{n}. \tag{3}$$

Die Reduktion zum vorhergehenden Modell geschieht durch die Substitutionen $s=r/2$ und $t=r/2$. Dabei geht (3) in (2) über.

In § 11 führt Daniel die Annahme ein, dass bei jeder Ziehung die Geneigtheit *(proclivitas)* des Ziehenden, einen schwarzen Ball zu ziehen, sich zur Geneigtheit, einen weissen zu ziehen, wie ϕ zu 1 verhält, wobei ϕ entweder konstant ist oder sich nach einem gegebenen Gesetz ändert. Weil nun im Augenblick der Ziehung noch s schwarze und t weisse Bälle vorhanden sind, so folgert er

$$ds : dt = \phi s : t$$

also

$$\frac{ds}{s} = \frac{\phi\, dt}{t} \tag{4}$$

$$\log \frac{s}{n} = \int \frac{\phi\, dt}{t},$$

$$\frac{s}{n} = e^{\int \phi dt : t}. \tag{5}$$

Die Fälle $\phi = 1$ und $\phi = 2$ löst er explizit.

De duratione media matrimoniorum, pro quacunque coniugum aetate, aliisque quaestionibus affinibus.
III.5 - St.56
Novi Commentarii Acad. Petropol. XII, 1766–67 (1768), p. 99–126.

Kommentar von H. Straub, mit Ergänzungen von B. L. van der Waerden:

In dieser Abhandlung werden die Modelle der vorhergehenden Arbeit auf bevölkerungsstatistische Probleme angewendet. Das Zahlenmaterial bezieht Bernoulli aus den Sterbetafeln von Halley, die nach Sterberegistern der Stadt Breslau angefertigt wurden[4]*. (Breslau sei in dieser Beziehung günstig, weil es sowohl eine grosse Stadt sei als auch eine geringere Ein- und Auswanderung kenne als z.B. Paris oder London.)*

Es bedeute analog zu oben n die Anzahl in einem bestimmten Ausgangsalter abgeschlossener Ehen, r die variable Anzahl der überlebenden Personen dieser Ehen zu einem beliebigen späteren Zeitpunkt, x die noch bestehenden Ehen. Bernoulli trifft nun vorerst die Annahme, dass beide Ehepartner gleich alt sind. Er geht aus von 500 im Alter 20 geschlossenen Ehen ($n = 500$). Die Zahlen der Tabelle (S. 294 h.v.) sind auf diese Ausgangszahl bezogen. In Kolonne II dieser Tabelle sind die Überlebenden r für jedes Altersjahr ab Alter 20 aufgeführt (beginnend mit $r = 2n = 1000$).

4 Siehe Fussnote 3, S. 204 h.v.

In Kolonne III findet man die Anzahl der jeweils noch bestehenden Ehen x, errechnet aus Formel (1) der vorhergehenden Arbeit:

$$x = \frac{(r-1)r}{4n-2}.$$

Die Kolonne IV gibt die Anzahl der jeweils lebenden verwitweten Personen an, d. h. $r = 2x$. Aus

$$r - 2x = \frac{2nr - r^2}{2n-1}$$

ersieht man, dass die Zahl der Verwitweten für $r = n$ am grössten ist, d. h. wenn die Zahl der anfangs Verheirateten auf die Hälfte (500) gesunken ist.

In einer zweiten kleinen Tabelle (S. 295 h.v.) gibt Bernoulli zu jedem Alter in Intervallen von 5 Jahren die Zeit an, die vergeht, bis die Zahl der in diesem Alter bestehenden Ehen auf die Hälfte gesunken ist.

Bei der dritten Tabelle (S. 296 h.v.) kommt Bernoulli nun zum eigentlichen, im Titel angedeuteten Problem, für jedes beliebige Alter die mittlere künftige Ehedauer zu bestimmen. Bezeichnen wir mit x_t die Anzahl der noch bestehenden Ehen im Alter t, so lautet die Formel für die mittlere künftige Ehedauer für das Alter t:

$$\frac{x_t + x_{t+1} + x_{t+2} + \cdots}{x_t} - \frac{1}{2}.$$

Das Korrekturglied, $-1/2$, liegt darin begründet, dass der Tod nicht jeweils erst am Schluss, sondern durchschnittlich in der Mitte eines Jahres erfolgt. Die Werte x_t sind aus der ersten Tabelle (S. 294 h. v.), Kolonne III, zu entnehmen.

Auch hier drängt sich eine Verallgemeinerung analog wie in der vorhergehenden Arbeit auf, und zwar deshalb, weil die Männer meist in höherem Alter als die Frauen heiraten und folglich eine höhere Sterblichkeit aufweisen als der weibliche Partner. Deshalb muss die Variable r in s (überlebende Männer) und in t (überlebende Frauen) aufgeteilt werden. Die Tabelle (S. 300 h. v.) trägt diesem Umstand Rechnung. Ausgangszahl dieser Tabelle bilden 500 Ehen, geschlossen zwischen einem 40jährigen Mann und einer 20jährigen Frau. Die verschiedene Sterblichkeit der beiden Ehepartner hat verschiedene Abfallsordnungen der Überlebenden (Variable s und t) zur Folge, was aus Kolonne II ersichtlich ist. Kolonne III gibt die Anzahl der noch bestehenden Ehen x, errechnet aus der Formel (3) der vorhergehenden Arbeit an: $x = st/n$. In Kolonne IV ist die Anzahl der Witwer $(= s - x)$ und in Kolonne V die Anzahl der Witwen $(= t - x)$ aufgeführt. Auf S. 301 h.v. ist auch für dieses Modell die künftige mittlere Ehedauer tabelliert.

Die Abhandlung enthält noch einige Überlegungen, die von den eben hergeleiteten Ergebnissen deduziert werden können. So kann man z.B. die Anzahl der überhaupt bestehenden Ehen in einem Gebiet aus dem Produkt der Anzahl jährlich geschlossener Ehen mit ihrer künftigen Ehedauer bestimmen. Weiterhin stellt Bernoulli Vergleiche zwischen den beiden behandelten Extremfällen an. Er betont noch, dass bei der Abfallsordnung der Verwitweten auf die sich wieder Verheiratenden Rücksicht genommen werden müsste, was sich besonders bei den Witwern auf die Abfallsordnung auswirkt.

Die Anwendung der Differentialgleichung in der Arbeit von Daniel wurde von Trembley in einer Abhandlung «Observations sur les calculs relatifs à la durée des mariages et au nombre des époux subsistans», Mémoires de l'Académie de Berlin 1799–1800, S. 110–130, kritisiert. Siehe dazu Todhunter, «A History of the Mathematical Theory of Probability», S. 426–427.

Todhunter bemerkt mit Recht, dass die Abhandlung St. 56 sehr ähnlich der Abhandlung St. 51 über die Mortalität der Pocken ist. In beiden Fällen wird die Wahrscheinlichkeitstheorie dazu gebraucht, die fehlenden direkten Beobachtungen zu ersetzen, und in beiden Fällen wird die Differentialgleichung zur Lösung von Wahrscheinlichkeitsproblemen eingesetzt.

Disquisitiones analyticae de novo problemate coniecturali.
III.6 - St.58
Novi Commentarii Acad. Petropol. XIV-1, 1769 (1770), p. 3–25.

Kommentar von H. Straub, ergänzt von B. L. van der Waerden:

Wie in der Abhandlung «De usu algorithmi infinitesimalis» (III.4 – St. 55, S. 276 h.v.) behandelt Bernoulli auch in dieser Arbeit ein Urnenmodell, für das sich die infinitesimale Betrachtungsweise wieder sehr gut eignet.

Es seien mehrere Urnen gegeben, von denen jede n Zettel enthält; die Zettel unterscheiden sich in ihrer Farbe von Urne zu Urne; in ein und derselben Urne aber sind alle Zettel von gleicher Farbe. Nun wird aus jeder Urne je ein Zettel herausgenommen und in die nächste hineingelegt; der aus der letzten Urne gezogene Zettel wird in die erste hineingelegt. Einen solchen Vorgang nennt Bernoulli eine Permutation. Es wird nun gefragt, wie viele Zettel von jeder Farbe nach r Permutationen die einzelnen Urnen enthalten. Bernoulli behandelt zwei Spezialfälle, nämlich für 2 und 3 Urnen. Zuerst löst er das Problem nach der diskontinuierlichen Methode, dann nach der kontinuierlichen; dann weist er noch die Übereinstimmung zwischen dem ersten und dem zweiten Resultat nach, sofern man beim ersten die erforderlichen Näherungen durchführt.

1. Diskontinuierliche Methode

a) 2 Urnen

Die erste Urne enthalte n weisse, die zweite n schwarze Zettel. Es werden nun r Permutationen, wie oben beschrieben, durchgeführt. Auf induktivem Wege findet Bernoulli, dass nach den r Permutationen die wahrscheinliche Anzahl weisser Zettel in der ersten Urne noch

$$x = \frac{n}{2}\left(1 + \left(\frac{n-2}{n}\right)^r\right) \tag{1}$$

beträgt. Unter der «wahrscheinlichen Anzahl» ist dabei wieder der Erwartungswert der Anzahl zu verstehen.

b) 3 Urnen

Die erste Urne enthalte n weisse, die zweite n schwarze und die dritte n rote Zettel. Nach irgendeiner Zahl von Ziehungen seien in der ersten Urne A weisse Zettel, in der zweiten B und in der dritten C. Nach einer weiteren Permutation werden die Erwartungswerte dieser Anzahlen

$$\frac{(n-1)A+C}{n}, \quad \frac{(n-1)B+A}{n}, \quad \frac{(n-1)C+B}{n}.$$

Durch wiederholte Anwendung dieser linearen Transformation der Tripel A, B, C findet Bernoulli nach r Permutationen die folgenden Tripel:

r	A	B	C
1	$n-1$	1	0
2	$\frac{(n-1)^2}{n}$	$\frac{2(n-1)}{n}$	$\frac{1}{n}$
3	$\frac{(n-1)^3+1}{nn}$	$\frac{3(n-1)^2}{nn}$	$\frac{3(n-1)}{nn}$

etc. bis $r=9$. Daraus leitet er induktiv die folgende Regel ab: Man nehme die Binomialreihe für $((n-1)+1)^r$:

$$(n-1)^r + r(n-1)^{r-1} + \frac{r(r-1)}{1\cdot 2}(n-1)^{r-2} + \cdots$$

Aus dieser «erzeugenden» Reihe erhält man A als Summe des ersten, vierten, siebten etc. Gliedes, dividiert durch n^{r-1}, ebenso B als Summe des zweiten, fünften etc. und C als Summe des dritten, sechsten etc. Gliedes, jedesmal dividiert durch n^{r-1}.

Jetzt kann man leicht einsehen, sagt Daniel, wie die Regel für eine beliebige Anzahl Urnen lautet. Man teilt das erste Glied der erzeugenden Reihe der ersten Urne zu, das zweite Glied der zweiten Urne etc. Nach der letzten Urne fängt man wieder mit der ersten an, und so fährt man fort. Die Summe der Glieder, die man einer bestimmten Urne zugeteilt hat, dividiert man durch n^{r-1}. So erhält man die Anzahl der weissen Zettel in der betreffenden Urne, sagt er. Gemeint ist natürlich der Erwartungswert dieser Anzahl.

Daniel gibt keinen Beweis, aber es ist sehr leicht zu sehen, dass die so gefundenen Zahlen $A, B, C, \ldots$ die Anfangsbedingung ($A = n$ für $r = 0$) und die Rekursionsformeln erfüllen.

2. Kontinuierliche Methode

Diese Methode darf nur bei grossen n angewendet werden; dann nämlich kann die Anzahl der Permutationen r als kontinuierliche Veränderliche und jede Permutation als unendlich kleine Änderung aufgefasst werden. Man kann zum Beispiel die Urnen als Gefässe auffassen, die mit verschiedenen Flüssigkeiten gefüllt und miteinander verbunden sind.

a) 2 Urnen

Für 2 Urnen kann die Lösung leicht gefunden werden, denn es gilt, wenn man unter x wieder die Anzahl Zettel in der ersten Urne nach r Permutationen versteht:

$$dx = -\frac{x}{n}\,dr + \frac{n-x}{n}\,dr,$$

mit der Anfangsbedingung $x = n$ für $r = 0$. Die Lösung dieser Differentialgleichung lautet

$$x = \frac{1}{2}\,n\left(1 + e^{\frac{-2r}{n}}\right). \qquad (2)$$

In § 4 zeigt Daniel, dass die Formel (1) für grosse n in (2) übergeht.

b) 3 Urnen

Nach der Modellbeschreibung gilt

$$dx = -\frac{x}{n}\,dr + \frac{n-x-y}{n}\,dr$$

und

$$dy = -\frac{y}{n}\,dr + \frac{x}{n}\,dr$$

oder

$$dr = \frac{n\,dx}{n-2x-y} \tag{3}$$

und

$$dr = \frac{n\,dy}{x-y}\,. \tag{4}$$

Aus (3) und (4) folgt

$$\frac{dx}{n-2x-y} = \frac{dy}{x-y}\,. \tag{5}$$

Durch die Substitutionen $x = \frac{1}{3}n + p$ *und* $y = \frac{1}{3}n - q$

geht aus (5)

$$2p\,dq - q\,dq = p\,dp + q\,dp$$

hervor, und nach einer weiteren Substitution, $q = tp$, *resultiert*

$$\frac{dp}{p} = \frac{t-2}{t-tt-1}\,dt\,. \tag{6}$$

Die Differentialgleichung (4) geht mit den gleichen Substitutionen über in

$$\frac{dr}{n} = \frac{dt}{t-tt-1}\,. \tag{7}$$

Die Differentialgleichungen (6) und (7) sind leicht zu integrieren. Berechnet man dann x und y und $z = n - x - y$, so erhält man die Endformeln für 3 Urnen:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{3}n + \frac{2}{3}\,n\,e^{\frac{-3r}{2n}} \cos\frac{r\sqrt{3}}{2n}\,, \\ y &= \frac{1}{3}n + \frac{n}{\sqrt{3}}\,e^{\frac{-3r}{2n}} \sin\frac{r\sqrt{3}}{2n} - \frac{n}{3}\,e^{\frac{-3r}{2n}} \cos\frac{r\sqrt{3}}{2n}\,, \\ z &= \frac{1}{3}n - \frac{n}{\sqrt{3}}\,e^{\frac{-3r}{2n}} \sin\frac{r\sqrt{3}}{2n} - \frac{n}{3}\,e^{\frac{-3r}{2n}} \cos\frac{r\sqrt{3}}{2n}\,. \end{aligned} \tag{8}$$

In den §§. 12–14 zeigt Daniel, dass man diese Endformeln auch erhalten kann aus der vorher gefundenen exakten Lösung:

$$A=\left\{(n-1)^r+\binom{r}{3}(n-1)^{r-3}+\binom{r}{6}(n-1)^{r-6}+\cdots\right\}:n^{r-1}.$$

Dabei benutzt er die beiden Näherungen

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^r\approx e^{-r/n}\quad \textit{und}\quad \binom{r}{k}\approx\frac{r^3}{k!};$$

für x erhält er dann folgende Näherung:

$$x=n\,e^{-r/n}\left(1+\frac{r^3}{3!\,n^3}+\frac{r^6}{6!\,n^6}+\cdots\right).$$

Die Summierung der Reihe

$$S=1+\frac{r^3}{3!\,n^3}+\frac{r^6}{6!\,n^6}-\cdots$$

löst er wie folgt: Er setzt

$$\frac{S\,dr^3}{n^3}=d^3S$$

und findet die allgemeine komplexe Lösung dieser Differentialgleichung:

$$S=\alpha\,e^{\frac{r}{n}}+\beta\,e^{(-1+\sqrt{-3})\frac{r}{2n}}+\gamma\,e^{(-1-\sqrt{-3})\frac{r}{2n}}.$$

Die reelle Lösung lautet:

$$S=\alpha\,e^{\frac{r}{n}}+\beta\,e^{-\frac{r}{2n}}\sin\frac{r\sqrt{3}}{2n}+\gamma\,e^{-\frac{r}{2n}}\cos\frac{r\sqrt{3}}{2n}.$$

Aus den Anfangsbedingungen $S=1$, $dS=0$ und $ddS=0$ für $r=0$ folgt $\alpha=1/3$, $\beta=0$, $\gamma=2/3$, so dass schliesslich

$$x=n\,e^{-\frac{r}{n}}S=\frac{1}{3}\,n+\frac{2}{3}\,n\,e^{-\frac{3r}{2n}}\cos\frac{r\sqrt{3}}{2n}$$

und analog für y und z.

In den §§. 16–20 schliesst Bernoulli noch einige Überlegungen an. Aus den drei Formeln (8) erkennt man, dass mit $r\to\infty$ das ganze System gegen einen permanenten asymptotischen Zustand strebt, wobei die Schwankungen um diesen Zustand wegen $e^{-3r/2n}$ immer kleiner werden. Solche Ausdrücke wie (8) habe er in *der Mechanik oft angetroffen. In den noch folgenden Auswertungen von (8) betrachtet er die Extremalfälle von y und z, die er aus $dy/dr=0$ bzw. $dz/dr=0$ erhält. Weiterhin berechnet er, wann y oder z zum erstenmal den Wert $\frac{1}{3}n$ annimmt; dabei setzt er $n=3000$ und findet $r=1815$ für $y=\frac{1}{3}n$ und $r=9072$ für $z=\frac{1}{3}n$.*

Laplace hat in seiner «Théorie analytique des Probabilités» (Paris 1812) S. 303, für eine beliebige Anzahl Urnen ähnliche Formeln wie (8) hergeleitet.

Mensura sortis ad fortuitam successionem rerum naturaliter contingentium applicata.
III. 7a - St. 59a
Novi Commentarii Acad. Petropol. XIV-1, 1769 (1770), p. 26–45.

Daniel Bernoulli befasst sich in dieser Abhandlung mit dem Problem, die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, mit der eine zufällige, der Binomialverteilung gehorchende Variable Werte zwischen zwei Schranken um den Erwartungswert annimmt. Zur Illustration dieser Aufgabe, die ins Gebiet der Fehlertheorie fällt, bedient er sich des folgenden Beispiels: In einem Gebiet werden jährlich 2 N *Kinder geboren. Die Geburt eines Knaben sei gleich wahrscheinlich wie die eines Mädchens, nämlich* $\frac{1}{2}$; *m bezeichne die Variable, die die Anzahl der geborenen Knaben ausdrückt, und* w_m *die Wahrscheinlichkeit, mit der die Variable den Wert m annimmt. Es gilt dann:*

$$w_m = \binom{2\mathrm{N}}{m} \frac{1}{2^{2\mathrm{N}}}. \tag{1}$$

Die grösste dieser Wahrscheinlichkeit werde mit q bezeichnet; sie drückt die Wahrscheinlichkeit aus, mit der der Erwartungswert N *eintritt. Es gilt:*

$$q = \binom{2\mathrm{N}}{\mathrm{N}} \frac{1}{2^{2\mathrm{N}}}. \tag{2}$$

Für grosse N *muss eine Näherung dieses Ausdrucks gefunden werden; zu diesem Zwecke gibt er für q noch eine andere Darstellungsform ohne Herleitung wieder, nämlich*

$$q = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2\mathrm{N}-3}{2\mathrm{N}-2} \cdot \frac{2\mathrm{N}-1}{2\mathrm{N}}. \tag{3}$$

Die Identität von (2) und (3) kann leicht durch vollständige Induktion bewiesen werden.

Nun bedient sich Bernoulli der infinitesimalen Methode, wobei q als Funktion von N *aufzufassen ist* $(q = q(\mathrm{N}))$. *Er betrachtet die Einheiten in der Grösse* N *als d*N. *vorausgesetzt, dass* N *sehr gross ist. Es gilt dann, da d*N = *1 ist, einerseits*

$$\frac{dq}{d\mathrm{N}} \approx q(\mathrm{N}+1) - q(\mathrm{N}) = -\frac{q}{2\mathrm{N}+2}$$

und anderseits

$$\frac{dq}{d\mathrm{N}} \approx q(\mathrm{N}) - q(\mathrm{N}-1) = -\frac{q}{2\mathrm{N}-1}\,.$$

Unter Verwendung des arithmetischen Mittels der beiden Nenner gelangt man zur folgenden Differentialgleichung

$$\frac{dq}{q} = -\frac{d\mathrm{N}}{2\mathrm{N}+\frac{1}{2}}$$

mit der Bedingung $q = \mathrm{A}$ *für ein bestimmtes* $\mathrm{N} = f$.
Ihre Lösung lautet:

$$q = \mathrm{A}\sqrt{\frac{4f+1}{4\mathrm{N}+1}}\,. \tag{4}$$

Diese Näherungsformel wird um so genauer, je grösser man f wählt. Bernoulli wählt $f = 12$ und erhält

$$q = \frac{1{,}12826}{\sqrt{4\mathrm{N}+1}}\,. \tag{5}$$

Dieses Ergebnis (5) benutzt Bernoulli in seiner späteren Arbeit «Specimen ... de compensationibus horologicis» (III. 9 – St. 73 S. 376 h.v.). Das eigentliche Problem besteht nun nicht in der Berechnung von q, d.h. der Wahrscheinlichkeit, dass genau N *Knaben geboren werden, sondern es geht darum zu wissen, mit welcher Wahrscheinlichkeit sich die Anzahl der geborenen Knaben zwischen* $\mathrm{N}-\mu$ *und* $\mathrm{N}+\mu$ *bewegt, wobei* μ *eine beliebig vorgegebene Schranke bedeutet. Die Wahrscheinlichkeit für* $\mathrm{N}+\mu$ *Knaben ist gleich gross wie die für* $\mathrm{N}-\mu$ *Knaben; die gesuchte Wahrscheinlichkeit errechnet sich dann zu*

$$q + 2(w_{\mathrm{N}+1} + w_{\mathrm{N}+2} + \cdots + w_{\mathrm{N}+\mu})\,.$$

Statt die $w_{\mathrm{N}+\mu}$ *von Grund auf zu rechnen, kann man sie als Funktion von q ausdrücken. Es gilt nämlich*

$$w_{N+1} = \binom{2N}{N+1}\frac{1}{2^{2N}} = \frac{N}{N+1}q,$$

$$w_{N+2} = \binom{2N}{N+2}\frac{1}{2^{2N}} = \frac{N}{N+1}\cdot\frac{N-1}{N+2}q,$$

$$\vdots$$

$$w_{N+\mu} = \binom{2N}{N+\mu}\frac{1}{2^{2N}} = \frac{N}{N+1}\cdot\frac{N-1}{N+2}\cdot\ldots\cdot\frac{N-\mu+1}{N+\mu}q.$$

Auf S. 36 (S. 333 h.v.) sind die $w_{N+\mu}$ für $\mu=1$ bis 50 und für $2N=20000$ tabuliert. Durch Summation findet Daniel, dass für $\mu=47$ die gesuchte Wahrscheinlichkeit nahezu $\frac{1}{2}$ ist, für $\mu=48$ aber grösser als $\frac{1}{2}$. Durch lineare Interpolation zwischen diesen Werten findet er die zur Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ gehörige Schranke $\mu=47\frac{1}{4}$. Ohne Beweis gibt er an, dass man für eine 30mal grössere Kinderzahl, also für $2N=600000$, die Schranke $47\frac{1}{4}$ mit $\sqrt{30}$ zu multiplizieren hätte. In §. 18 sagt er, dass die Wahrscheinlichkeit $w_{N\pm\mu}$ näherungsweise gleich

$$\frac{q}{e^{\frac{\mu\mu}{N}}}$$

ist, sofern μ nicht viel grösser als $\sqrt{N}$ ist. Darin steckt die Aussage, dass die Binomialverteilung durch eine Normalverteilung angenähert werden kann.

Todhunter bemerkt mit Recht («History of the Mathematical Theory of Probability» S. 235–236), dass Stirling und de Moivre das alles lange vorher und besser begründet dargestellt haben. Er verweist dabei auf de Moivre, «Doctrine of Chances» (3. Auflage) S. 243–254. Die erste Auflage der Doctrine of Chances erschien 1718, die dritte 1756. Es scheint, dass Daniel Bernoulli die Doctrine of Chances nicht gekannt hat.

Continuatio argumenti de mensura sortis ad fortuitam successionem rerum naturaliter contingentium applicata.
III. 7b - St. 59b
Novi Commentarii Acad. Petropol. XV, 1770 (1771), p. 3–28.

Diese Abhandlung, die Todhunter gar nicht erwähnt, stellt eine Verallgemeinerung der vorhergehenden dar. Dort wurde die Wahrscheinlichkeit, dass ein Knabe geboren werde, $=\frac{1}{2}$ *gesetzt; in Wirklichkeit liegt diese Wahrscheinlichkeit etwas höher. Bei einer Geburt soll das Verhältnis der Wahrscheinlichkeit* *für einen Knaben zu der für ein Mädchen a/b betragen, so dass also erstere Wahrscheinlichkeit $a/(a+b)$ und letztere $b/(a+b)$ wird.* Die Methoden und Ergebnisse dieser Arbeit sind ganz ähnlich denen der vorhergehenden Abhandlung.

Diiudicatio maxime probabilis plurium observationum discrepantium atque verisimillima inductio inde formanda.
III.8 - St.72
Acta Acad. Petropol. 1777-1 (1778), p.3-23.

Eine englische Übersetzung dieser Abhandlung erschien 1961 in Biometrica 48, p.1-18, mit einem Kommentar von M.G. Kendall unter dem Titel «Studies in the History of Probability and Statistics XI: Daniel Bernoulli on Maximum Likelihood». Die vorzügliche Übersetzung wurde von C.G. Allen besorgt.

Der grosse Wert dieser Abhandlung besteht darin, dass hier zum ersten Mal das Prinzip des «Maximum Likelihood» formuliert wird, das auch C.F. Gauss in seiner ersten Begründung der Methode der kleinsten Quadrate zugrunde gelegt hat[5].

Daniel vergleicht den Beobachter, der eine astronomische Grösse beobachtet hat, mit einem Bogenschützen, der auf eine senkrechte Linie zielt. Er nimmt an, dass die Fehler symmetrisch verteilt sind: positive und negative Fehler von der gleichen Grösse sollen gleich wahrscheinlich sein. Die Wahrscheinlichkeitsdichte soll in der Mitte ihr Maximum haben und nach beiden Seiten hin abfallen. Es soll weiter einen maximalen Fehler geben, der nie überschritten wird. In den beiden Punkten des maximalen Fehlers soll die Kurve der Wahrscheinlichkeitsdichte eine nahezu senkrechte Tangente haben.

Eine Kurve, die diese Bedingungen erfüllt, ist der Halbkreis. Die Wahrscheinlichkeitsdichte der Fehler wird also proportional zu $\sqrt{rr-xx}$ angenommen, wo r der Maximalfehler ist.

Man habe nun Beobachtungen A, $\mathrm{A}+a$, $\mathrm{A}+b$, etc. gemacht, und der wahre Wert der beobachteten Grösse sei $\mathrm{A}+x$. Die Wahrscheinlichkeit der Beobachtungen ist also proportional zum Produkt

$$\sqrt{rr-xx}\cdot\sqrt{rr-(x-a)^2}\cdot\sqrt{rr-(x-b)^2}\cdot\text{etc.}$$

Nun wird das Prinzip formuliert: *Derjenige Wert von x ist der wahrscheinlichste, der dieses Produkt zum Maximum macht.* Das ist, was R.A. Fisher das Prinzip des Maximum Likelihood genannt hat.

5 Siehe dazu B.L. van der Waerden, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen 1977.

Das Maximum des Produktes

$$(rr-xx)\cdot\big(rr-(x-a)^2\big)\cdot\big(rr-(x-b)^2\big)\cdots$$

wird gefunden, indem man das Differential dieses Produktes gleich null setzt. Das gibt, wenn man n Beobachtungen gemacht hat, eine algebraische Gleichung vom Grade $2n-1$.

Eine Schwierigkeit bei dieser Methode ist, dass der Wert des maximalen Beobachtungsfehlers r nicht bekannt ist. Bernoulli zeigt an Beispielen, dass es auf den genauen Wert von r nicht sehr ankommt. Er rät, wenn b der Unterschied zwischen der grössten und der kleinsten Beobachtung ist, $r=b$ oder $r=3/2\,b$ oder $r=2b$ zu nehmen. Für $r\to\infty$ strebt $\mathrm{A}+x$ gegen das arithmetische Mittel der Beobachtungen.

In einer anschliessenden Note[6] hat Euler die Methode von Daniel kritisiert und eine andere Methode vorgeschlagen, die nur auf eine Gleichung 3. Grades führt. Bei Daniels Methode erhalten die äussersten Beobachtungen ein grösseres Gewicht als die inneren. Im Gegenteil dazu erhalten bei Eulers Methode die äusseren Beobachtungen ein geringeres Gewicht als die inneren. Eulers Methode kommt darauf hinaus, wenn $\Pi+a$, $\Pi+b$ etc. die Beobachtungen sind, aus $a, b, \ldots$ ein gewogenes Mittel zu bilden, wobei die Gewichte proportional zu

$$r^2-(x-a)^2,\qquad r^2-(x-b)^2,\ldots$$

sind. Das führt auf eine Gleichung 3. Grades für x.

Specimen philosophicum de compensationibus horologicis et veriori mensura temporis.
III.9 - St.73
Acta Acad. Petropol. 1777-2 (1780), p.109-128.

Obwohl man in der Herstellung von Uhren einen hohen Perfektionsgrad erreicht hat, können die Fehler bei der Zeitmessung nicht ganz ausgeschaltet werden. Diese Fehler kann man in zwei Klassen einteilen: in solche, die vermieden oder zumindest abgeschätzt werden können, da man ihre Ursachen kennt, und in solche, die ganz verborgen liegen und die man als zufällige Fehler ansehen muss.

Bernoulli geht in dieser Abhandlung vor allem auf Probleme der Zeitmessung mit Pendeluhren ein, deren Pendel einen Kreisbogen beschreiben. Ihre Schwingungen

6 L. Euler E488 «Observationes in praecedentem Dissertationem Illust. Bernoulli». Acta Petropol. 1777 (1778), p.24–33. Opera Omnia ser.I vol.7 p.262–290.

sind nicht isochron, d. h. mit variabler Auslenkung aus der Ruhelage ändert sich auch die Schwingungsdauer T.

Als erste Aufgabe betrachtet Bernoulli die Bestimmung der Schwingungsdauer T *für beliebige Ausschläge, unter der Voraussetzung, dass die Schwingungsdauer* T_0 *für Schwingungen von fast unendlich kleinen Ausschlägen bekannt ist. Dabei benützt er die folgende, seiner früheren Preisarbeit (1745)*[7] *entnommene Formel, wobei* φ *den Winkel zwischen zwei entgegengesetzten Auslenkungen einer Schwingung bedeute:*

$$T = T_0 + \frac{1-\cos \varphi/2}{8} \cdot T_0. \tag{1}$$

Er führt ein Beispiel aus «La figure de la terre» von de Maupertuis (Paris 1738) an, wo für $T_0 = 1$ *sec und für* $\varphi_1 = 3°0'$ *gegenüber* $\varphi_2 = 4°20'$ *eine Abweichung von* $3\frac{1}{2}$ *oder 4 Sekunden pro Tag festgestellt wurde. Aus Formel (1) errechnet sich diese tägliche Abweichung zu 4″.*

Als weiteren wichtigen Grund für die Unregelmässigkeiten der Schwingungszeit erwähnt Bernoulli die Temperaturschwankungen, da diese eine Verlängerung oder Verkürzung der Pendellänge zur Folge haben.

Daneben gibt es noch unzählige Einflüsse, die die sogenannten zufälligen Abweichungen zur Folge haben. Zur Berechnung dieser Abweichungen benützt Bernoulli Ergebnisse aus seiner früheren wahrscheinlichkeitstheoretischen Arbeit in «Mensura sortis ad fortuitam successionem rerum naturaliter contingentium applicata». (III. 7a – St. 59a S. 326 h.v.). Der Anzahl Geburten 2N *entsprechen hier die Anzahl Schwingungen innerhalb einer Zeitperiode. Analog wie damals die* 2N *geborenen Kinder in zwei Klassen zerfielen (Knaben und Mädchen), so verhält es sich bei den Schwingungen, die auch in zwei Klassen eingeteilt werden, in solche, die längere, und solche, die kürzere Schwingungsdauer aufweisen als der wahre Wert dieser Dauer. Bernoulli macht die Voraussetzung, dass die Zugehörigkeit zu den beiden Klassen gleich wahrscheinlich sei. Die Wahrscheinlichkeit, dass jede Klasse genau* N *Schwingungen enthält, ist laut der vorerwähnten Abhandlung*

$$= \frac{1{,}12826}{\sqrt{4N+1}} \approx \frac{0{,}56413}{\sqrt{N}}.$$

was für N = *43 200 (d. h. Periode = 1 Tag und Schwingungsdauer = 1″) eine Wahrscheinlichkeit von* $\frac{1}{369}$ *ergibt. Analog dem Geburtenproblem kann hier in gleicher Weise wie dort die Wahrscheinlichkeit berechnet werden, dass die Anzahl der langsameren bzw. schnelleren Schwingungen sich zwischen* $N-\mu$ *und* $N+\mu$ *bewegt. Auch kann hier der dort auf* N = *10 000 bezogene* μ*-Wert von* $47\frac{1}{4}$ *angewendet werden.*

7 «Prix de l'Académie» VIII. 3 – St. 42, vol. 7 Œuvres de D.B.

Dieser μ-Wert stellt jene Schranke dar, für die das Zugehören in das Intervall $[N-\mu, N+\mu]$ *gleich wahrscheinlich ist wie das Nichtzugehören, nämlich* $= 1/2$. *Einen solchen Zustand nennt Bernoulli «status medius». In der vorerwähnten Arbeit wurde erwähnt, dass ein Vervielfachen von* N *um das k-fache bloss das* $\sqrt{k}$*-fache des* μ*-Wertes bedinge. Das ergibt hier*

$$\mu = 47\frac{1}{4} \cdot \sqrt{\frac{43\,200}{10\,000}} = 98{,}21 \approx 100\,.$$

D. h. es ist gleich wahrscheinlich, dass sich die Anzahl der schnelleren bzw. langsameren Schwingungen zwischen 43 100 und 43 300 bewegt als ausserhalb dieser Schranke.

Die Zeitdauer der langsameren Schwingungen setzt nun Bernoulli (für wahres $T = 1'')$ $= 1'' + a''$ *und die der schnelleren* $= 1'' - a''$. *Im Falle von* $N+\mu$ *langsameren und* $N-\mu$ *schnelleren Schwingungen beträgt die Gesamtzeitdauer*

$$(N+\mu)(1''+a'') + (N-\mu)(1''-a'') = 2N'' + 2\mu a'';$$

die Verlängerung beträgt also $2\mu a''$. *Setzt man*

$$a = \frac{1}{10} \quad \text{und} \quad \mu = 100$$

(status medius unter den obigen Voraussetzungen), so beträgt die Verlängerung 2'', d. h. für eine tägliche Abweichung von weniger als 2'' besteht die gleiche Wahrscheinlichkeit wie für eine von mehr als 2''. Betrachtet man als Zeitintervall ein Jahr, so muss die tägliche mittlere Abweichung μ *noch mit* $\sqrt{365}$ *multipliziert werden.*

Bibliographie zur Mortalitätstafel
A. de Baenst-Vandenbroucke

G.L. Buffon «Histoire naturelle générale et particulière», Impr. Royale, Paris 1749, tome II.

A. Deparcieux «Essai sur les probabilités de la durée de vie humaine ...», Paris 1747. Suppléments publiés en 1760.

J. Graunt «Natural and Political Observations Mentionned in a Following index and Made Upon the bills of Mortality», London 1662. (Übersetzung I.N.E.D., Paris).

E. Halley «An Estimate of the Degrees of the Mortality of Mankind, drawn from curious Tables of Births and Funerals at the city of Breslaw; with an Attempt to ascertain the Price of Annuities upon Lives.», Phil. Trans. 17, p.596–610, London 1693; «Some further Considerations on the Breslaw Bills of Mortality», Phil. Trans. 17, p.654–656, London 1693.

T. Simpson «Traité sur les annuités et les tontines, avec des tables fort utiles pour ce genre de calcul, un appendice et des remarques sur l'ouvrage de de Moivre sur le méme sujet», 1742.

J.P. Süssmilch «Die Göttliche Ordnung in den Veränderungen des menschlichen Geschlechts, aus der Geburt, Tod und Fortpflanzung desselben erwiesen», Berlin 1741. Eine französische Übersetzung dieser Abhandlung erschien in: «*l'ordre Divin* aux origines de la démographie de J.P. Süssmilch», traduction originale (de l'édition de 1765) avec études et commentaires rassemblés par Jacqueline Hecht, I.N.E.D., Paris 1979.

P.W. Wargentin «Mortaliteten i Sverige, i anledning of Tabellverket», Kongl. Vetenskaps academiens Handliger for Ar 1766. Übersetzung Stockholm 1930.

Hinweise auf Daniel Bernoullis Korrespondenz betreffend Fragen der Wahrscheinlichkeitsrechnung
P. Radelet-de Grave

D.B.	C. GOLDBACH	18	3	1724
C. GOLDBACH	D.B.	17	4	1724
C. GOLDBACH	D.B.	23	7	1724
D.B.	C. GOLDBACH	12	8	1724
C. GOLDBACH	D.B.	13	9	1724
D.B.	C. GOLDBACH	12	10	1724
C. GOLDBACH	D.B.	13	12	1725
NICOLAUS I	D.B.	27	8	1728
D.B.	NICOLAUS I	5	11	1728
NICOLAUS I	D.B.	5	2	1729
NICOLAUS I	D.B.	4	2	1730
D.B.	NICOLAUS I		1	1731
D.B.	NICOLAUS I	4	7	1731
NICOLAUS I	D.B.	5	4	1732
P.L.M. de MAUPERTUIS	D.B.	27	4	1738
A. CL. CLAIRAUT	D.B.	10	4	1759
CH.M. de LA CONDAMINE	D.B.	26	6	1759
CH.M. de LA CONDAMINE	D.B.	15	2	1760
CH.M. de LA CONDAMINE	D.B.	24	10	1761

D.B.	J.A. MALLET	30	6	1762
J.A. MALLET	D.B.	27	10	1762
D.B.	J.A. MALLET	16	2	1763
CH.M. de LA CONDAMINE	D.B.	10	3	1763
D.B.	JOHANN III	7	12	1763
D.B.	J.A. MALLET	18	1	1764
D.B.	J.A. HIRZEL	28	2	1764
D.B.	J.A. HIRZEL	13	7	1764
D.B.	JOHANN III			1764
D.B.	JOHANN III	22	12	1764
D.B.	J.A. MALLET	27 23	6 11	1764– 1765
D.B.	JOHANN III	7	5	1765
D.B.	J.A. HIRZEL	31	5	1765
D.B.	J.A. MALLET	23	11	1765
D.B.	JOHANN III		6	1766
D.B.	JOHANN III			1766
J.A. MALLET	D.B.	2	11	1766
L. EULER	D.B.	22	11	1767
D.B.	L. EULER		4	1768
J.A. MALLET	D.B.	2	9	1768
D.B.	J.A. EULER	13	9	1769
J.A. EULER	D.B.	8-19	9	1769

J.A. EULER	D.B.	18	12	1769		D.B.	J.A. MALLET	12	6	1771
D.B.	J.A. EULER	31	1	1770		D.B.	JOHANN III			1771
J.A. MALLET	D.B.	26	4	1771		D.B.	JOHANN III			1771–1772
J.A. MALLET	D.B.	3	6	1771		D.B.	JOHANN III	31	3	1774

Specimen theoriae novae de mensura sortis.

Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae. Bd. V p. 175–192. 1730–31 (1738)
III. 1 - St. 22

§. 1. Ex eo tempore, quo Geometrae considerare coeperunt mensuras sortium, affirmarunt omnes, *valorem expectationis obtineri, cum valores singuli expectati multiplicentur per numerum casuum quibus obtingere possunt, aggregatumque productorum dividatur per summam omnium casuum: casus autem considerare iubent, qui sint inter se aeque proclives.* Hacque posita regula, quodcunque reliquum est in ista doctrina huc redit, ut casus omnes enumerentur, in aeque proclives resolvantur atque in debitam classem disponantur.

§. 2. Demonstrationes huius propositionis, quarum quidem in lucem prodierunt multae, si recte examines, omnes videbis hac inniti hypothesi, *quod cum nulla sit ratio, cur expectanti plus tribui debeat uni quam alteri, unicuique aequae sint adiudicandae partes;* rationes autem nullas considerari, personarum statum respiciant, solasque illas perpendi, quae ad conditiones sortis pertineant. Talem sententiam ferant iudices supremi publica auctoritate constituti, at vero hoc loco non iudicia sed consilia danda sunt; regulae nempe, quibus quisque suam sibimet aestimare debeat sortem pro diversa rerum suarum constitutione.

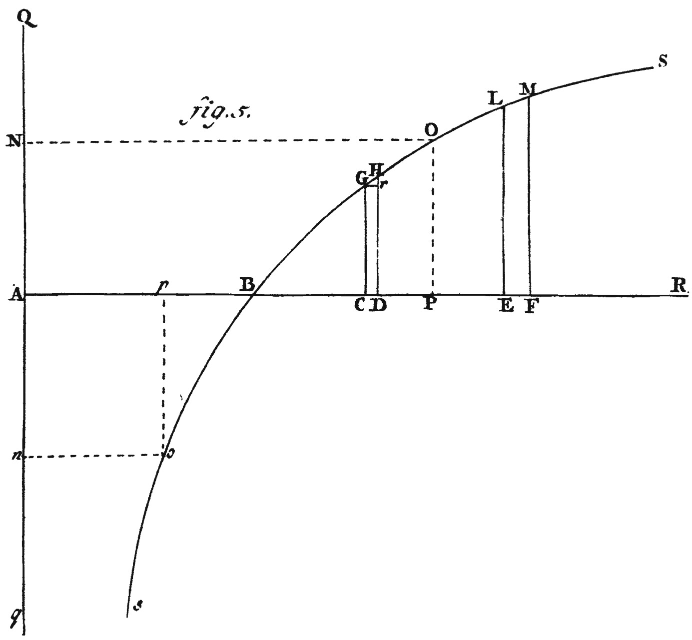
§. 3. Ut appareat, non male hoc ita moneri, pone casu aliquo homini plane pauperi sortem contigisse, qua pari probabilitate aut nihil aut viginti millia ducatorum obtinebit, an sortem suam hic aestimabit decies millenis ducatis, et malene sibi consuluerit cum novem millibus eam vendiderit? Id mihi non videtur, quamvis et credam hominem admodum opulentum sibi deficere, cum illam si potuerit eodem pretio acquirere recuset; si vero hac in re non fallor, perspicuum est, non posse omnibus hominibus pro eodem modulo mensuram sortis assignari nec proinde adhaerendum esse regulae §. 1. Sed et quivis perspiciet, qui haec attente considerare voluerit, ita definiri posse vocem *valoris,* qua in ista regula usi sumus, ut tota deinceps sine scrupulo omnibus sit accipienda, nempe *valor* non est aestimandus ex pretio rei, sed ex *emolumento,* quod unusquisque inde capessit. Pretium ex re ipsa aestimatur omnibusque idem est, *emolumentum* ex conditione personae. Ita procul dubio pauperis magis refert lucrum facere mille ducatorum quam divitis, etsi pretium utrique idem sit.

§. 4. Eo iam deducta est res, ut unius vocis mutatione quivis sibi consulere possit; quia autem nova est hypothesis, indigebit illa dilucidatione aliqua. Constitui itaque speciminis loco exponere, quae eam in rem meditatus sum. Regulae interim fundamentalis loco hac utemur. *Cum* emolumenta *singula expectata multiplicantur per numerum casuum, quibus obtinebuntur aggregatumque productorum dividitur per numerum omnium casuum, obtinebitur* emolumentum *medium, et lucrum huic* emolumento *respondens aequivalebit sorti quaesitae.*

§. 5. Verum sic liquet, nullam posse mensuram sortis obtineri, nisi simul innotescat *emolumentum,* quod ex lucro quovis unicuique venit, et vice versa quantum lucrum requiratur ut certum inde eveniat emolumentum, qua de re vix est ut aliquid certi dici possit, quandoquidem a variis circumstantiis mutari potest. Ita quamvis plerumque a lucro simili magis allevetur pauper quam opulentus, posset tamen ex. gr. hominis captivi bis mille ducatos divitis, cui altero tanto opus sit pro libertate redimenda plus referre lucrum bis mille ducatorum, quam alterius non ita divitis; huiuscemodi autem exempla quamvis fingi possent sine fine, oppido tamen rara sunt. Considerabimus igitur potissimum, quid plerumque contingat atque ut rectius rem intelligamus, bona hominis censebimus sensim sensimque incrementis infinite parvis continuo augeri. Ita vero valde probabile est *lucrulum quodvis semper emolumentum afferre summae bonorum reciproce proportionale.* Dum hanc hypothesin illustrem, dicam quid *bonorum summa* mihi significet, nempe omnia ea, quae victum, amictum fortunam commodam, imo et luxum omniumque desideriorum expletionem subministrare et largiri valent, ita ut nemo nihil habere dici possit nisi quem fames extingit, sitque plurimis bonorum potissima pars industria, quae vel ipsam mendicitatem in se continent; qui mendicando decem annuatim aureos sibi comparat, is non facile accipiat summam quinquaginta aureorum cum conditione ut nihil unquam sibi mendicet aut alio modo acquirere tentet, iisque expensis salutem omnem habeat rescissam; quinimo de iis etiam, qui nihil habentes aere premuntur alieno, dubito, an se eo liberari simulque summam longe maiorem dono accipere velint cum tali conditione. Iam vero si mendicus pactum inire nolit nisi summam paratam obtineat minimum centum aureorum, nec ille qui aere alieno laborat nisi mille aureos accipiat, priorem centum, alterum mille aureis divitem dicemus quamvis communi loquendi modo ille nihil, hic vero minus quam nihil habeat.

§. 6. His ita definitis redeo ad id quod in superiori paragrapho indicavi, nempe nisi quid insoliti interveniat *aestimari posse emolumentum lucri valde parvi summae bonorum reciproce proportionale.* Equidem cum recte considero, qua natura homines comparati esse soleant, video hanc positionem plerisque applicari posse. Pauci sunt, qui non annuos suos reditus dispendant omnes; iam vero, si unius bona valeant centum mille ducatos, alterius totidem semiducatos; si ille annuos inde reditus obtineat quinquies mille ducatorum, hicque rursus totidem semiducatorum; perspicuum est omni respectu priori ducatum esse quod alteri semiducatum, atque adeo lucrum unius ducati priori non plus valere, quam lucrum semiducati alterum iuvat. Si igitur uterque lucrum faciat unius ducati, alter duplum inde emolumentum accipiet duos nempe lucratus semiducatos, quod exemplum quoniam instar omnium est, alia afferre superfluum puto. Eo verior est haec propositio, quod maxima hominum pars bona alia praeter industriam vix habet, et ex hac sola perpetuo vivit. Sunt tamen quibus unus ducatus magis cordi est, quam sunt plures ducati homini minus diviti magis autem generoso. Quia vero nos deinceps considerabimus unum eundemque hominem nihil id ad nos attinebit. Qui minus lucro delectatur, is quoque patientius fert damnum. Verum tamen quia aliquando particulares esse possunt causae quibus res secus se habet, pertractabo argumentum generalissime, quam ad specialem nostram descendam hypothesin, ut sic omnibus satisfiat.

§. 7. Denotet igitur A B (fig. 5.) summam bonorum ante sortem decisam; dein producta A B construatur super B L curva B G S cuius applicatae C G, D H, E L, F M



etc. ceu *emolumenta* respondeant abscissis B C, B D, B E, B F etc. ut lucris. Sint porro *m*, *n*, *p*, *q* etc. numeri denotantes quot modis obtineantur lucra B C, B D, B E, B F, etc. erit (per §. 4.) *emolumentum* medium

$$PO = \frac{m.CG + n.DH + p.EL + q.FM}{m+n+p+q} + \text{etc.}$$

Si vero nunc in linea AQ ad lineam AR perpendiculari sumatur AN=PO, erit recta NO−AB, id est, BP lucrum legitime expectandum seu sors quaesita. Iam si porro scire velimus, quantum debeat esse depositum pro sorte ista obtinenda, continuanda est curva in partem contrariam, ita ut nunc abscissa B*p* denotet ubique iacturam, applicata vero *po* damnum iacturae. Quoniam autem in ludo iustae conditionis damnum iacturae debet esse aequale emolumento lucri, erit sumenda A*n*=AN, vel *po*=PO, atque sic denotabit B*p* depositum, ultra quod nemo ire debet, qui rebus suis bene consulere cupit.

Corollarium 1.

§. 8. In hypothesi hactenus ab auctoribus adhiberi solita, qua ponitur lucrum quodvis ex se solo esse aestimandum, semperque *emolumentum* afferre sibi simpliciter proportionale, sit linea BS recta; unde sequitur si fuerit

$$\mathrm{PO}=\frac{m.\mathrm{CG}+n.\mathrm{DH}+p.\mathrm{EL}+q.\mathrm{FM}}{m+n+p+q}+\text{etc.}$$

fore etiam sumtis ab utraque parte proportionalibus

$$\mathrm{BP}=\frac{m.\mathrm{BC}+n.\mathrm{BD}+p.\mathrm{BE}+q.\mathrm{BF}}{m+n+p+q}+\text{etc.},$$

quod conforme est cum regula communiter adhibita.

Corollarium 2.

§. 9. Si AB fuerit infinita ratione lucri vel maximi BF, quod speratur, erit arcus BM instar lineolae rectae infinitae parvae considerandus, hocque in casu rursus locum habet eadem ista regula vulgaris, quae adeoque valet proxime in omnibus ludis qui haud magni sunt momenti.

§. 10. Postquam sic argumentum pertractavimus generalissime, pergemus ad hypothesin illam particularem supra memoratam, quae sane prae omnibus aliis considerari meretur. Ante omnia quaerenda est natura curvae *s*BS manentibus positionibus paragraphi septimi; quia vero vi hypothesis lucrula infinite parva sunt consideranda, censebimus lucra BC et BD tantum non aequalia, ita differentia CD sit infinite parva; ductaque G*r* ipsi BR parallela erit *r*H *emolumentum* infinite parvum hominis cuius bona sunt AC et qui facit lucrum minimum CD. Istud vero *emolumentum* non solum ex lucrulo CD, cui utique caeteris paribus est porportionale, sed et ex summa bonorum AC, cuius rationem sequitur inversam, est aestimandum. Igitur si ponatur

$$AC = x,\ CD = dx,$$
$$CG = y,\ rH = dy;$$
$$AB = a,$$

denotetque b constantem quantitatem quamcunque, erit

$$dy = \frac{b\,dx}{x},$$

vel

$$y = b \log. \frac{x}{a}\cdot$$

Est itaque curva sBS logarithmica cuius subtangens ubique $= b$ et cuius asymtotos est Qq.

§. 11. Si nunc comparentur haec cum iis, quae paragrapho septimo dicta sunt, apparebit esse

$$PO = b \log. \frac{AP}{AB},$$
$$CG = b \log. \frac{AC}{AB},$$
$$DH = b \log. \frac{AD}{AB};$$

et sic porro; ergo cum fuerit

$$PO = \frac{m.CG + n.DH + p.EL + q.FM}{m+n+p+q} + \text{etc.}$$

erit nunc

$$b \log. \frac{AP}{AB} = \frac{\left(mb \log. \frac{AC}{AB} + nb \log. \frac{AD}{AB} + pb \log. \frac{AE}{AB} + qb \log. \frac{AF}{AB} + \text{etc.}\right)}{(m+n+p+q+\text{etc.})};$$

unde deducitur

$$AP = (AC^m . AD^n . AE^p . AF^q . \text{etc.})^{1:(m+n+p+q+\text{etc.})},$$

et cum ab hac subtrahitur AB remanebit BP sortem denotans quaesitam.

§. 12. Subministrat praecedens paragraphus hanc regulam: *lucrum quodvis summa bonorum auctum elevetur ad dignitatem indicatam per respondentem numerum casuum*; *dein omnes hae dignitates inter se multiplicentur et ex curvarum producto extrahatur radix ordinis indicati per numerum omnium casuum: tum denique a radice subtrahatur summa omnium bonorum; quod residuum est, indicabit sortem quaesitam.* Atque haec propositio est principalis pro dimetienda sorte in variis casibus, cui nunc ut factum est hactenus in hypothesi communi, theoriam integram, quod opus tum utilitate tum novitate sua se commendare posset, superstruerem, si id alii incepti labores permitterent. Nunc quidem inter ea, quae se mihi prima obtulerunt fronte, notabiliora quaedam tantum allegabo.

§. 13. Et primo quidem apparet, quum conditiones ludi finguntur vel aequissimae, utrumque collusorum tamen praeiudicium exinde accipere; egregium profecto naturae documentum vitandae aleae... Sequitur id autem ex concavitate curvae sBS versus BR, qua sit, ut facto deposito Bp aequali lucro sperato BP, sit *detrimentum po*, quod ex sinistro eventu oritur semper maius emolumento PO quod speratur. Quamvis autem id satis per se pateat Geometris, attamen ut intelligatur ab omnibus exemplo illustrabo. Sint duo collusores, quorum quivis in bonis centum habeat ducatos, horumque partem dimidiam sorti in utramque partem aeque proclivi committat. His ita positis habebit quivis quinquaginta ducatos una cum spe centum ducatorum; utriusque autem summa per regulam paragr. 12. valet tantum $(50.^{1}150.^{1})^{1/2}$ seu $\sqrt{(50.150.)}$ id est, minus quam octoginta septem ducatos, ita ut uterque a ludo quamvis aequissimae conditionis detrimentum capiat plusquam tredecim ducatorum: at vero ut simul appareat veritas illa, quam quivis naturalis luminis instinctu agnoscit, eo maiorem nempe esse aleatoris imprudentiam quo partem bonorum suorum notabiliorem fortunae exponat, considerabimus idem exemplum hoc solo interposito discrimine, alterum collusorem ante depositos quinquaginta ducatos habuisse ducentos; is tunc damnum accipit, quod exprimitur per $200-\sqrt{150.250,}$ nempe parum ultra sex ducatos.

§. 14. Cum itaque inconsiderate agit, quicunque paribus conditionibus vel minimam bonorum suorum partem alearum fortunae credit, conveniet hic inquirere quamnam in deponendis nummis quivis praerogativam habere debeat prae collusore, ut sine praeiudicio ludum inire possit. Ludum vero fingemus simplicissimum rursus, duobus nempe definitum casibus, aeque proclivibus altero secundo altero contrario;

sit lucrum eventu prospero impetrandum	$=a$,
depositum eventu sinistro perdendum	$=x$;
summa bonorum	$=a$;
sic igitur erit	$AB=a$;
	$BP=a$;

$$PO= \quad (§.\,10) \quad b \log. \frac{a+a}{a}$$

et quum (per §. 7.) sit

$$po=PO,$$

erit per naturam logarithmicae

$$Bp=\frac{a}{a+a};$$

denotat autem Bp depositum x; est igitur

$$x = \frac{a\,a}{a + a},$$

quae quantitas semper minor est quam lucum speratum a; exinde etiam deducitur, stulte hunc agere qui omnia sua bona periclitatur spe lucri quantumvis magni, quod nemo difficulter sibi persuadebit, si recte perpenderit definitiones nostras praemissas. Hinc etiam est, quod in vita civili unanimiter videtur receptum, hominem nempe cum ratione rem dubiam tentare posse, quam alius non possit.

§. 15. Hic praesertim consideratu digna sunt quae mercatoribus solennia sunt in vadandis mercibus, quae mari vehuntur; id vero sequenti explicabo exemplo. Caius Petropoli degens merces coëmit Amstelodami, quas si praesentes habeat Petropoli, vendere potest pro decem millibus Rubelonibus. Curat igitur ut mari advehantur, dubitat autem an vade uti debeat nec ne? Interim non ignorat inter centum naves eo anni tempore Amstelodamo Petropolin proficiscentes quinque perire tantum solere; nec tamen vadem reperire potest infra pretium octingentorum Rubelonum, quod enorme putat. Quaeritur igitur quanta Caii bona esse debeant praeter praedictas merces, ut cum ratione sponsionem negligere possit: sint illa $= x$; erunt eius bona una cum spe mercium felicis appulsus

$$= \sqrt[100]{(x + 10000)^{95}\, x^5} = \sqrt[20]{(x + 10000)^{19}\, x}\ ,$$

si sponsione non fuerit usus; si vero usus fuerit, habebit summam certam $x + 9200$. Aequatis autem hisce quantitatibus fit

$$(x + 10000)^{19}\, x = (x + 9200)^{20}$$

seu proxime $$x = 5043\,.$$

Si proin Caius plus habuerit praeter mercium suarum expectationem quam quinquies mille quadraginta tres Rubelones, bene faciet recusendo sponsionem, sin minus accipiendo. At si quaeratur quanta bona ille qui pro octingentis Rubelonibus se sponsorem exhibuit minimum possidere debeat, ut cum ratione sponsionem in se suscipere possit, ponimus eius bona $= y$; et erit

$$\sqrt[20]{(y + 800)^{19}\,.\,(y - 9200)} = y,$$

seu proxime $$y = 14243\,,$$

qui numerus sine novo calculo ex praecedente colligi etiam potuisset. Qui minus dives est inepte se vadem offert, quod tamen opulentior non sine ratione facit. Hinc intelligitur quam commode huiusmodi sponsiones introductae fuerint, cum parti utrique magno inservire possint emolumento... Pariter si sexcentis Rubelonibus Caius vadem habere possit, imprudenter recusaret eum, si minus habeat quam 20478. R. nimisque timide agit, si plus quam 20478. dives merces vadatur. Ita quoque inconsiderate ageret qui minus quam 29878. R. habens se Caio sponsorem offerret pro sexcentis Rubelonibus; bene autem sibi consulet, si id faciat quum plus habet. Nemo interim, quantumvis dives rebus suis bene prospiceret, si quingentis Rubelonibus sponsionem in se susciperet.

§. 16. Praeterea ex hac nostra theoria alia sequitur regula hominibus non inutilis futura; scilicet consultius esse bona illa, quae periculo sunt obnoxia, in plures distribuere partes quam omnia simul periclitari; hanc rursus explicabo. Sempronius bona habet praesentia in universum 4000. duc. et in terris exoticis insuper merces possidet pro 8000. duc. quae non aliter quam mari aduehi possunt. Constat autem ex diuturno rerum usu ex decem navibus unam perire. His ita stantibus dico Sempronii, si omnes 8000. duc. uni navi credat, expectationem a mercibus valere 6751. duc. qui nempe numerus est

$$\sqrt[10]{12000^9 . 4000^1 .} - 4000 .$$

Si vero partibus aequalibus duabus navibus merces committat, expectatio sibi valebit

$$\sqrt[100]{12000^{81} . 8000^{18} . 4000} - 4000 ,$$

id est, 7033. duc. Atque sic augebitur Sempronii expectatio, quamdiu partem uni navi committendam diminuit, nec tamen unquam excedet ista expectatio valorem 7200. duc. Idem hoc monitum inserviet iis etiam, qui bona sua litteris cambialibus credunt, aut aliis fortunae casibus exponunt.

§. 17. Plurima certe sunt alia nova plane eaque haud inutilia, quae nunc praeterire cogor. Maximam quidem eorum partem quivis cordatus tacito naturae instinctu aliqualiter videt et sequitur, nemo autem fortasse crediderit, posse ea tam praecise definiri, ut in his exemplis factum est. Cum igitur ita sit ut omnia haec theoremata tam egregie consentiant cum iis, quae natura edocti sumus, iniquum esset ceu nudas veritates hypothesibus precariis innixas, ea negligere. Confirmabitur id etiam sequenti exemplo, quod hisce meditationibus occasionem dedit, et cuius historia haec est. Proposuit aliquando Cel. *Nicolaus Bernoulli*, in Academia Basiliensi Iuris utriusque Professor, Honoratissimus meus Patruelis, Cl. *Montmortio* quinque problemata[1], quae videre est *dans l'analyse sur les jeux de hazard de Mr. de Montmort p.* 402[2]. Horum problematum ultimum huc redit, *Petrus in altum proiicit*

1 Cf. «Die Werke von Jakob Bernoulli» Bd.3 Birkhäuser. Basel 1975 p.557.
2 P.R. de Montmort «Essay sur les jeux de Hazard» Paris 1713.

nummum, idque donec in terram delapsus notatam semel ostenderit frontem: si vero id primo contingat iactu, tenetur Paulo dare ducatum unum; si secundo duos; si tertio quatuor; si quarto octo, et sic porro duplicando quovis iactu ducatorum numerum. Quaeritur sors Pauli? Huius problematis mentionem fecit praefatus meus Patruelis in epistola, quam ad me dedit, cupiens de eo sententiam meam scire. Quandoquidem calculus dictet, sortem Pauli infinitam esse, nec tamen ullus sanae mentis, ut dicit, futurus sit, qui non libentissime spem suam vendiderit pro summa viginti ducatorum. Revera quoties principiis communibus rem aggredimur, invenimus sortem Pauli infinitam, quamvis nemo eam pretio vel admodum mediocri sibi sit comparaturus. Quum vero nostris principiis calculum absolvimus, intelligimus demum huius nodi solutionem. Solutio problematis ad principia nostra accommodata haec est.

§. 18. Infiniti sunt casus hic considerandi: horum autem pars dimidia facit ut ludus primo finiatur iactu; pars quarta ut finiatur iactu secundo; octava ut tertio, decima sexta ut quarto et sic deinceps. Si proin numerus casuum omnium quamvis infinitus indicetur per N; patet esse casus numero $\frac{1}{2}$ N, quibus Paulus lucratur unum ducatum; $\frac{1}{4}$ N quibus duos; $\frac{1}{8}$ N quibus quatuor; $\frac{1}{16}$ N quibus octo, et sic sine fine. Fuerint nunc Pauli bona universa $= a$, et erit sors ipsius quaesita

$$=\sqrt[N]{(a+1)^{\frac{N}{2}}.(a+2)^{\frac{N}{4}}.(a+4)^{\frac{N}{8}}.(a+8)^{\frac{N}{16}}.\ \text{etc.}}-a\,,$$

sive

$$=\sqrt{(a+1)}\,.\sqrt[4]{(a+2)}\,.\sqrt[8]{(a+4)}\,.\sqrt[16]{(a+8)}\,.\text{etc.}-a\,.$$

§. 19. Ex hac formula sortem Pauli indicante, sequitur hanc crescere crescentibus bonis, et nunquam fieri infinitam, nisi cum simul bona sunt infinita. Corollaria specialia haec sunt. Si nihil habuerit Paulus, sors eius erit

$$=\sqrt[2]{1}.\sqrt[4]{2}.\sqrt[8]{4}.\sqrt[16]{8}.\quad \text{etc.}$$

quae praecise sic ipsi valet duos ducatos. Si decem habuerit ducatos, proxime tres valebit expectatio, et quatuor cum triente praeter propter si centum habuerit, ac denique sex cum mille habuerit. Facile hinc iudicatu est quam immensas quis divitias possidere debeat, ut cum ratione viginti ducatis sortem Pauli emere possit. Pretium autem quo emi debet, quamvis differat a sorte quae iam possidetur, quia tamen admodum exigua est differentia, quando a est numerus magnus, unum alteri aequale statui potest; accurate autem posito emtionis pretio $=x$, determinatur, eius valor hac aequatione

$$\sqrt[2]{(a+1-x)}.\sqrt[4]{(a+2-x)}.\sqrt[8]{(a+4-x)}.\sqrt[16]{(a+8-x)}.\text{etc.}=a\,,$$

cui proxime satisfacit cum a est numerus magnus haec aequatio

$$x=\sqrt[2]{(a+1)}.\sqrt[4]{(a+2)}.\sqrt[8]{(a+4)}.\sqrt[16]{(a+8)}.\text{ etc.}-a\,.$$

Praelecta hac dissertatione coram Societate misi eius apographum supra memorato D:no Nicolao Bernoulli ut intelligerem quid de mea propositae suae difficultatis solutione sentiret. Is vero in epistola, quam A. 1732. *ad me scipsit*[3], *testatus est nequaquam sibi displicere meam de mensura sortium sententiam, si modo quivis suae sortis aestimator sit, aliter vero se rem habere, si tertius instar iudicis secundum aequitatem et iustitiam unicuique collusorum sortem assignare debeat. Id ipse pariter in* §. 2. *exposui. Communicavit deinde Vir Clar. mecum sententiam, quam de eadem difficultate tulit Cel. Cramerus aliquot ante annis, quam dissertationem meam conscripsissem et quam usque adeo meae conformem inveni, ut mirum sit in tali argumento tam accurate nos consentire potuisse. Igitur operae pretium erit verba apponere, quibus Cl. Cramerus ipse sententiam suam aperuit in litteris A.* 1728. *ad Patruelem meum datis*[4]; *ita autem ille*:

«Je ne sai si je ne me trompe, mais je crois tenir la resolution du cas singulier, que Vous avez proposé à Mr. *de Montmort* dans Votre lettre du 9 7bre 1713. Probl. 5. pâg. 402. Pour rendre le cas plus simple je supposerai que A jette en l'air une piece de monnoye, B s'engage de lui donner 1 ecu si le coté de la croix tombe le premier coup, 2 si ce n'est que le second, 4 si c'est le troisieme coup, 8 si c'est le quatrieme coup &c. Le paradoxe consiste en ce que le calcul donne pour l'equivalent que A doit donner à B une somme infinie, ce qui paroit absurde, puisquil n'y a personne de bon sens, qui voulut donner 20. ecus. On demande la raison de cette difference entre le calcul mathematique et l'estime vulgaire. Je crois qu'elle vient de ce que *(dans la theorie)* les mathematiciens estimant l'argent á proportion de sa quantité & *(dans la practique)* les hommes de bon sens à proportion de l'usage qu'ils en peuvent faire. Ce qui rend l'esperance mathematique infinie c'est la somme prodigieuse que je peux recevoir, si le coté de la croix ne tombe que bien tard, le centieme ou le millieme coup. Or cette somme si je raisonne en homme sensé, n'est pas plus pour moi, ne me fait pas plus de plaisir, ne m'engage pas plus

3 Lettre de Nicolaus I à D.B du 5/4/1732. Cf. aussi «Die Werke von Jakob Bernoulli» Bd.3 p.566.

4 Lettre de G. Cramer à Nicolaus I du 21/5/1728. Cf. aussi «Die Werke von Jakob Bernoulli» Bd.3 p.560.

à accepter le parti, que si elle n'etoit que 10 ou 20 millions d'ecus. Supposans donc que toute somme au dessus de 10 millions ou (pour plus de facilité) au dessus de $2^{24} = 16777216$ d'ecus lui est egale, ou plutot que je ne puisse jamais recevoir plus de 2^{24} ecus, quelque tard que vienne le coté de la croix, et mon esperance sera

$$\frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{4} \times 2 + \frac{1}{8} \times 4 + \text{------} + \frac{1}{2^{25}} \times 2^{24} + \frac{1}{2^{26}} \times 2^{24} + \frac{1}{2^{27}} \times 2^{24} + \&\text{c.}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \text{------ jusqu'à 24 termes,} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \&\text{c.} = 12 + 1 = 13.$$

Ainsi moralement parlant mon esperance est reduite à 13 ecus et mon equivalent à autant, ce qui paroit bien plus raisonnable que de le faire infini.»

Vaga est hactenus ista solutionis explicatio et contradictioni obnoxia; si enim verum sit, non maiorem nobis videri summam 2^{25} *quam* 2^{24}, *nulla omnino attentio facienda erit ad summam, quam acquirere possine post vigesimum quartum iactum, quippe ante vigesimum quintum iactum faciendum iam possideam* $2^{24} - 1$, *quod non differt in hac theoria ab* 2^{24}. *Eodem igitur iure spem meam* 12 *scudos valere dici potest quam* 13. *Id vero nequaquam dico ad impugnandum Auctoris principium, quod meum quoque est,* que les hommes de bon sens doivent estimer l'argent à proportion de l'usage qu'ils en peuvent faire, *seu potius ne quis inde occasionem capiat male sentiendi de ipsa theoria. Verum id ipsum etiam expressis indicat verbis Cl. Cramerus in sequentibus, quae plane ad mentem nostram sunt. Sic igitur pergit:*

«On le (l'equivalent) pourra encor trover plus petit en faisant quelque autre supposition de la valeur morale de richesses; car celle que je viens de faire n'est pas exactement juste, puisqu'il sera vrai que 100. millions font plus de plaisir que 10. millions quoiqu'ils n'en fassent pas 10. fois plus. Par exemple si l'on vouloit supposer que la valeur morale des biens fut comme la racine quarrée de leurs quantités mathematiques, c'est à dire, que le plaisir que me fait 40000000. fut double du plaisir que me fait 10000000., àlors mon esperance morale seroit

$$\frac{1}{2}\sqrt{1} + \frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{8}\sqrt{4} + \frac{1}{16}\sqrt{8} + \text{etc.} = \frac{1}{2-\sqrt{2}}.$$

Mais cette quantité n'est pas l'equivalent, car l'equivalent doit etre non pas egal a mon esperance, mais tel que le chagrin de sa perte soit egal à l'esperance morale du plaisir que j'espere de recevoir en gagnant. Donc l'equivalent doit etre (par supposition)

$$\left(\frac{1}{2-\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{6-4\sqrt{2}} = 2,9 \text{ \&c.},$$

moins que 3 ce qui est bien mediocre & que je crois pourtant aprocher plus de l'estime vulgaire que 13. &c.»

Essai d'une nouvelle analyse de la mortalité causée par la petite vérole, et des avantages de l'inoculation pour la prévenir.

Histoires et Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Paris. p. 1-45. 1760 (1766)
III.2 - St. 51

Introduction apologétique.*

Ceux qui ont senti tout l'avantage de l'Inoculation, ont imaginé différentes façons de représenter cet avantage, qui, quoique revenant au même, ne laissent pas de faire une impression fort inégale: qu'on suppose, par exemple, une génération de 13 mille enfans, il est sur que si on pouvoit les affranchir de la petite vérole, on sauveroit par ce moyen la vie à environ mille de ces enfans. D'un autre côté, la même exemption ne feroit qu'ajouter environ deux ans à la vie moyenne de ces nouveaux nés. Voilà deux manières d'envisager le même objet, mais la première intéressera beaucoup plus de monde que la seconde, parce que dans la première on fait tomber l'avantage immédiatement & uniquement sur les sauvés, & que dans l'autre on distribue sur toute la génération le même avantage, qui, par l'évènement, devient inutile pour douze treizièmes de cette génération. Je ne suis donc point surpris que le vulgaire soit peu frappé de ce dernier aspect, mais je ne puis m'empêcher de l'être quand je vois des personnes de mérite & d'une grande réputation, demander sérieusement si c'est la peine de subir une opération telle que l'inoculation, dans l'espérance de prolonger sa vie de deux ans; il seroit à souhaiter que les critiques fussent plus réservés & plus circonspects, & sur-tout qu'ils se donnassent la peine de se mettre au fait des choses qu'ils se proposent d'avance de critiquer.

En composant ce Mémoire, ce que j'ai fait à la prière de feu M. de Maupertuis, qui se trouvoit alors à Bâle & que je voyois très-souvent, je me suis attaché sur-tout, à exposer dans une même Table les deux états de l'humanité, l'un tel qu'il est effectivement, & l'autre tel qu'il seroit si on pouvoit affranchir de la petite vérole tout le genre humain. J'ai pensé que le parallèle de ces deux états en expliqueroit mieux la différence & le contraste, que ne feroit le plus ample commentaire, mais j'ai senti aussi la difficulté de l'entreprise; & la défectuosité des listes mortuaires, qui ne marquent point l'âge de ceux que la petite vérole enlève, ne sauroit que mettre un grand obstacle à ces vues. Je voyois bien d'abord que

* *Cette Introduction n'a été faite que long-temps après le Mémoire, étant du 16 Avril 1765.*

l'exécution d'une telle idée demande deux connoissances élémentaires: quel est le risque annuel à différens âges d'être surpris par la petite vérole, pour ceux qui ne l'ont pas eue, & quel est celui d'en mourir pour ceux qui en sont attaqués? Il est vrai que nous ne sommes pas immédiatement informés sur ces deux élémens, mais d'autres connoissances m'ont paru y suppléer avec beaucoup de vraisemblance; j'en parle cependant dans tout le cours de mon Mémoire avec les restrictions convenables; j'accorde même que ces deux risques pourroient bien n'être pas tout-à-fait les mêmes en différens pays. Voici quelques réflexions que j'ai faites là-dessus.

Quand nous voyons que la petite vérole n'attaque guère que les enfans & les jeunes gens, nous sommes d'abord portés à juger que la seule jeunesse y est exposée par sa constitution; aussi appelle-t-on cette maladie en ce pays*, *pustules d'enfans;* mais un peu plus de réflexion nous fait bien-tôt revenir de cette erreur. S'il est rare que la petite vérole attaque les adultes, c'est qu'il est rare que les adultes ne l'aient pas eue, & qu'elle n'attaque jamais, ou presque jamais, deux fois la même personne. C'est ici le caractère essentiel de cette maladie; ajoutez à ce caractère sa grande activité; elle est telle, que suivant mes hypothèses il y a autant à parier qu'on aura la petite vérole avant l'âge complet de 5 ans qu'après, & qu'on peut parier trois contre un de la prendre avant l'âge de 10 ans, quinze contre un avant l'âge de 20 ans, & plus de quatre mille contre un pour l'âge de 60 ans. Ces nombres m'ont toujours paru conformes à ce que les exemples nous apprennent dans les grandes villes. On sait combien il est rare de prendre la petite vérole après l'âge de 60 ans, & en même temps on sait que cela arrive quelquefois. Si l'on suppose à Paris 700 mille habitans, il y aura environ 60 mille personnes au-dessus de l'âge de 60 ans, & sur ce nombre il ne doit y avoir qu'environ quinze personnes qui n'aient pas eu la petite vérole, & deux personnes par an qui probablement la prennent (*a*). Or, on m'a cité tant d'exemples de gens des deux sexes qui sont attaqués de la petite vérole, à Paris, à un certain âge, qu'on doit m'accorder au moins le petit nombre de morts que ma théorie indique pour cet âge. Il est donc vraisemblable que les vieillards qui n'ont point eu la petite vérole, courent le même rsique de l'avoir que les jeunes gens. Pour peu que ce risque diminuât avec le grand âge, ce devroit être une chose sans exemple d'avoir la petite vérole à l'âge de 70 ans, & on en connoît plusieurs. Je n'ai donc plus hésité d'adopter mon premier principe, qui est que tant qu'on n'a pas eu la petite vérole, on court continuellement le même risque de l'avoir. Nous n'avons encore aucune observation qui nous oblige à renoncer à cette supposition, & les loix de la Nature les plus simples sont toujours les plus vraisemblables.

* *A Bâle en Suisse.*

(*a*) *On ne doit pas tenir compte ici de ces personnes rares, supposé qu'il y en ait, qui par leur constitution particulière, ne courent jamais le hasard de prendre la petite vérole, pas même par la voie de l'Inoculation.*

C'est par les mêmes raisons que j'ai conçu que le risque de mourir de la petite vérole, quand on en est attaqué, pourroit bien être, année commune, le même à tout âge: cette hypothèse me paroît confirmée également par les notions que nous avons sur cette maladie & par les résultats de tous les calculs qui portent sur ce fondement. Enfin, tant que nous n'aurons pas de listes mortuaires pour la petite vérole, rangées suivant l'ordre de l'âge de ceux qui en sont morts, je me crois en droit de demeurer attaché à mes deux principes; ils satisfont à tous les phénomènes connus, & on n'a point d'autre raison de dire que la gravitation universelle des corps célestes suit la raison réciproque des quarrés des distances. Je prévois que nous aurons bien-tôt de Londres de pareilles listes: alors je serai moi-même mon plus sévère critique. J'ai dit que les résultats de mes calculs sont tous très-vraisemblables: je citerai ici précisément celui qu'un grand Mathématicien[1] a considéré comme le plus absurde, ou du moins le plus incroyable. J'ai trouvé (§. 9, *note g*) que la seule petite vérole doit enlever pendant le cours de la neuvième année d'âge, les deux tiers du nombre total de toutes les autres maladies prises ensemble, ou les deux cinquièmes de la mortalité entière; la proportion n'est si grande ici que parce qu'à cet âge la mortalité entière est très-petite; la neuvième année est l'année presque la moins meurtrière de la vie. Pour peu qu'on examine la chose, toute autre proportion révoltera tous les esprits. J'ai donc cru devoir faire sentir cette remarque dans une addition ajoutée à la note (*g*); une nouvelle note (*o*) qui suit bien tôt après, a été occasionnée par une question curieuse que le même Géomètre a mise sur le tapis. Il ne la traite qu'en tâtonnant. J'ai donc cru qu'il seroit à propos de la résoudre exactement suivant mes principes: on pourra voir si ma méthode soutient ce nouvel examen. Après tout, il me semble que du moins l'uniformité des deux risques en question ne sauroit souffrir la moindre difficulté depuis la première enfance jusqu'à l'âge de 24 ans, qui fait le terme de mes recherches, parce qu'à cet âge il ne reste presque plus rien à craindre de la petite vérole pour le total, du côté duquel j'ai tourné la plupart de mes réflexions; reste à se déterminer sur l'intensité de chacun des deux risques. Quant au risque annuel d'être attaqué par la petite vérole, pour ceux qui ne l'ont pas eue, j'ai cru ne pouvoir mieux satisfaire aux notions générales que nous avons sur cette maladie, qu'en le supposant d'un huitième, c'est-à-dire que dans le cours d'une année commune mille personnes seront surprises par la petite vérole, lorsqu'il y en a huit mille qui ne l'ont pas eue; ce rapport de 1 sur 8 étant supposé constant, malgré la diminution relative à leur âge croissant, du nombre de ceux qui n'ont pas eu la petite vérole, les Géomètres verront qu'en ce sens j'en ai fait une juste application dans mon analyse au §. 5; ce que je dis pour répondre à la remarque qu'un autre grand Géomètre, dont j'ai toujours respecté la droiture d'esprit & de cœur, m'a fait parvenir, & qui dans un autre sens auroit

1 Il s'agit de d'Alembert. Cf. Intr. p. 202 h.v.

été très fondée; sa difficulté rouloit sur de petites variations qui arrivent dans le cours même de chaque année, auxquelles on ne sauroit avoir égard avec toute la précision géométrique, parce que nous n'avons des listes mortuaires que d'année en année; tout ce qu'on peut faire, est d'établir de certains nombres tels qu'ils sont au milieu de chaque année d'âge, & c'est ce que j'ai fait toutes les fois que je l'ai cru nécessaire. Au reste le différend n'est d'aucune conséquence sensible, sur-tout dans cette matière, qui est si exposée aux inégalités du hasard. Je reviens à mon sujet principal; je dis donc que pour peu qu'on voulût changer ledit rapport de 1 sur 8, l'effet qui en rejailliroit sur les adultes & sur les veillards seroit trop sensible, & peut-être manifestement faux.

Je ne dis pas pour cela que ce rapport soit exactement vrai, mais il ne sauroit manquer de l'être à peu près. Disons encore un mot sur le risque de mourir de la petite vérole pour ceux qui en sont attaqués: la plupart l'ont fait d'un septième; je l'ai un peu diminué, en le faisant d'un huitième: deux raisons m'y ont engagé, la première est qu'on apprend exactement tous ceux qui en meurent, & qu'on ne sauroit apprendre si exactement tous ceux qui ont la maladie; la seconde, est que le rapport de 1 sur 7 feroit la mortalité variolique trop grande par rapport à la mortalité entière, pendant que celui de 1 sur 8 est entièrement conforme à l'observation la mieux constatée, qui est que la petite vérole enlève la treizième partie du total des morts. Ce n'est qu'après un tel examen de mes principes que j'ai pris la peine de composer ce Mémoire, où chaque nouveau pas, m'a paru rendre ces principes plus recommandables; il n'y a que la première année d'âge qui m'a semblé d'abord un peu surchargée dans la distribution de tout le ravage variolique (§. 8). Une plus ample information m'a appris qu'il y avoit peut-être plus de franchise dans ma remarque que de réalité; en tout cas je vois que la cause pourroit être plutôt morale que physique, le peu de communication des nouveaux nés avec le reste de la société, n'en pourroit-il pas préserver quelques-uns de l'attaque de la petite vérole pendant quelques mois? voilà toute ma justification sur cet article qu'on m'a reproché. J'ajouterai encore que je n'avois aucun intérêt dans l'établissement & le choix de mes principes, puisque mes formules sont généralement intégrables; je n'ai jamais eu d'autres intentions là-dessus que d'écouter la voix de la Nature. N'étouffons donc pas les semences d'une analyse, qui moyennant de bonnes listes pathologiques, mortuaires, baptistaires, matrimoniales, &c. peut devenir applicable à plusieurs questions intéressantes, tant physiques que morales & politiques, concernant les différens états & ordres qui partagent l'humanité.

§. 1.* Il est constaté par une longue suite d'observations, que la petite vérole emporte la treizième ou la quatorzième partie de chaque génération; j'ai vu des listes qui marquent la quatorzième partie; j'en ai vu d'autres de Breslaw qui vont

* *Commencé de lire le 30 Avril 1760.*

jusqu'à la trezième partie; quelques-unes vont encore un peu au-delà. On sait encore que cette maladie enlève environ la huitième ou la septième partie de ceux qu'elle attaque, pourvu qu'on prenne la proportion sur un grand nombre d'épidémies. Ces épidémies sont si différentes, que les unes enlèvent au-delà du tiers des attaqués, pendant que d'autres n'imposent ce tribut fatal qu'à un sur 20, 30, 40 ou même davantage; de-là il me paroît tout naturel de dire que la mortalité de la petite vérole dépend moins de la constitution de ceux qu'elle surprend, que de la nature plus ou moins maligne de la cause qui la produit & qui est commune à toute une étendue de pays. Il est à présumer que la petite vérole seroit très-rarement mortelle si la cause épidémique ne la rendoit pas telle; cette simple réflexion forme déjà un préjugé bien favorable pour l'Inoculation, puisque pour la faire, on est le maître de choisir le temps d'une épidémie très-bénigne; & à mon avis l'épidémie la plus bénigne, est celle qui ne manifeste aucune activité. Je considère comme telle tout l'intervalle entre deux épidémies manifestes; aussi a-t-on remarqué d'un côté que plus la petite vérole naturelle se répand, plus elle est dangereuse, & de l'autre, que l'Inoculation faite pendant le plus fort d'une épidémie, n'est plus, à beaucoup près, si sûre que celle qu'on fait hors de toute épidémie. Je ne nie pas pour cela qu'une petite partie du danger de la petite vérole ne puisse trouver son origine dans une certaine disposition du malade, mais il faut bien que par l'Inoculation on prévienne encore ce reste de danger, pourvu qu'on prenne toutes les mesures qu'une longue expérience a dictées, puisqu'avec ces mesures tous les inoculés en réchappent, ou du moins presque tous. C'est un phénomène que je n'entreprends point d'expliquer, mais dont il est triste pour le bien de l'humanité que la vérité soit encore contestée. Mon dessein n'est dans ce Mémoire que de faire une comparaison entre l'état de l'humanité tel qu'il est sans l'inoculation, & celui qui seroit si cette salutaire opération étoit ou généralement admise ou simplement suivie avec de certaines maximes. Il est vrai que nous manquons encore de notions suffisantes pour répondre exactement à cette question, mais il m'a paru que nous en avions assez pour pouvoir répandre quelque nouvelle lumière sur une matière dont on commence à voir la grande importance.

§. 2. J'ai dit d'abord que la petite vérole naturelle enlève la huitième ou la septième partie de ceux qui en sont malades. En Angleterre, on adopte assez communément la dernière proportion; dans d'autres pays il ne paroît pas que la mortalité de cette maladie soit si grande; actuellement elle est ici, à Bâle, épidémique depuis environ neuf mois, & les Médecins disent qu'elle est fort répandue & assez maligne. Cependant, si je dois m'en rapporter au témoignage d'un de nos Médecins les plus accrédités, il en est mort à peine 1 sur 20; je remarque d'ailleurs que de quelque méthode qu'on se serve pour déterminer la proportion moyenne, on pourra toujours alléguer des raisons très-fondées, qui diminuent un peu la mortalité sur le nombre total de ceux qui en sont attaqués. Quant à la proportion qu'il y a de la mortalité de la petite vérole à la mortalité entière du genre humain, on la suppose communément en Angleterre comme 1 à 14; il y a là-dessus des listes rapportées par M. Susmilch[2], qui marquent qu'à Londres il est mort de la petite vérole 19745 sur 260875, ce qui donne la proportion de 1 à $13\frac{1}{5}$; à Vienne, cette maladie a enlevé 1083 sur 13521, c'est 1 sur $12\frac{1}{2}$; à Berlin, 586 sur 6771, c'est 1 sur $11\frac{1}{2}$: à Breslaw, 431 sur 4578, c'est 1 sur $10\frac{1}{2}$, mais ces dernières proportions n'ont été prises que pour deux & trois ans, pendant lesquels il peut y avoir eu une épidémie un peu forte. Outre ces notions spécifiées, nous en avons plusieurs autres, mais plus vagues & moins déterminées. Si on savoit exactement toutes les proportions moyennes qu'on auroit pu déterminer sur un très-grand nombre d'observations, mais bien considérées & réfléchies, on pourroit donner une théorie complète sur les hasards de la petite vérole: une telle théorie dicteroit les maximes que tout homme raisonnable doit suivre. Voici deux articles qu'on ne connoît encore que fort superficiellement & qu'il seroit important de connoître avec une grande précision.

§. 3. Le premier article est le risque que l'on court tous les ans de prendre la petite vérole tant qu'on ne l'a pas eue; le second, le risque d'en mourir pour les différens âges lorsqu'on la prend. Moyennant la connoissance de ces deux articles, on seroit en état de faire un parallèle assez exact entre les deux états de l'humanité ci-dessus mentionnés, l'un naturel & l'autre exempt de la destruction de la petite vérole: le second de ces deux articles seroit bien facile à déterminer, si les Médecins vouloient tenir un registre de leurs malades de la petite vérole, où ils marqueroient l'âge de chaque malade & ceux qui en seroient morts. D'un grand nombre de pareils registres, dont on communiqueroit les résultats au Doyen de la Faculté, on déduiroit assez exactement le danger que l'on court de mourir à chaque âge auquel on prendroit la petite vérole: un habile homme en tireroit plusieurs autres conséquences utiles, même à l'égard de notre premier article, qu'il n'est pas si facile de déterminer. Dans cette incertitude, il ne reste qu'un moyen, c'est de former sur les deux dits articles les hypothèses les plus vraisemblables: voici celles que j'ai choisies.

(1) Je supposerai qu'indépendamment de l'âge dans un grand nombre de personnes qui n'ont pas encore eu la petite vérole, cette maladie attaque chaque année une personne sur autant de personnes qu'il y a d'unités dans n. Suivant cette hypothèse, le danger de prendre la maladie resteroit le même pour chaque année de vie, tant qu'on ne l'auroit pas eue; si, par exemple, on faisoit $n = 10$, le sort de chaque personne seroit d'être décimée chaque année de sa vie, pour savoir si elle aura cette même année la petite vérole ou non, jusqu'à ce que le sort fût tombé une

2 J.P. Süssmilch «Die Göttliche Ordnung in den Veränderungen des menschlichen Geschlechts, aus der Geburt, Tod und Fortpflanzung desselben erwiesen» Berlin 1741.

fois sur elle. Cette hypothèse me paroît fort vraisemblable pour tous les jeunes gens jusqu'à l'âge de seize à vingt ans. Si nous voyons peu de personnes au-dessus de cet âge qui prennent la petite vérole, c'est que le plus grand nombre en aura déjà été atteint. La suite nous fera voir quel degré de vraisemblance cette hypothèse mérite.

(2) Je supposerai en second lieu, que dans quelqu'âge qu'on prenne la petite vérole, le danger d'en mourir est toujours le même, & que sur un nombre de malades, exprimé par m, il en meurt un. Je remarque à l'égard de cette supposition, qu'aucun Médecin ne s'est encore avisé de supposer la petite vérole, tout le reste étant égal, plus ou moins dangereuse par le seul âge auquel on la prend, pourvu que cet âge n'excède pas les vingt ans. Ce n'est qu'au-dessus de cet âge qu'on suppose ordinairement la petite vérole commencer à devenir un peu plus dangereuse. Nous aurons occasion ci-dessous d'examiner cette hypothèse de plus près.

§. 4. Comme notre intention est sur-tout de démêler dans la mortalité entière, celle de la petite vérole pour tous les âges, ou du moins jusqu'à l'âge de vingt ans, il faut connoître avant toutes choses la mortalité entière, mais moyenne. Nous ne manquons pas de listes mortuaires faites en différens païs, dans lesquelles il est marqué combien sur un certain nombre de personnes il en meurt à chaque année d'âge jusqu'à la mort du dernier: on regarde ensuite ce grand nombre de personnes comme nées en même temps. Ces listes ont ordinairement des inégalités manifestes, à moins qu'on ne choisisse les nombres sur un très-grand nombre de listes annuelles; elles forment comme un chemin raboteux qu'il faut aplanir & unir; on ajoute aux uns & on retranche autant aux autres, jusqu'à ce qu'on obtienne une uniformité de loi dans les variations. M. Susmilch cite une telle Table construite par M. Halley[3], dans laquelle on ne voit aucune variation brusque & difforme. La Table que j'exposerai ci-dessous commence par mille enfans tous âgés d'un an accompli, mais M. Halley ne marque pas quel est le nombre des enfans nouveaux nés que la Table suppose & dont il reste mille vivans au bout d'un an; M. Susmilch le suppose de 1238, en disant que c'étoit là le nombre annuel moyen des enfans nés à Breslaw; mais toutes les autres listes nous indiquent que la mortalité de la première année est plus grande que de 238 sur 1238; voyez, par exemple, la Table insérée au Tome second de l'excellente Histoire Naturelle de M. de Buffon, *page 590*[4], vous y trouverez 6454 morts avant la fin de leur première année, sur 23994 enfans nouveaux nés; & suivant cette proportion, il faudroit commencer la Table de M. Halley par 1368 au lieu de 1238. Il paroît que M. Halley a voulu partir d'un

3 E. Halley «An Estimate of the Degrees of the Mortality of Mankind, drawn from curious Tables of the Births and Funerals at the City of Breslaw; with an Attempt to ascertain the Price of Annuities upon Lives.» Phil. Trans. 17, p. 596–610 (1693) et «Some further Considerations on the Breslaw Bills of Mortality» Phil. Trans. 17, p. 654–656 (1693).

4 G.L. Buffon «Histoire naturelle générale et particulière» Impr. Royale. Paris 1749.

nombre rond, en observant simplement la proportionnalité pour chaque âge. Je choisirai un milieu entre 1368 & 1238, & je supposerai que sur 1300 enfans nouveaux nés il y en a 1000 qui arrivent à l'âge d'un an accompli, après quoi j'adopterai la Table de M. Halley telle qu'elle est.

. 5. Soit à présent l'âge exprimé par années $=x$,
le nombre des survivans à cet âge $=\xi$,
le nombre de ceux qui n'ont pas eu la petite vérole à cet âge $=s$,
& qu'on retienne la signification donnée ci-dessus (§. 3.) aux lettres n & m, voici là-dessus le raisonnement qu'on peut faire pour exprimer généralement la valeur de s, ce qui doit faire l'objet principal de ces recherches. Je dis donc que l'élément $-ds$ est d'abord égal au nombre de ceux qui prennent la petite vérole pendant le temps dx, & ce nombre devient, par nos hypothèses

$$=\frac{s\,dx}{n},$$

puisque si dans le temps d'une année sur n personnes, une prend la petite vérole, il s'ensuit que dans le temps dx sur s personnes, il y aura

$$\frac{s\,dx}{n}$$

qui prendront cette maladie. Dans ce nombre

$$\frac{s\,dx}{n},$$

sont compris ceux qui en meurent, mais il faudra y ajouter encore ceux que les autres maladies emportent dans le même temps dx & sur le même nombre s; le nombre de ceux qui meurent de la petite vérole pendant le temps dx, est

$$=\frac{s\,dx}{mn},$$

& par conséquent le nombre total de ceux qui meurent par d'autres maladies,

$$=-d\xi-\frac{s\,dx}{mn};$$

mais ce dernier nombre doit être diminué en raison de ξ à s, puisqu'il ne s'agit que de la diminution de ceux qui n'ont pas encore eu la petite vérole, dont le nombre est s. Nous aurons donc cette équation

$$-ds = \frac{s\,dx}{n} - \frac{s\,d\xi}{\xi} - \frac{ss\,dx}{mn\xi}.$$

Dans cette équation, les élémens ds & $d\xi$ sont négatifs par eux-mêmes, puisque les nombres s & ξ diminuent, c'est pourquoi il faut y mettre le signe négatif; mais le signe du dernier terme est devenu négatif par une soustraction réelle qu'il falloit faire. On voit aussi que j'entends proprement par $1/n$ & $1/m$ l'intensité des périls à prendre la petite vérole pour ceux qui ne l'ont pas encore eue, & à en mourir lorsqu'on en est attaqué, en supposant ceux qui l'ont eue une fois hors de péril de la reprendre. S'il y a des exemples qu'on ait pris la maladie en deux différentes fois, ils sont si rares qu'ils ne méritent pas qu'on en parle. Il est fort remarquable que notre équation différentielle admette une intégration, quoique les indéterminées soient mêlées, & qu'il y ait trois indéterminées, ce qui est fort rare pour des questions qui éclaircissent l'état de la Nature & qui diffèrent si fort des questions abstraites. Voici les passages qui conduisent à l'intégration: qu'on mette

$$\frac{s\,d\xi}{\xi} - ds = \frac{s\,dx}{n} - \frac{ss\,dx}{mn\xi};$$

cette équation multipliée par $\frac{\xi}{ss}$, donne

$$\frac{s\,d\xi - \xi\,ds}{ss} = \frac{\xi\,dx}{ns} - \frac{dx}{mn};$$

& si on suppose $\frac{\xi}{s} = q$,
on aura

$$dq = \frac{q\,dx}{n} - \frac{dx}{mn},$$

ou bien

$$mn\,dq = mq\,dx - dx,$$

ce qui fait

$$\frac{mn\,dq}{mq-1} = dx,$$

dont l'intégrale est

$$n \log.(mq-1) = x + C,$$

en entendant par C la constante requise;
& si on remet ξ/s à la place de q, on aura[5]

$$nl\left(\frac{m\xi}{s}-1\right)=x+C.$$

Si on nomme e le nombre qui a l'unité pour son logarithme hyperbolique, & qui est 2,718, on aura, en prenant les nombres de la dernière équation,

$$\left(\frac{m\xi}{s}-1\right)^n=e^{x+C},$$

d'où l'on tire enfin

$$s=\frac{m}{e^{\frac{x+C}{n}}+1}\xi.$$

§. 6. Voilà donc la valeur de s déterminée par des quantités que je traite toutes comme connues; mais avant que de faire l'application de cette équation, je ferai quelques réflexions sur la constante C, de même que sur le choix de nos positions m & n: quant à la constante C, la manière la plus naturelle de la déterminer, est celle de dire qu'au commencement de chaque génération, lorsque x est $=0$, on doit avoir $s=\xi$, l'une & l'autre lettre exprimant alors le nombre des enfans nouveaux nés dont il est question: cette considération donne

$$e^{\frac{C}{n}}=m-1,$$

& par conséquent

$$s=\frac{m}{(m-1)e^{\frac{x}{n}}+1}\xi.$$

Je me tiendrai à cette équation, quoiqu'il soit très-possible, même suivant la plupart des Médecins, que plusieurs enfans aient eu la petite vérole avant de naître; si on vouloit avoir égard à cette considération, il faudroit un peu changer la constante, & notre théorie ne s'en trouveroit que mieux, ce que j'ai voulu faire remarquer d'avance. De tels enfans seroient à considérer comme nés avec la disposition de ne jamais prendre la petite vérole, & il y a apparence que ceux qui se sont soumis à l'Inoculation sans gagner la maladie, doivent être placés, pour la plupart, dans cette classe.

5 Dans cette équation $l=\log$.

Quant aux valeurs des nombres *n & m*, je me suis contenté de les supposer constamment les mêmes, du moins jusqu'à l'âge d'environ vingt ans; mais nous sommes encore libres sur le choix de ces valeurs absolues, c'est pourquoi il faut tâcher de les choisir telles, qu'elles soient les plus convenables aux notions que nous avons sur la nature de la petite vérole, relativement à chaque climat. On voit facilement que plus on augmente le nombre n, moins on charge l'enfance & la jeunesse; & réciproquement. Si on prenoit pour n un nombre extrêmement grand, presque tout le monde mourroit avant que de prendre la petite vérole, puisqu'en supposant n infiniment grand, on trouve $s=\xi$; & si au contraire on supposoit n être un nombre très-petit, tous les enfans, ou presque tous, en seroient atteints dès leur premier âge. Il semble qu'à Paris il y ait plus de personnes avancées en âge sujettes à cette maladie qu'il n'y en a à Bâle, où la petite vérole, depuis huit à neuf mois, a attaqué plus de 600 personnes, dont la plus âgée que j'aie entendu nommer, n'avoit pas 23 ans accomplis. Si cette conjecture étoit fondée, il faudroit prendre le nombre n plus grand pour Paris que pour Bâle. Après quelques réflexions, je me suis déterminé à calculer pour tous les âges le nombre de ceux qui probablement n'auroient pas encore eu la petite vérole, en supposant $n=8$. Enfin, je supposerai de même $m=8$, c'est-à-dire que la petite vérole enlève 1 sur 8 qu'elle attaque. Ces suppositions nous donnent enfin cette équation,

$$s=\frac{8}{7e^{\frac{x}{8}}+1}\,\xi\,.$$

§. 7. Cette dernière équation, qui n'est plus que numérique, nous met en état de déterminer la valeur de s pour chaque âge, c'est ce qui m'a engagé à construire la Table qui est à la fin de ce Mémoire, dont voici l'explication.

La première colonne marque tous les âges par des années accomplies, que j'ai dénotés par x, & elle commence par 0, qui répond au jour de la naissance.

La seconde colonne indique le nombre de ceux qui restent en vie à chaque âge sur le nombre de 1300, que je considère tous comme nés au même jour; cette colonne est formée sur la Table de M. Halley. Tous ces nombres sont indiqués par la variable ξ.

La troisième colonne est formée sur l'équation finale du précédent article; ainsi elle donne pour chaque âge, suivant nos hypothèses, le nombre de ceux qui n'ont pas encore eu la petite vérole.

La quatrième colonne donne au contraire le nombre de ceux qui ont déjà eu la petite vérole, qui en sont réchappés & qui ne sont morts par aucune autre maladie: ils sont exprimés par $\xi-s$.

La cinquième colonne marque le nombre de ceux qui probablement auront pris la petite vérole pendant l'année précédente; c'est suivant mon hypothèse, la huitième partie de tous ceux qui ne l'ont pas encore eue, ou $\frac{1}{8}\,s$; mais pour plus grande exactitude, je prendrai ici pour *s*, non la valeur que nous avons trouvée pour le commencement de chaque année, mais pour le milieu de l'année précédente, c'est-à-dire que je prendrai le milieu arithmétique entre les deux nombres de la troisième colonne qui se suivent. Ainsi le premier nombre de cette cinquième colonne marque combien d'enfans nouveaux nés auront pris la petite vérole pendant la première année de leur âge.

La sixième colonne marque le nombre de ceux qui meurent de la petite vérole pendant l'année que nous avons décrite; ainsi, suivant notre hypothèse, tous ces nombres sont la huitième partie des nombres analogues de la cinquième colonne.

La septième colonne exprime la somme de tous ceux qui sont morts de la petite vérole depuis la naissance jusqu'à chaque année d'âge accomplie.

La huitième colonne indique le nombre de ceux que toutes les autres maladies, hors de la petite vérole, enlèvent pendant chaque année courante; ainsi chaque nombre de cette colonne est la différence entre tous les morts de l'année passée, que l'on connoît par la seconde colonne, & ceux qui sont morts de la petite vérole pendant la même année passée.

Lorsque les nombres sont trop petits pour négliger les fractions, j'ajouterai à ces nombres une figure décimale; au reste, je n'étendrai pas cette Table au-delà de vingt-quatre ans, l'effet de la petite vérole ne pouvant plus être considérable au-delà de cet âge, relativement à toute l'humanité. D'ailleurs les principes que nous avons employés n'en auront que plus de certitude. Je me contenterai donc d'indiquer en général le petit reste de mortalité que la petite vérole pourra encore vraisemblablement causer.

§. 8. La précédente Table, quoique parfaitement conforme à nos hypothèses, ne sera pas à la vérité exactement conforme à la Nature; je suis cependant persuadé qu'elle ne s'en écarte pas beaucoup, tant à cause de la vraisemblance de nos hypothèses, que parce qu'aucun nombre ne me paroît choquer ces notions générales, que des observations infinies nous ont dictées sur la petite vérole. Il n'y a peut-être que le premier nombre de la cinquième colonne qui marque combien d'enfans sur 1300 prendront la petite vérole pendant leur première année de vie, qui paroîtra un peu trop grand. La Table donne 137 pour ce nombre, & par conséquent 17 pour le nombre de ceux qui en mourront; on pourra cependant se servir de notre Table telle qu'elle est, sans un grand nombre de nouvelles observations sur la petite vérole, je ne conseillerois pas d'y rien changer*. Voici donc quelques remarques.

§. 9. (*a*) A l'âge de six ans accomplis, ou très-peu après, le nombre des survivans sera partagé en deux classes égales; une moitié aura eu la petite vérole &

* *Voyez là-dessus mon Introduction apologétique, vers la fin.*

l'autre ne l'aura pas eue. A l'âge de quinze ans, il n'y aura plus qu'environ la sixième partie des vivans qui n'aura pas eu la petite vérole, ou environ la douzième partie de la géneration entière. Il y a donc à parier 11 contre 1 pour chaque nouveau né, qu'il prendra la petite vérole avant l'âge de quinze ans accomplis, ou qu'il mourra avant cet âge. Enfin à l'âge de vingt-quatre ans, il n'y aura plus que 32 personnes qui soient échappées jusque-là à cette maladie; c'est la dix-huitième partie de tous ceux qui atteignent à cet âge, & la quarantième partie de tous les nouveaux nés. Il y a donc 39 à parier contre 1, pour chaque nouveau né, que l'enfant mourra ou prendra la petite vérole avant vingt-quatre ans.

(*b*) Si on vouloit étendre nos principes & nos hypothèses au-delà de vingt-quatre ans, on pourroit supposer que le nombre de ceux qui n'ont pas eu la petite vérole, diminue de la moitié à chaque 5 ans, même en les supposant affranchis de toute autre maladie qui pût les enlever. Il y aura donc tout au plus seize à l'âge de vingt-neuf ans, huit à l'âge de trente-quatre ans, quatre à l'âge de trente-neuf ans, deux à l'âge de quarante-quatre ans, & enfin un à l'âge de quarante-neuf ans, qui n'aient pas eu la petite vérole; & comme on ne voit dans tout cela encore rien de manifestement faux, c'est un nouveau préjugé en faveur de nos hypothèses.

(*c*) Sur les 32 personnes qui à l'âge de vingt-quatre ans n'auront pas encore eu la petite vérole, il y en aura tout au plus 3 qui mourront de cette maladie, parce qu'il y en aura au moins 8 qui mourront avant d'en être attaqués. Si nous ajoutons ces 3 à la somme de 98 morts de la petite vérole avant l'âge de vingt-quatre ans, nous aurons en tout 101 personnes mortes de cette maladie, ce qui fait à peu-près la treizième partie de la génération entière, & ce qui est entièrement conforme à la plus grande partie des listes mortuaires qui indiquent le nombre de ceux qui sont morts de la petite vérole. Cet accord me paroît d'autant plus digne d'attention, qu'il découle de notre théorie, sans que nous ayons jamais tenu compte de la proportion entre le nombre de ceux qui meurent de la petite vérole & le nombre total des morts de toutes maladies. Cette proportion n'est donc qu'un phénomène que notre théorie explique avec la dernière précision.

(*d*) La septième colonne de notre Table nous fait encore voir que de tous ceux qui meurent de la petite vérole, la moitié en sera morte avant l'âge de 5 ans.

(*e*) La huitième colonne marque que depuis l'âge de douze à treize ans, toutes les maladies & accidens, en exceptant la seule petite vérole, n'enlèvent dans l'année que 3,7 sur 646 personnes qui vivoient au commencement de l'année, ce qui fait un seul sur 173 personnes. De-là il suit que sans la petite vérole, l'année la plus sûre est celle de douze à treize ans; il y a 172 à parier contre 1 qu'une personne qui a déjà eu la petite vérole ne mourra pas cette année.

(*f*) C'est encore la huitième colonne qui doit régler les rentes viagères qu'on accorde aux différens âges dans les tontines, puisqu'il est comme prouvé qu'on ne place guère l'argent sur la tête d'un enfant qui n'a pas encore eu la petite vérole;

cependant ceux qui évaluent les rentes à accorder aux différens âges, au lieu de se fonder simplement sur la huitième colonne, n'ont coutume que de considérer les différences de la seconde colonne, ou bien la somme des nombres correspondans de la sixième & de la huitième colonne.

(*g*) En vertu de la remarque (*c*), la mortalité entière de la petite vérole fait la treizième partie de la somme de toutes les mortalités entières, ou la douzième partie de toutes les mortalités, excepté celle de la petite vérole; mais si on ne considère les mortalités que successivement pour chaque année d'âge, le rapport entre la mortalité de la petite vérole & celle de toutes les autres maladies, change extrêmement à chaque année. Pendant la première année d'âge, ce rapport devient, en vertu de la sixième & de la huitième colonne, comme 17 à 283, ou environ comme 1 à 17. Ensuite ce rapport augmente considérablement, & puis diminue jusqu'à devenir enfin insensible. Ce rapport devient donc quelque part le plus grand, & les deux dites colonnes nous apprennent que c'est vis-à-vis de l'âge indiqué par 9; à cet âge la mortalité de la petite vérole, pendant le cours de toute l'année précédente, est exprimée par 4, & la somme de toutes les autres mortalités par 6; d'où il résulte la proportion de 4 à 6 ou de 2 à 3. De-là nous voyons que pendant le cours de la neuvième année la seule petite vérole emporte les deux tiers de ce que toutes les autres maladies peuvent faire, ou les deux cinquièmes de ce qu'emportent toutes les maladies ensemble. Voici un point de vue d'où la petite vérole se montre sous une face terrible; mais cette effrayante proportion ne dure pas long-temps, elle diminue ensuite continuellement; pendant le cours de la vingt-quatrième année, la petite vérole n'enlève plus que la quinzième partie du total, & bien-tôt après sa faux est presque entièrement émoussée*.

* *[Dans une critique de ce Mémoire[6], qu'on a fait imprimer long-temps avant que le Mémoire l'ait été, on cite cette remarque, ou plutôt cette conséquence, comme donnant le plus d'atteinte à ma théorie; on trouve ma proportion de 2 à 3 excessive. A-t-on bien réfléchi sur ce reproche? voici le fait. La liste mortuaire de M. Halley marque que sur une génération de 1300 enfans, il en meurt 10 en tout dans le cours de la neuvième année d'âge; je n'ai donc aucune part à ce nombre, qui est de fait. Reste l'autre nombre à examiner; j'ai dit que la neuvième année d'âge enlève sur cette même génération de 1300 enfans + par la seule petite vérole, c'est la vingt-cinquième partie du total, constaté par une infinité d'observations, & exactement confirmé par mes calculs; c'est donc cette vingt-cinquième partie que l'on trouve excessive, après qu'on a dit immédiatement auparavant: «Il y a lieu de croire que $1/n$ est d'abord assez petit, & qu'il augmente ensuite pour recommencer à diminuer après l'âge de 10 ans», c'est-à-dire, «qu'il y a lieu de croire que l'âge de 8 à 9 ans est plus exposé que tout autre au risque d'être attaqué par la petite vérole». Je souhaiterois que l'auteur de cette critique prît la peine de faire à son gré une distribution des 100 ou 101 personnes, qu'on sait positivement que la petite vérole enlève communément sur une génération de 1300 enfans, il verroit s'il est possible de concilier sa critique avec ce qu'il dit, qu'«il y a lieu de croire»].*

6 d'Alembert «Sur l'application du calcul des probabilités à l'inoculation de la petite verole» et «notes sur le Mémoire précédent» Opuscules II p. 26–48 ainsi que «Théorie mathématique du problème de l'inoculation» Opuscules II p. 57–97.

(*h*) La remarque précédente donne encore occasion de rechercher l'âge qui répond à la proportion moyenne entre toutes les proportions indiquées: cette proportion moyenne entre les morts de la petite vérole & ceux de toutes les autres maladies, est, tant en vertu de la plupart des listes mortuaires qu'en vertu de notre Table, comme 1 à 12, & par conséquent il faut que la petite vérole enlève 100 sur 1300. Là-dessus on peut demander quel est l'âge auquel, si tous les enfans prenoient la petite vérole, il en mourroit pareillement cent? Notre Table indique que c'est à peu-près à l'âge de 4 ans, car à cet âge il y a 760 de survivans, mais ce nombre doit être augmenté de ceux que la petite vérole a enlevés pendant les quatre premières années, & desquels la plupart vivroient encore sans la destruction précédente de cette maladie. Or il en est mort 47; & si sur ce nombre on prend 40, & qu'on les ajoute à 760, on aura 800: il y auroit donc sur la naissance de 1300 enfans 800 qui parviendroient à l'âge de 4 ans accomplis; & alors si tous ces enfans prenoient la petite vérole, il en mourroit la huitième partie, ce qui feroit encore 100, ou la treizième partie de la naissance entière.

(*i*) On fait souvent mention du nombre de ceux qui meurent sans avoir jamais eu la petite vérole. Les élémens que nous avons choisis pour former notre Table, font ce nombre égal à 500; car si 100 personnes meurent en tout de la maladie en question, il faut que 800 aient eu effectivement la petite vérole, & que les 500 qui restent meurent sans la prendre; au lieu de 500, il faudroit mettre 650 si on vouloit supposer que la petite vérole n'enlève que la quatorzième partie de chaque naissance annuelle, & la septième partie de tous ceux que cette maladie attaque.

(*l*) On peut dire qu'il meurt en tout de la petite vérole fort à peu-près 100 sur 1300, dont 1200 meurent par d'autres maladies; que de ces 1200 il y en aura 700 qui auront eu la petite vérole & qui en seront réchappés, & que 500 mourront sans avoir jamais eu la petite vérole. Cela se confirme encore par notre Table, car à l'âge de vingt-quatre ans accomplis, la huitième colonne marque en tout 631 personnes mortes par d'autres maladies, & la seconde colonne donne 572 survivans à cet âge, desquels il en mourra environ 3 de la petite vérole; de sorte que 569 mourront tous de quelqu'autre maladie, & qu'il y aura en tout 1200 personnes qui mourront autrement que par la petite vérole.

(*m*) Dans une succession uniforme & continuelle de générations annuelles, le nombre de tous ceux qui sont attaqués de la petite vérole pendant chaque année, est de 800 sur 1300, ou de $8/13$ de la naissance annuelle. Si on suppose la naissance annuelle à Paris de 18 mille enfans, il faut qu'il y ait chaque année plus de 11 mille malades de la petite vérole, ou environ 900 par mois; & si on vouloit donner le temps d'un mois à la durée de la maladie, il y auroit, sans interruption, 900 malades de la petite vérole à Paris, à considérer la chose dans son état moyen. Quel soulagement aux Médecins si on pouvoit les délivrer de cette terrible tâche!

(*n*) On sait ce qu'on appelle *vie moyenne;* on la trouve en prenant sur un grand nombre de personnes la somme des vies de chacune, depuis sa naissance jusqu'à sa mort, & en divisant cette somme par le nombre des personnes. Cette vie moyenne pour les enfans nouveaux nés, est d'environ $26\frac{1}{2}$, suivant la liste mortuaire de M. Halley; mais quelle seroit la vie moyenne d'un grand nombre de nouveaux nés qu'on sauroit avoir à mourir de la petite vérole? C'est-là une question qui éclaircit encore la nature de la petite vérole. La septième colonne nous met en état de résoudre ce problème; il faudra prendre le complément de chaque nombre de cette colonne à 101, qui fait le nombre de tous ceux qui meurent de la petite vérole; de cette façon on aura pour chaque année le nombre de ceux que la petite vérole n'a pas encore enlevés, & qu'elle se réserve d'enlever à son temps; ensuite il faut, suivant la règle ordinaire, prendre la somme de tous ces complémens & la diviser par 101; mais comme notre Table ne s'étend que jusqu'à l'âge de vingt-quatre ans accomplis, il y faut une petite correction. Remarquons donc qu'après cet âge la petite vérole n'enlèvera plus que 3, dont chacun auroit pu vivre encore environ 6 ans, en prenant le milieu de tous les trois; de sorte qu'il faudra ajouter à la somme de tous les dits complémens environ 3×6, ou 18. En suivant cette méthode, on trouve la vie moyenne de tous ceux que la petite vérole doit enlever, de 6 ans 1 mois; à cet âge la maladie aura déjà été fatale à 61 sur 101; mais les autres 40 qui ont encore le même sort devant eux, peuvent se promettre encore autant de vie qu'en ont eu les 61 déjà morts, puisqu'il y en a, par exemple, 3 qui vivront encore à l'âge de vingt-quatre ans, & qui eux-mêmes peuvent encore se promettre environ 6 ans.

(*o*) [Ce Mémoire ayant donné occasion à un célèbre Académicien de former cette autre question; *De toutes les personnes actuellement vivantes, combien y en a-t-il qui n'ont pas eu la petite vérole?* Ses raisonnemens l'ont conduit à cette conclusion, que ce nombre *est tout au plus le quart du total des vivans.* Voici la solution de cette question, tirée de mes principes.

Soit N le nombre total des vivans, a le nombre de ceux qui meurent par an, x le nombre cherché de ceux qui n'ont pas eu la petite vérole, on aura

$$\frac{1}{13}a=\frac{x}{64} \quad \& \quad x=\frac{64}{13}a,$$

Si on fait $\frac{N}{a}=g$, on aura

$$x=\frac{64}{13}\times\frac{N}{g};$$

& si on suppose $g=32$, ce sera

$$\frac{2}{13}N$$

& environ 107 mille pour Paris, en supposant le nombre de ses habitans 700 mille.

Je souhaiterois, car je ne cherche que la vérité, que quelques Curés de village voulussent bien se donner la peine de faire de pareils dénombremens, mais il faudroit exclure les villages où l'on a coutume d'envoyer des enfans en nourrice, & n'employer que des Curés prudens & entendus, qui sussent bien articuler leurs questions & réduire à leur juste valeur les résponses. Voici un autre théorème qui pourroit servir à la vérification de nos principes. Si de tous les vivans on ne prend que l'enfance & la jeunesse, jusqu'à l'âge de seize ans & demi, on trouvera le nombre de ceux qui auront eu la petite vérole à peu-près égal au nombre de ceux qui ne l'auront pas eue. Je crois que le dénombrement fait sur ce résultat seroit moins sujet à des réponses équivoques, & il seroit beaucoup plus facile dans l'exécution.]

§. 10. On pourroit tirer un grand nombre d'autres corollaires de notre théorie; je les passe sous silence pour n'être pas trop long. Si cependant quelques-uns de nos corollaires ne paroissoient pas assez conformes à l'expérience, il ne faudroit pas pour cela rejeter nos calculs, car en changeant un peu les élémens dont je me suis servi, on pourra peut-être satisfaire plus exactement aux phénomènes. Il semble même que chaque pays demande quelque petit changement dans les élémens; il paroît, par exemple, qu'en ce pays (*à Bâle*) il est plus rare qu'à Paris de parvenir jusqu'à l'âge de vingt ans sans avoir eu la petite vérole; d'un autre côté, je ne crois pas que cette maladie enlève ici au-delà de la douzième partie de ceux qu'elle suprend ni au-delà de la vingtième partie du total des morts de tous genres. Si j'avois donc voulu accommoder mes calculs à mon petit pays, j'aurois supposé n, §. 3, (1), plus petit que 8 & m plus grand que 8, §. 3, (2); mais comme nous n'avons pas ici les observations requises, j'ai préféré de conformer mes calculs aux observations des grandes villes. Je passe à d'autres considérations.

§. 11. On s'est donné beaucoup de peine pour évaluer le gain qu'on pourroit espérer de l'Inoculation si elle étoit généralement introduite, & l'avantage de chaque particulier qui se feroit inoculer; on voit bien en général que ce profit & cet avantage ne sauroient manquer d'être fort considérables & infiniment précieux; mais de quelle sorte d'unité doit-on se servir pour mesurer la chose? Est-ce par la vie moyenne qu'on peut espérer après l'Inoculation? Les années de la vie sont-elles toutes d'un même prix? Quoi qu'il en soit, je dis que la question est indéterminée tant qu'on ne connoît pas l'effet de la petite vérole pour chaque année durant toute la durée d'une génération, & sa proportion avec l'effet de toutes les autres maladies. Au défaut de cette connoissance, on a recours à des estimes, le plus souvent trompeuses, & à plusieurs espèces de quantités qu'on appelle *moyennes*, & dont on peut faire facilement une mauvaise application. J'ai donc jugé que le seul parti à prendre, est celui de déterminer sur la même génération de 1300 nouveaux nés, quel seroit au bout de chaque année le nombre de survivans si toute cette génération étoit exempte de la petite vérole, ou, ce qui revient au même, si aucun n'en mouroit. Sur une telle détermination, il suffira de comparer les résultats avec la seconde colonne de notre Table, pour voir d'un coup d'œil le rapport entre les deux espèces de vie. Il sera facile ensuite d'aller plus loin & de répondre à plusieurs autres questions très-intéressantes qu'on peut faire sur ce sujet. Voici donc comment on pourra procéder pour former cette nouvelle liste, en se contentant d'examiner la chose d'année en année, ce qu'on est obligé de faire, parce qu'on n'a point de table mortuaire de six mois en six mois, qu'on pourroit employer avec plus d'exactitude. La sixième colonne marque que pendant la première année de vie la petite vérole a emporté 17 enfans; ainsi sans cette maladie il y auroit 1017 au lieu de 1000 *(col. 2)* qui atteindroient l'âge d'un an. Ensuite il faut considérer que si pendant la seconde année il meurt 133 *(col. 8)* sur 1000 qui étoient en vie au commencement de la seconde année, il en mourra 135,3 sur 1017, & qu'ainsi 881,7 resteront en vie & atteindront la troisième année; en général, on continuera la liste des nombres que nous cherchons, si du dernier nombre cherché on retranche

$$\frac{p}{q}r,$$

en prenant pour q successivement les nombres de la seconde colonne de la première Table, pour r ceux de la huitième colonne, & pour p le terme de la nouvelle liste qui précède, puisque le nombre de ceux qui meurent pendant chaque année par toutes les maladies non varioliques, est sans doute proportionnel au nombre de ceux qui vivent à cet âge, quelle que soit la proportion entre ceux qui ont déjà eu la petite vérole & ceux qui ne l'ont pas encore eue. Ainsi nous voyons dans la Table qui suit, qu'il y a 855 qui atteignent la troisième année dans l'état variolique & naturel, & qu'il y en auroit 881,7 dans l'état non variolique: la Table précédente montre aussi que pendant tout le cours de la troisième année toutes les maladies non varioliques enlèvent 47; il faut donc dire, si sur 855 il en meurt 47, combien mourront sur 881,7, & on trouve 48,4, qu'il faut ôter de 881,7 pour avoir le nombre suivant, qui sera par conséquent 833,3. C'est de cette façon que j'ai construit la seconde Table qui se trouve à la fin de ce Mémoire, où les deux premières colonnes sont les mêmes que dans la première Table, quoique j'indique la seconde colonne par un autre nom, savoir, par celui d'*état naturel & variolique*, par antithèse à la troisième colonne, qui marque l'*état non variolique*, ce qui fait proprement le nombre des survivans à chaque année, en supposant qu'aucun ne dût mourir de la petite vérole. J'ajoute une quatrième colonne qui marque les différences entre les deux états.

§. 12. La Table dont je viens de donner l'explication, met tout d'un coup dans un grand jour les problèmes qu'on propose ordinairement pour déterminer le ravage que la petite vérole exerce sur le genre humain, son terrible effet contre la propagation de l'espèce & sa conservation, & le gain que l'humanité feroit si elle pouvoit être exemptée de cette source de destruction. Tant que je me servirai de pareilles expressions, j'espère ne point irriter ceux qui se déclarent contre l'Inoculation. Voici donc les corollaires que je tire de cette seconde Table & qui me paroissent les plus importans.

(*a*) *Le gain absolu*, marqué dans la quatrième colonne, croît d'abord sensiblement, mais les accroissemens de ce gain diminuent. Le plus grand gain absolu répond à l'âge de vingt jusqu'à vingt-deux ans; à cet âge, le nombre des survivans, pour l'état supposé exempt du fléau de la petite vérole, surpasse le nombre des survivans pour l'état naturel & variolique de 80,3, le total des naissances étant supposé de 1300: à cet âge donc le gain va déjà à près de la seizième partie du nombre des naissances. Après cet âge, les nombres qui expriment le gain diminuent, & il étoit facile de prévoir que cela arriveroit, puisque dans l'extrême vieillesse le nombre des survivans doit être extrêmement petit pour l'un & l'autre état.

(*b*) La vraie estime du gain doit être formée par le rapport de ce gain au nombre correspondant des survivans pour l'état naturel; on peut en ce sens l'appeler *gain relatif.* A l'âge de cinq ans accomplis, l'état naturel ne fournit que 732 vivans, & l'autre état en fournit 47,8 de plus, ce qui fait environ la quinzième partie. A l'âge de dix ans, il y a pour l'état naturel 661 vivans, & il y en a 67,4 de plus dans l'état non variolique; ce qui fait plus de la dixième partie de ceux qui restent naturellement en vie à l'âge de dix ans accomplis. A l'âge de quinze ans, le gain relatif est de 77 contre 628 vivans, que cet âge donne naturellement; ce rapport de 77 à 628, est à peu près comme 1 à 8; ainsi le gain relatif pour l'âge de quinze ans, est de près d'un huitième.

(*c*) On voit aussi que le gain relatif doit augmenter jusqu'à la mort du dernier survivant des 1300 enfans supposés nés le même jour, si on suppose qu'on demeure exposé à prendre la petite vérole tant qu'on ne l'a pas eue, puisque sur un grand nombre égal il en mourra toujours plus, toute autre proportion gardée, de ceux qui n'ont pas eu la petite vérole, que de ceux qui l'ont déjà eue; c'est-là aussi ce que notre Table indique; car quoique les gains absolus commencent à diminuer à l'âge de vingt-deux ans, les gains relatifs ne laissent pas d'augmenter; nous avons vu qu'à l'âge de quinze ans le gain relatif est de près d'un huitième; à l'âge de vingt ans, il est de 80,2 sur 598, & par conséquent de près d'un septième $1/2$; enfin à l'âge de vingt-cinq ans, le gain est de 79,3 sur 565, & cette proportion donne le gain relatif de près d'un septième. On voit donc qu'il augmente continuellement, mais il n'ira jamais au-delà d'un septième; ce qui fait la proportion du nombre de ceux qui meurent de la petite vérole, quand ils en sont attaqués, à ceux qui en réchappent. C'est-là un beau théorème que je démontrerai dans la suite, savoir, que la proportion asymptote du gain aux vivans, est généralement comme 1 à $m-1$, & celle des vivans dans l'état naturel aux vivans dans l'état exempt de la petite vérole, comme $m-1$ à m; j'ai donné à m la valeur de 8, parce qu'il m'a paru que cette valeur répondoit le mieux aux phénomènes de la petite vérole; d'autres font $m=7$, & dans cette supposition le gain devient plus grand, savoir d'un sixième.

(*d*) Comme la proportion entre les deux états ne change plus sensiblement pour les hommes faits, les seuls utiles à l'État, cette proportion sera à peu-près comme 7 à 8. Si Paris fournissoit chaque année 7 mille personnes âgées de vingt ans, cette capitale en fourniroit 8 mille par année sans la petite vérole. Nous voyons aussi par la Table, qu'à l'âge de seize ans la proportion est déjà pour les deux états comme 622 à 700; or c'est cet âge auquel on commence à devenir utile à l'État, tant par les services qu'on peut rendre à la société, que par la propagation du genre humain. On voit donc que la *naissance civile,* sans la destruction de la petite vérole, augmenteroit chaque année, en raison de 622 à 700; on peut appeler naissance civile l'entrée d'une personne dans sa dix-septième année; j'estime cette naissance pour toute la France, de 175 mille par an dans l'état naturel, & je dis qu'elle seroit, sans la mortalité de la petite vérole, de 200 mille; de sorte que la France gagneroit annuellement 25 mille personnes, toutes utiles à l'État & à la société; ce gain ira même beaucoup plus loin après les premières années écoulées. Le gain absolu à l'âge de seize ans accomplis, est de 78, qui fait à très-peu près la huitième partie de la naissance civile, exprimée dans notre Table par 622.

(*e*) Dans l'état naturel, du moins celui qui convient, suivant M. Halley, à la ville de Breslaw, toute une génération est diminuée de la moitié à l'âge de onze ans & cinq mois; & dans l'autre état, ce n'est qu'à l'âge de vingt-quatre ans & trois mois que cela arrive. A six ans & demi il n'y a pas plus de vivans dans le premier état qu'il y en a dans le second à l'âge de seize ans: pareillement l'âge de neuf ans d'un côté & celui de vingt-un de l'autre, sont également fertiles dans les deux différens états. Ceux qui voudront continuer notre Table, pourront déduire plusieurs autres corollaires de la même nature, & la continuation de la Table se fera avec une grande facilité, sans aucune erreur sensible; il n'y a qu'à continuer la seconde colonne telle que M. Halley l'a donnée, jusqu'à l'extinction entière de la génération, & multiplier ensuite chaque nombre par $8/7$ pour avoir, après l'âge de 25 ans, les nombres analogues de la troisième colonne.

(*f*) On peut appeler *quantité de vie totale* de la génération de 1300 pour chacun des deux états, ce qui provient, en prenant la somme de tous les nombres qui composent la seconde colonne, de même que celle de tous les nombres qui composent la troisième colonne, en supposant les deux colonnes continuées jusqu'à l'extinction entière de 1300 nouveaux nés. Cette règle deviendra plus correcte si on ne prend que la moitié du premier nombre, qui est 1300, parce qu'il convient de supposer que ceux qui meurent pendant le cours d'une certaine année, meurent tous au milieu de l'an. Si ensuite on divise la quantité totale de vie par le nombre de tous les nouveaux nés, qui est 1300, on aura la quantité de vie, ou simplement la *vie moyenne* de chaque nouveau né. Suivant cette correction, la somme des nombres de la seconde colonne, y compris l'âge de vingt-cinq ans, devient 17353, & la somme des autres nombres de la seconde colonne, depuis vingt-cinq ans exclusivement jusqu'à l'âge de quatre-vingt-quatre ans inclusivement, devient = 17187, en suivant la Table de M. Halley: à cet âge de quatre-vingt-quatre ans accomplis, il restoit encore 20 vivans, dont la quantité de vie devoit être encore d'environ soixante-cinq ans, de sorte que ladite somme 17187 doit encore être augmentée de 65, ce qui fait en tout 17252; ainsi la quantité de vie totale dans l'état naturel, vaut 17353 + 17252, ou bien 34605. Or, divisant ce nombre par 1300, nous aurons la vie moyenne pour chaque nouveau né, dans l'état naturel, = 26 ans & 7 mois; de la même manière on trouve la vie moyenne naturelle, pour les enfans d'un an, de trente-trois ans & cinq mois, & pour ceux de deux ans, de trente-huit ans. Ces deux derniers cas s'accordent fort bien avec la Table de M. de Buffon, qui se trouve à la fin de son excellente Histoire Naturelle, au tome second, quoique cette Table ait été construite sur une toute autre liste mortuaire. Mais la première quantité de vie moyenne pour les enfans nouveaux nés, que j'ai trouvée de vingt-six ans & sept ou huit mois, diffère énormément de celle de huit ans, que cet illustre auteur marque. Il faut qu'il y ait une faute d'impression; peut-être au lieu de huit ans, devoit-il y avoir vingt-six ans & huit mois, ou vingt-huit ans.

Si nous ajoutons de la même manière tous les nombres de la troisième colonne, après avoir diminué de la moitié le premier nombre 1300, cette somme sera maintenant 18990, qui marque la quantité de vie totale, en tant qu'elle seroit exempte de la petite vérole, jusqu'à l'âge de vingt-cinq ans inclusivement; mais pour trouver le reste de cette vie totale jusqu'à l'extinction entière, je me servirai du nombre 17252, correspondant pour l'état naturel, & je le multiplierai par $8/7$ *[Voy. la remarque (c)]:* j'aurai donc ce reste = 19716, & par consequent la quantité de vie totale pour l'état non variolique, = 18990 + 19716 = 38706. Ainsi les deux quantités de vie totale sont, pour l'un & l'autre état, comme 34605 à 38706: les deux vies moyennes, pour les deux états, observent la même proportion; celle de l'état non variolique est de vingt-neuf ans neuf mois, pendant qu'elle n'est pour l'état naturel, que de vingt-six ans sept mois; le gain est à peu près de $2/17$ de la vie moyenne naturelle.

§. 13. Que l'on compare à présent les deux tableaux que je viens d'exposer, & qui ne sauroient manquer de représenter assez au juste les deux états, & on sera assurément touché du ravage que la petite vérole toute seule fait dans le genre humain. Je laisse à d'autres qui sentent les vérités mathématiques, & qui en même temps savent leur donner toute leur énergie; je laisse sur-tout à M. de la Condamine, s'il trouve ces remarques dignes de son attention, leur application à l'Inoculation, mais qu'il seroit à souhaiter que les Médecins, au lieu de le traverser dans son zèle également pieux & éclairé, voulussent le seconder en perfectionnant la méthode de l'inoculation, plutôt que de la rejeter, sans avoir peut-être assez pesé l'importance de son objet.

J'ai dit à la remarque (*c*) du précédent article, que les nombres de la troisième colonne, relativement aux nombres analogues de la seconde colonne, tendent vers la proportion de 8 à 7, ou plus généralement vers la proportion de m à $m-1$, c'est-à-dire du nombre de ceux qui sont attaqués de la petite vérole au nombre de ceux qui en réchappent. J'avoue que je n'ai d'abord été conduit à cette conclusion que par une simple conjecture: je me suis donc aussi-tôt appliqué à chercher par le calcul quelle devoit être ladite proportion asymptote. J'exposerai ici ce calcul d'autant plus volontiers, qu'il nous fournira une expression générale pour tous les nombres de la troisième colonne jusqu'à l'extinction entière de la génération; & cette expression générale auroit pu servir à indiquer les nombres encore plus exactement qu'on ne peut faire par la méthode du §. 11, qui n'est qu'une espèce d'approximation.

Si nous reprenons les lettres x, ξ, s, m & n, dans le sens que je leur ai donné au §. 5, de même que l'équation finale de ce paragraphe, & qu'outre cela nous entendions par ζ les nombres de la troisième colonne, il s'agira de trouver le rapport de ζ à ξ:

or la mortalité entière pendant l'élément de temps dx étant $-d\xi$,

& la mortalité de la petite vérole $=\dfrac{s\,dx}{mn}$,

on aura la mortalité entière pour l'état non variolique $=-d\xi-\dfrac{s\,dx}{mn}$,

mais cette mortalité répond au nombre ξ; il faut donc la multiplier par ζ/ξ pour la faire répondre au nombre ζ, par-là nous aurons

$$-\frac{\zeta}{\xi}\left(d\xi+\frac{s\,dx}{mn}\right)=-d\zeta,$$

ou bien

$$\frac{d\zeta}{\zeta}-\frac{d\xi}{\xi}=\frac{s\,dx}{mn\xi}.$$

Substituons pour s la valeur exposée au commencement du §. 6, & nous aurons

$$\frac{d\zeta}{\zeta}-\frac{d\xi}{\xi}=\frac{\frac{1}{n}dx}{(m-1)e^{\frac{x}{n}}+1}:$$

l'intégrale de cette dernière équation se trouve par les règles connues,

$$\frac{\zeta}{\xi} = \frac{m e^{\frac{x}{n}}}{(m-1)e^{\frac{x}{n}} + 1}.$$

Cette expression donne généralement tous les termes de la troisième colonne, sans qu'on soit obligé de passer par les précédens, en faisant $m = 8$ & $n = 8$, & elle les donne plus exactement, sans cependant qu'ils diffèrent sensiblement de ceux que la Table indique, sur-tout vers la fin; elle nous fait voir d'un coup d'œil la nature des variations, & sur-tout qu'en prenant pour x, qui marque l'âge, un nombre un peu grand, le rapport de ζ à ξ doit être extrêmement près de celui de m à $m-1$, ou de 8 à 7, pour notre hypothèse, sans cependant jamais l'atteindre exactement; mais voyons aussi, par un ou deux exemples, jusqu'où notre expression générale conspire avec les nombres de la troisième colonne, que nous n'avons trouvé que par une approximation, en passant successivement d'une année à l'autre. Soit, par exemple $x = 16$, & nous aurons $\zeta = 697{,}4$, & la Table indique 700,1; soit ensuite $x = 24$, & l'équation donnera $\zeta = 649{,}2$, pendant que la Table donne $\zeta = 651{,}7$. Par ces deux exemples, nous voyons que notre équation donne à peu-près les mêmes nombres que la Table; si cependant la petite différence qu'il y a pouvoit faire de la peine dans une matière de cette nature, il faudroit corriger les nombres de la troisième colonne & les rendre tels que notre équation les marquera.

§. 14. Tâchons, pour le bien de l'humanité, d'expliquer & de déterminer encore plus exactement les motifs qui doivent nous décider pour ou contre l'Inoculation: si l'Inoculation nous procuroit tous les avantages que j'ai démontré accompagner l'état de l'exemption de la petite vérole, & si elle les procuroit sans aucun risque & sans aucun inconvénient, faudroit-il douter ou hésiter sur le parti à prendre? Ne faudroit-il pas inoculer les enfans dès les premiers jours de leur naissance? Il me semble que ce seroit être dénaturé que d'oser soutenir qu'il ne faudroit pas même le faire en ce cas-là. Il n'y a donc plus que le risque qu'on attribue à l'Inoculation qui doive nous tenir en suspens; cette réflexion m'engage à proposer & à examiner cette nouvelle question: *Quel seroit l'état de l'humanité, si moyennant un certain nombre de victimes on pouvoit lui procurer une exemption de la petite vérole naturelle?* Ce problème paroît d'abord bien difficile, cependant il découle fort naturellement de nos principes & de notre manière de traiter ce sujet.

Supposons donc que pour être du nombre des privilégiés il en coûte 1 sur N; il n'y aura qu'à considérer que toute la génération est diminuée en raison de N à $N-1$, & par conséquent qu'à diminuer tous les nombres de la troisième colonne en la même raison. De cette manière, la somme de tous ces nombres qui indique la quantité de vie totale, sera pareillement diminuée en raison de N à $N-1$; il est donc très-facile de construire une nouvelle Table qui marque l'état de l'humanité, tel qu'il seroit si moyennant un certain petit tribut, tout le reste des enfans nouveaux nés étoient absolument exempts de tout danger de la petite vérole. Je n'ajoute pas une telle Table, parce qu'on ne convient pas assez du nombre N, qui dans le système de l'Inoculation marque combien de fois le nombre de tous les Inoculés est plus grand que le nombre de ceux qui meurent par la petite vérole artificielle; on convient seulement que depuis qu'on a perfectionné ledit système, le nombre N est extrêmement grand; il est vrai qu'il pourroit être plus petit à l'égard des enfans qu'on voudroit inoculer dès le berceau; cependant cette augmentation de danger n'a pas encore été constatée, & il n'est pas sûr que le danger n'en soit que plus petit; en tout cas je pense prendre la chose au pire, en supposant, par exemple, $N=200{,}0$. C'est pour cet exemple que je vais ajouter ici quelques remarques.

La naissance de 1300 sera en ce cas d'abord réduite à 1293,5, & les survivans à l'âge d'un, deux & trois ans accomplis, seront successivement 1012,1; 877,4; 831,2, & ainsi de suite; après quoi les différences de ces nombres & de ceux de la seconde colonne marqueront les gains pour tous les âges, toute déduction faite pour le danger de l'Inoculation de la petite vérole; ces gains seront donc successivement 12,1; 22,4; 33,2, &c. Par ces exemples, on voit déjà que cette déduction va à très-peu de chose & qu'on pourroit la négliger pour la totalité, qui seule mérite l'attention du Prince quand il s'agit du bien de l'État ou du bien public. Mais voyons quelle sera la quantité de vie totale, si nous faisons la déduction que nous venons d'expliquer. Nous avons vu dans la remarque (*f*) du §. 12, que la quantité de vie totale pour l'état naturel, est $=34605$, & celle pour l'état non variolique, si nous ne faisons aucune déduction, $=38706$; ce dernier nombre maintenant doit être diminué de sa deux centième partie, à cause du danger qui accompagne l'Inoculation. Par cette déduction nous obtenons la quantité de vie totale, pour l'état non variolique & tout tribut payé $=38513$, nombre qu'il faut comparer avec 34605, qui exprime l'état naturel. Si nous divisons ces nombres par 1300, nous aurons la vie moyenne pour l'état naturel, de vingt-six ans sept mois; pour l'état non variolique, exempt de tout tribut, de vingt-neuf ans neuf mois, & pour l'état non variolique, tout tribut payé, de plus de vingt-neuf ans sept mois. Le danger de l'Inoculation ne diminue la vie moyenne que d'environ un mois vingt jours; & nonobstant ce danger, le gain est encore de trois ans sur vingt-six ans sept mois, qui est la vie moyenne pour l'état naturel: ce gain va encore au-delà de la neuvième partie de la vie naturelle, & auparavant il en faisoit à peu-près les $\frac{2}{17}\cdot$ me.

Examinons encore cette autre question, quel nombre il faudroit prendre pour N, pour que l'Inoculation ne fît sur la totalité ni bien ni mal, & que la vie moyenne demeurât la même qu'elle est dans l'état naturel? On résoudra cette question, en faisant

$$\frac{38706}{34605}=\frac{N}{N-1},$$

& cette équation donne à peu-près

$$N=9{,}43\,.$$

On doit donc considérer comme une vérité morale, que tant que l'Inoculation, administrée sur les enfans nouveaux nés, enlève moins que 100 sur 943, elle fait plus de bien que de mal; c'est sur ce théorème qu'on doit se régler, soit pour rejeter, soit pour introduire l'Inoculation à l'égard des enfans nouveaux nés, tant qu'on veut adopter le principe de la plus grande utilité de toute l'humanité. Au lieu de la proportion de 100 à 943, on auroit pu s'attendre à celle de 1 à 8; la différence provient de ce que ceux qui meurent de la petite vérole naturelle, n'en meurent point dès leur naissance.

Je vais plus loin, & je ne crains pas de dire, que quand même on supposeroit à l'Inoculation un si énorme péril que d'enlever 100 sur 943, il en résulteroit encore un bien pour la société. Pour comprendre ce paradoxe, il faut examiner le changement qui arriveroit en ce cas: la naissance de 1300 enfans seroit d'abord réduite à 1162, & puis à 909 à l'âge d'un an; à 788 à l'âge de deux ans, &c. de cette manière, les années sont moins fertiles que dans l'état naturel, mais la différence devient continuellement plus petite; à l'âge de quinze ans elle est nulle; l'état naturel porte 628, & on auroit 630 pour les cas de l'Inoculation générale, quelque meurtrière que nous l'ayons supposée; ensuite de quoi l'état naturel seroit toujours moins fertile que l'autre, tellement qu'à l'âge de vingt-cinq ans, auquel il y a 565 vivans, selon l'état naturel, nous aurions 576 dans l'autre état. De-là nous voyons que la perte ne tomberoit que sur les enfans inutiles à la société, & que tout le gain rejailliroit sur cet âge, qui est le plus précieux. Si une génération de 1000 enfans avoit vingt mille ans devant elle à partager, vaudroit-il mieux pour l'État qu'ils arrivassent tous jusqu'à l'âge de vingt ans & qu'ils mourussent tous à cet âge, ou bien que 500 mourussent au berceau, & que 500 arrivassent à l'âge de quarante ans? Si tel étoit le sort de l'humanité, elle seroit bien-tôt éteinte au premier cas & surabonderoit peut-être dans le second. Enfin, de quelque manière que l'on envisage notre sujet, il sera toujours géométriquement vrai que l'intérêt des Princes est de favoriser & de protéger l'Inoculation avec toutes les attentions possibles, & d'un père de famille à l'égard de ses enfans; les personnes même parvenues à l'âge de raison & qui n'auroient pas encore eu la petite vérole naturelle, pourroient se trouver dans des circonstances particulières qui demanderoient des calculs particuliers, pour leur apprendre le parti le plus avantageux qu'ils auroient à prendre sur l'âge le plus convenable pour l'Inoculation; mais l'intérêt public demandera toujours, non-seulement que l'on emploie l'Inoculation, mais encore qu'on se hâte de l'employer, afin de prévenir la petite vérole naturelle, puisque nous voyons par notre première

Table, qu'à l'âge de quatre ans & demi elle aura déjà enlevé la moitié de tous ceux qui doivent probablement en mourir, & qu'il ne reste plus que 450 personnes qui ne l'ont pas encore eue, & qui se trouvent dans le cas d'appeler l'insertion à leur secours. Si cependant une longue expérience donnoit à connoître qu'à la première année de vie les enfans fussent beaucoup moins exposés à prendre la petite vérole que les années suivantes, ce seroit un motif de différer l'Inoculation jusqu'à l'âge d'un an accompli. Il faut consulter là-dessus les Médecins, puisque les listes mortuaires ne marquent pas l'âge de ceux que la petite vérole a enlevés. Appliquons-nous à connoître la nature de la petite vérole par les phénomènes, & n'écoutons point les hypothèses pour former là-dessus des pathologies & pour en déduire des conclusions. Les hypothèses que j'ai faites moi-même ne concernent pas la nature essentielle de la maladie; elles ne consistent qu'à supposer quelques proportions comme suffisamment déterminées par un grand nombre d'observations; quoique ces proportions puissent bien être susceptibles de quelque petite correction, qui dépendra de nouvelles listes mortuaires relatives à la petite vérole, & qui marqueront surtout l'âge auquel les personnes seront mortes de cette maladie, cependant j'ose assurer que ces corrections mêmes n'apporteront pas de changement fort considérable dans nos résultats. C'est encore à l'expérience à décider si l'Inoculation est plus dangereuse pendant la première année de vie que pendant la cinquième ou la sixième; je ne crois pas du moins qu'il soit encore bien constaté que la petite vérole naturelle le soit.

§. 15. Notre méthode sert encore à éclaircir une objection que quelques Médecins se sont avisés de faire contre l'Inoculation; elle consiste dans la contagion qu'on répand d'une maladie qui auroit pu demeurer dans l'inaction pendant plusieurs années de suite; ils poussent cette objection jusqu'à dire qu'un seul inoculé pourra donner la petite vérole à dix autres, chacun de ces dix encore à dix, & forment ainsi une progression géométrique, dont le seul douzième terme surpasse de beaucoup le nombre de tous les hommes qui ont existé depuis la création du monde. On pourroit d'abord répondre à cela que peut-être l'humanité s'en trouveroit mieux si la maladie en question devenoit endémique & qu'elle exerçât son activité uniformément sans la suspendre: peut-être que le retour d'une épidémie long-temps suspendue, fait un ravage plus terrible dans une seule année qu'une endémie uniforme ne pourroit faire pendant un nombre d'années considérable. Je m'en rapporte là-dessus à la décision des Médecins. Voici le fait tel qu'il faut le considérer: je me propose de comparer ensemble les deux infections; l'une en laissant le cours à la Nature, & l'autre en supposant l'Inoculation généralement employée sur tous les enfans nouveaux nés. Dans le premier cas, il y aura sur la naissance de 1300 enfans 800 qui prendront, tôt ou tard, la petite vérole, & 500 mourront sans avoir jamais eu la maladie, *Voy. la remarque (i) du* §. *9.* Dans le second cas, il y aura 1300 enfans auxquels on donnera la petite vérole artificielle, en suppposant même qu'on fasse l'opération à tous sans aucune exception & qu'elle fasse son effet attendu sur tous; donc les deux nombres de malades seront comme 800 à 1300; voilà le résultat qu'il faut substituer à la terrible progression géométrique. Ainsi le rapport entre les deux infections sera jusqu'ici comme 8 à 13, mais certainement l'infection des inoculés est beaucoup plus petite que celle de la petite vérole naturelle, parce qu'elle est incomparablement moins maligne dans les inoculés; peut-être ne dira-t-on rien de trop, en la faisant treize fois moins maligne; en ce cas il faudroit changer le rapport de 8 à 13 en celui de 8 à 1. A cela j'ai une autre réflexion à ajouter, c'est que pour un même degré de malignité, il est raisonnable de considérer le degré de l'infection proportionnel à la surface du corps malade, & cette surface moyenne sera à peu près quatre fois plus grande pour la petite vérole naturelle qu'elle n'est pour les enfans nouveaux nés qu'on inoculeroit tous. De cette manière on est fondé à dire que l'infection générale de la petite vérole naturelle est trente-deux fois plus grande qu'elle ne seroit si on faisoit l'inoculation à tous les enfans nouveaux nés. Je n'insisterai pas sur les proportions, que je n'ai alléguées que pour rendre plus lumineuses les raisons que je viens d'exposer, & je laisse tout le monde le maître de changer ces proportions comme il le trouvera convenable; je souhaite seulement que dans une question qui regarde de si près le bien de l'humanité, on ne décide rien qu'avec toute la connoissance de cause qu'un peu d'analyse & de calcul peut fournir.

§. 16. J'ai examiné jusqu'ici les terribles effets & les tristes suites de la petite vérole pendant tout le cours de la vie humaine, & sur-tout pendant les premiers vingt-quatre ans de vie, pendant lesquels nos hypothèses ne sauroient s'écarter sensiblement de l'état de la Nature, & après lesquels cette maladie ne fait plus d'effet sensible sur la totalité. On ne sauroit trop encourager ceux qui se proposent de recourir à l'Inoculation pour prévenir ces terribles maux, de se hâter de le faire, de peur qu'on ne soit prévenu par la petite vérole naturelle, & il importe sur-tout à l'État d'établir cette maxime, puisqu'on voit, par la septième colonne de la première Table, qu'à l'âge de cinq ans la petite vérole a déjà enlevé au-delà de la moitié du total de ses victimes, & les trois quarts à l'âge de neuf ans accomplis. Il se pourroit fort bien que l'âge le plus propre à l'Inoculation, fût précisément celui qu'on croit avoir plus de raison de ménager, savoir la première enfance, du moins l'expérience n'a-t-elle pas encore enseigné le contraire, à ce que je sache; il me semble qu'on pourroit suivre la maxime d'inoculer les enfans qui sortent de nourrice, sur-tout si leurs père & mère, de même que la nourrice lorsqu'ils n'auront pas été allaités par la mère, sont bien sains, chacun pour la part qu'il peut avoir à la constitution de l'enfant; si alors l'enfant ne donne aucun signe de mauvaise santé & qu'il ne règne aucune épidémie maligne de petite vérole, il est à présumer, plus que dans tout autre temps, qu'un tel enfant nourri jusque-là dans le sein de la Nature, n'a rien contracté qui doive empêcher l'inoculation.

§. 17. J'ai tourné souvent mes réflexions du côté de la politique; je remarquerai encore à cet égard que l'intérêt de l'État n'y entreroit presque pour rien si on vouloit rejeter généralement l'Inoculation après l'âge de vingt ans; mais une personne arrivée à cet âge de raison & qui n'auroit pas encore eu la petite vérole, n'en est pas moins intéressée à recourir à l'Inoculation, il n'y a que la petitesse du nombre de ces personnes qui pût rendre leur inoculation presque indifférente à la société; mais celui qui se trouve par hasard compris dans ce petit nombre, en retire à peu-près le même fruit qu'un enfant qui auroit subi cette opération à l'âge de quatre ou cinq ans. Tout homme qui n'a pas eu la petite vérole se trouve dans l'accablante nécessité de jouer pendant chaque année de sa vie avec 63 autres, lequel doit mourir de cette maladie, & avec 7 autres, lequel doit la prendre, & il traîne avec lui ce triste sort jusqu'à ce qu'il prenne la maladie. Ne vaut-il pas mieux, en supposant que l'Inoculation enlève 1 sur 473, de jouer contre 472 au lieu de 63, & de n'être tenu qu'à subir le sort une seule fois, au lieu d'y retourner chaque année de sa vie? Un homme avisé peut-il hésiter sur le choix? Cependant cette alternative est exactement celle d'attendre la petite vérole naturelle ou de se faire inoculer. D'où peut donc venir que plusieurs personnes hésitent encore? La réponse est bien simple, c'est que toutes ces choses ne tombent pas sous les sens. Si quelque Tyran idolâtre choisissoit annuellement de cette manière ses victimes, pour être immolées avec beaucoup d'appareil à son idole, & qu'on pût s'affranchir de ce terrible arrêt en se soumettant *une fois pour toutes* à un danger en soi-même près de huit fois plus petit que celui auquel on est obligé de s'exposer de nouveau chaque année, pourroit-il y avoir un seul homme qui hésitât sur le parti à prendre? Quelque clameur qu'on fît, tous suivroient le chemin de l'exemption, quoique ce chemin ne soit pas lui-même absolument libre de tout danger.

§. 18. Au reste, quoiqu'il soit vrai de dire, comme j'ai fait, que l'avantage de l'Inoculation est à peu-près le même pour tout âge, on voit facilement qu'il doit y avoir quelque inégalité par rapport aux différens âges, puisque cet avantage dépend toujours du mélange variable qu'il y a entre la mortalité de la petite vérole & la mortalité entière de toutes les maladies & accidens, la seule qui soit déterminée par les listes mortuaires. On ne sauroit donc déterminer le prix des inoculations sans suivre notre méthode, qui a été de démêler la mortalité de la petite vérole d'avec toutes les autres mortalités pendant tout le cours de la vie humaine. C'est ici un nouveau sujet qui m'a toujours paru le plus difficile à traiter avec exactitude, tant que j'ai voulu éviter d'entrer dans tout le détail que j'ai exposé jusqu'ici. Je me propose donc maintenant d'examiner le prix de l'Inoculation faite à un âge quelconque; question qu'on ne sauroit résoudre sans savoir tous les phénomènes de la petite vérole depuis le commencement d'une génération jusqu'à son entière extinction, non plus que les autres questions que nous avons déjà résolues à l'égard de l'Inoculation de la première enfance. J'éclaircirai ma méthode par un exemple, & je choisirai celui de l'âge de cinq ans accomplis, & je me propose de chercher sa vie moyenne, s'il attend tranquillement la petite vérole naturelle; ensuite je chercherai pareillement sa vie moyenne, en le supposant entièrement exempt de la même maladie, & c'est par le rapport de ces deux vies moyennes que je jugerai du prix de l'Inoculation, ainsi que je l'ai fait au §. 12, *remarque (f),* où j'ai démontré que les deux vies moyennes pour les deux états, sont, dans les enfans nouveaux nés, comme 34605 à 38706, ou à peu-près comme 17 à 19. Ceux qui auront lû avec attention cette remarque, auront d'autant moins de peine à suivre les calculs numériques que je vais indiquer; j'emploierai encore la correction de ne prendre que la moitié du premier terme ou de retrancher la moitié du premier terme de la somme de tous les termes, depuis l'âge de cinq ans, dans la seconde & la troisième colonne de la seconde Table.

§. 19. La seconde Table nous apprend que de 1300 enfans nouveaux nés, il y en aura 732 qui atteindront l'âge de cinq ans accomplis, desquels 416 n'auront pas eu la petite vérole & 316 auront déjà eu cette maladie, en vertu de la première Table. Qu'on cherche *la quantité de vie totale* de tous ces 732 enfans, sans y comprendre les cinq premières années, nous avons trouvé au §. 12, *remarque (f),* cette quantité de vie totale, à la prendre depuis la naissance = 34605, & il en faut retrancher la quantité de vie depuis la naissance jusqu'à l'âge de cinq ans accomplis, en ôtant la moitié du premier terme qui est 1300, & en ajoutant la moitié du terme 732; la somme des cinq premiers termes est 4713: on a donc pour la quantité de vie, depuis la naissance jusqu'à l'âge de cinq ans accomplis, $4713 - {}^{1300}\!/_2 + {}^{732}\!/_2$, ou bien 4429, qu'il faut soustraire de 34605 pour avoir la quantité de vie totale depuis l'âge de cinq ans pour 732 enfans pris de l'état naturel; cette quantité sera donc = 30176. Je remarquerai ici en passant, que si on partage également cette quantité de vie totale sur les 732 enfans parvenus à l'âge de cinq ans accomplis, on trouve $41\frac{1}{4}$, qui fait par conséquent leur vie moyenne, & la Table insérée au second volume de l'Histoire Naturelle de M. de Buffon, marque $41\frac{1}{2}$ ans; accord admirable, vu la diversité des circonstances. Après cela, il faut pareillement chercher la quantité de vie totale depuis l'âge de cinq ans accomplis pour l'état non variolique, en supposant, en conformité de la troisième colonne de la seconde Table, 779,8 de ces enfans parvenus à l'âge de cinq ans, & nous avons trouvé, au §. 12, *remarque (f),* cette quantité de vie totale depuis la naissance = 38706, desquels il faut retrancher, à cause des cinq premières années, 4574, après quoi il restera 34132.

Faisons maintenant attention, qu'en vertu de la première Table il y a parmi les 732 enfans, qui composent l'âge de cinq ans pour l'état naturel, 316 qui auront déjà eu la petite vérole, & qui par conséquent ont déjà été transportés dans l'état non variolique, & qu'il faut calculer à part la quantité de vie totale de ces 316 enfans par cette analogie: si 779,8 enfans ont pour quantité de vie totale 34132, quelle sera cette quantité pour 316 enfans? & on trouvera 13832. Si donc les 316 enfans, qui ont déjà eu la petite vérole, ont 13832 de vie totale, & que les 732 ont 30176 de vie totale, il faut que les 416 qui n'ont pas encore eu la petite vérole aient pour vie totale 30176 – 13832, ou bien 16344; en divisant ce dernier nombre par 416, nous aurons la vie moyenne d'un enfant âgé de cinq ans accomplis, & qui n'a pas encore eu la petite vérole $= 39^{120}/_{416}$ ans, ou 39 ans & $3\frac{1}{2}$ mois; mais nous avons trouvé plus haut que 779,8 enfans de cinq ans, pour l'état non variolique, ont pour vie totale 34132, ce qui donne la vie moyenne d'un tel enfant $= {}^{34132}/_{779,8} = 43^{6006}/_{7798}$; donc la vie moyenne des enfans de cinq ans, qui n'ont pas encore eu la petite vérole, est à la vie moyenne des enfans du même âge qui ont déjà eu cette maladie ou qui en sont exempts, comme $39^{120}/_{416}$ à $43^{6006}/_{7798}$, ou comme 39288 à 43770, ou comme 1000 à 1111; mais nous avons trouvé ci-dessus, à l'égard des enfans nouveaux nés, que cette proportion étoit comme 34605 à 38706, ou comme 1000 à 1117. Il y a donc à fort peu près la même proportion; on peut seulement dire que l'augmentation *relative* est tant soit peu plus grande pour les enfans nouveaux nés que pour les enfans de cinq ans; cependant l'avantage ou l'augmentation *absolue,* est un peu plus grande pour ceux-ci que pour les autres, parce que la vie moyenne naturelle est plus grande pour les enfans de cinq ans que pour les nouveaux nés. L'augmentation absolue est à peu-près de quatre ans & demi pour les enfans de cinq ans, & elle n'est que de trois ans & un mois pour les enfans nouveaux nés. Cette grande différence provient de la grande mortalité de la première année, qui change beaucoup la vie moyenne; dans les autres âges, les augmentations absolues ne diffèrent pas tant; elle sera la plus grande depuis l'âge de six à celui de sept ans, après quoi elle rediminue, mais les augmentations relatives restent à peu-près les mêmes. On remarquera encore, à l'égard des enfans de cinq ans, que la vie moyenne de ceux qui n'ont pas encore eu la petite vérole, la vie moyenne de ceux qu'on prend au sort, & enfin la vie moyenne de ceux qui ont déjà eu la petite vérole, sont en raison des nombres 3929, 4122 & 4377, & que chacun de ces nombres marque, par des centièmes parties d'années, la durée absolue de ces vies moyennes. Ainsi le gain absolu qu'on fait lorsqu'âgé de cinq ans on est transféré de la classe de ceux qui n'ont pas encore eu la petite vérole dans celle de ceux qui l'ont déjà eue, est de 448, ou de $4\frac{1}{2}$ ans. On pourra, par la même méthode, évaluer toutes ces choses à l'égard de tout autre âge.

§. 20. Supposé encore qu'on ne puisse faire ce gain sans quelque risque, il sera facile de trouver la diminution de ce gain qui résulte de ce risque. Soit généralement la vie moyenne de ceux qui n'ont pas encore eu la petite vérole $= A$,

& la vie moyenne de ceux du même âge qui l'ont déjà eue $=A+a$, & supposons que pour faire ce gain il en coûte la vie à 1 sur n, alors il faudra employer la règle fondamentale des probabilités, & dire: il y a un cas pour succomber & pour perdre la vie, dont la valeur est A, & il y a $n-1$ cas pour gagner a, & par-là on trouvera le gain qui reste

$$=\frac{(n-1)a-A}{n}.$$

Cette formule nous apprend que si on vouloit faire

$$n=\frac{A}{a}+1,$$

il n'y auroit plus aucun profit à se promettre de l'Inoculation; mais si n est supposé un grand nombre, le risque ne diminue pas sensiblement l'avantage de l'Inoculation.

Si donc on suppose pour les enfans de cinq ans $A=39{,}29$ & $a=4{,}48$ ans, & qu'on fasse $n=473$, on trouve le gain qui reste$=4{,}39$, & sans ce risque il eût été$=4{,}48$; la différence est de 0,09 ou de 9/100 d'an, ou d'environ un mois, & ainsi le gain de quatre ans & six mois sera changé, à cause du risque, en quatre ans cinq mois, & il faudroit qu'il mourût de l'Inoculation 100 sur 997, c'est-à-dire plus de 1 sur 10, pour qu'elle fît autant de mal que de bien, c'est-à-dire pour qu'il n'en résultât aucun profit pour l'âge de cinq ans.

Je n'ai pas fait mention de la seconde petite vérole, ce cas me paroissant si rare, qu'il ne doit pas en être tenu compte. Une telle considération n'influeroit peut-être pas pour la valeur d'un jour sur les vies moyennes que j'ai déterminées: on peut accorder, sans rien déroger au prix de l'Inoculation, qu'elle ne préserve pas plus de la seconde petite vérole, qu'elle préserve de la pleurésie, pourvu qu'on ne prétende pas qu'une seconde petite vérole soit plus fréquente après l'artificielle qu'elle ne l'est après la naturelle; ce qu'on n'est assurément pas fondé à dire. Après tout, mon intention dans ce Mémoire n'a pas été de défendre ou de préconiser l'Inoculation, je me contenterai à cet égard de me ranger, sans vouloir être remarqué, du côté de ceux qui la croient fort utile. J'ai seulement tâché d'éclaircir sur l'Histoire naturelle de l'Homme, en tant que sujet au fléau de la petite vérole, les questions principales & les plus intéressantes, & de répandre par-là quelque nouvelle lumière sur la question de l'Inoculation, question toujours extrêmement importante pour le bien de l'humanité & devenue si fameuse depuis quelque temps. Une aussi grande question ne doit être jugée qu'avec toute la connoissance de cause possible.

§. 21. Voici encore une question qui peut intéresser la théorie de l'Inoculation. Supposé qu'on prît pour maxime invariable d'inoculer à l'âge de 5 ans complets tous les enfans que la petite vérole naturelle auroit épargnés jusqu'à cet âge, & que l'Inoculation fût toujours efficace, dans quel rapport le nombre total des malades de la petite vérole en seroit-il augmenté? J'ai déjà traité au §. 15 cette question pour le cas qu'on voulût inoculer tous les nouveaux nés; la substitution de l'âge de 5 ans la rend plus naturelle. Voici la solution que nos principes fournissent. La cinquième colonne de notre première Table nous apprend que sur une génération de 1300 enfans, il y en aura 436 qui auront eu la petite vérole avant l'âge complet de 5 ans, & la troisième colonne marque qu'il reste à cet âge 416, que cette maladie aura épargnés, & qui alors doivent la prendre par inoculation: de cette façon, le nombre de tous les malades de la petite vérole sera 852, pendant

TABLE I.

Ages par années.	Survivans felon M. Halley.	N'ayant pas eu la pet. vérole.	Ayant eu la pet. vérol.	Prenant la pet. vérole pendant ch. année.	Morts de la pet. vérole pendant chaq. ann.	Somme des morts de la pet. vérole.	Morts par d'autres maladies pend. chaq. année.
0	1300	1300	0				
1	1000	896	104	137	17,1	17,1	283
2	855	685	170	99	12,4	29,5	133
3	798	571	227	78	9,7	39,2	47
4	760	485	275	66	8,3	47,5	30
5	732	416	316	56	7,0	54,5	21
6	710	359	351	48	6,0	60,5	16
7	692	311	381	42	5,2	65,7	12,8
8	680	272	408	36	4,5	70,2	7,5
9	670	237	433	32	4,0	74,2	6
10	661	208	453	28	3,5	77,7	5,5
11	653	182	471	24,4	3,0	80,7	5
12	646	160	486	21,4	2,7	83,4	4,3
13	640	140	500	18,7	2,3	85,7	3,7
14	634	123	511	16,6	2,1	87,8	3,9
15	628	108	520	14,4	1,8	89,6	4,2
16	622	94	528	12,6	1,6	91,2	4,4
17	616	83	533	11,0	1,4	92,6	4,6
18	610	72	538	9,7	1,2	93,8	4,8
19	604	63	541	8,4	1,0	94,8	5
20	598	56	542	7,4	0,9	95,7	5,1
21	592	48,5	543	6,5	0,8	96,5	5,2
22	586	42,5	543	5,6	0,7	97,2	5,3
23	579	37	542	5,0	0,6	97,8	6,4
24	572	32,4	540	4,4	0,5	98,3	6,5

qu'il est de 800 dans l'état naturel: l'augmentation n'est donc plus que de 52 contre 800, ou à peu-près de 1 sur 16; sans doute qu'une telle petite augmentation sur le nombre des malades est, à l'égard de leur infection, compensée au centuple, par la bénignité de la maladie des inoculés, & que, pour le total, l'humanité gagneroit beaucoup du côté de l'infection.

TABLE II.

AGES par années.	État naturel & variolique.	ÉTAT non-varioliq.	Différ. ou gains.	AGES par années.	État naturel & variolique.	ÉTAT non-varioliq.	Différ. ou gains.
0	1300	1300	0	13	640	741,1	74,1
1	1000	1017,1	17,1	14	634	709,7	75,7
2	855	881,8	26,8	15	628	705,0	77,0
3	798	833,3	35,3	16	622	700,1	78,1
4	760	802,0	42,0	17	616	695,0	79,0
5	732	779,8	47,8	18	610	689,6	79,6
6	710	762,8	52,8	19	604	684,0	80,0
7	692	749,1	57,2	20	598	678,2	80,2
8	680	740,9	60,9	21	592	672,3	80,3
9	670	734,4	64,4	22	586	666,3	80,3
10	661	728,4	67,4	23	579	659,0	80,0
11	653	722,9	69,9	24	572	651,7	79,7
12	646	718,2	72,2	25	565	644,3	79,3

Cette Table fait voir d'un coup d'œil, combien ſur 1300 enfans, ſuppoſés nés en même temps, il en reſteroit de vivans d'année en année juſqu'à l'âge de vingt-cinq ans, en les ſuppoſant tous ſujets à la petite vérole; & combien il en reſteroit s'ils étoient tous exempts de cette maladie, avec la comparaiſon & la différence des deux états.

Reflexions sur les avantages de l'inoculation, par M. Daniel Bernoulli, Docteur en medecine, Professeur de Physique en l'Universite de bâle, Associé étranger de l'Academie des Sciences.

Mercure de France.[0] (Juin 1760) p. 173–190
III.3 - St.52

Lues dans l'assemblée publique du 16 Avril 1760.

De tous ceux qui ont traité cette matière, c'est sans contredit M. *de la Condamine*[1] qui l'a fait avec plus de succès. Il est déjà venu à bout de persuader la meilleure partie du monde raisonnable de la grande utilité de l'inoculation: quant aux autres, il seroit inutile de vouloir employer la raison avec eux; puisqu'ils n'agissent pas par principes. Il faut les conduire comme des enfans vers leur mieux: c'est la coutume seule qui peut leur tendre une main secourable. L'inoculation seroit bientôt adoptée en Europe, si la bonne politique vouloit s'associer avec l'humanité: je dis même avec la charité chrétienne; & j'en apelle à ceux qui par un zèle plus ardent qu'éclairé traitent cette méthode de criminelle. Ne conviendront ils pas que Dieu demande la conservation & la propagation de l'espéce qu'il a créée à son image? Il ne reste qu'à leur prouver que le moyen le plus sûr & le plus efficace pour remplir ces vues, est sans contredit l'inoculation. Mais en vain cette vérité sera reconnue de ceux qui l'auront méditée; en vain même quelques particuliers en recueilleront le fruit. Il sera perdu pour l'Etat tant que la multitude ne sera pas convaincue. Elle ne peut l'être que par des expériences multipliées & faites en grand: en un mot par un établissement public dans quelque hôpital tel que celui des enfans-trouvés où l'on inoculeroit tous ceux qui ne donneroient pas d'indication contraire. En conséquence d'un pareil établissement, je ne doute pas que la pratique de l'inoculation ne devînt commune en France avant qu'il se passât dix ans; pourvû qu'on publiât tous les ans des registres autentiques & en bon ordre. Outre la consolante satisfaction de sauver la vie chaque année à un grand nombre de sujets, on auroit encore l'avantage de perfectionner bientôt la méthode au point de la faire

0 Texte publié dans Article IV. Beaux Arts. Arts Utiles. Chirurgie.
1 Ch. de la Condamine «Mémoire sur l'Inoculation de la petite verole» Mém. Paris 1754 p. 615–670. et «Second Mémoire sur l'Inoculation de la petite verole, contenant la suite de l'Histoire de cette méthode et de ses progrès, de 1754 à 1758» Mém. Paris 1758 p. 439–482.

avec une sureté entiere; s'il est vrai toutefois qu'il y ait quelque risque. Je fais cette restriction, parce que les observations ne constatent pas bien ce risque. Les listes mortuaires prouvent que de 20000 enfans de l'âge de 4 ans il en meurt environ 700 dans le cours d'une année, ou environ 60 par mois*. Si donc on donne un mois au cours de la maladie causée par l'inoculation, on aura soixante enfans au moins sur 20000 qui mourront probablement dans ce terme indépendamment de l'effet de l'opération; c'est-à-dire 1 sur 133. Si on vouloit restreindre le temps critique de l'insertion à 15 jours, ce seroit encore 1 sur 661, nombre qui différe peu de 1 sur 593, ou de celui des morts à Londres dans l'hôpital des inoculés de tout âge pendant le cours de quatre années suivant la liste imprimée, publiée par les administrateurs. Il est vrai que chaque âge demande une évaluation différente: cependant ces résultats font assez voir qu'il n'est pas encore bien constaté qu'on courre quelque risque tant soit peu considérable en se faisant inoculer, puisqu'il n'est pas encore démontré que le nombre de ceux qui meurent pendant le tems critique de l'insertion, surpasse le nombre de ceux qui mourroient dans le même terme, s'ils n'avoient point été inoculés. Il est donc encore permis de supposer que l'inoculation n'est accompagnée d'aucun risque, pourvû qu'elle soit bien administrée. Par quel scrupule pourroit-on donc se refuser aux moyens de mettre cette vérité dans la plus grande évidence, tels qu'une suite d'expériences autorisées, & dont les résultats seroient rendus publics?

Le seul inconvénient que je puisse prévoir dans l'établissement que je propose, ce seroit peut-être de voir diminuer par la crainte de l'événement le nombre des enfans qu'on porteroit la premiere année à l'hôpital des enfans-trouvés**. Est-ce là un mal ou un bien? Quoiqu'il en soit, la seconde année, ou au plus tard la troisiéme remettroit les choses sur l'ancien pied. Après une telle expérience est-il un pere de famille qui ne suivît un exemple autorisé par une institution publique? La notoriété des succès feroit bientôt taire les timides préjugés, pour ne plus écouter que la voix de l'amour paternel & de la charité. Les autres nations seroient infailliblement entraînées par l'exemple de la nation la plus éclairée, & avec le temps une pratique si salutaire au bien de l'humanité deviendroit universelle***.

* *M. Bernoulli s'est servi des listes de Breslaw, où il meurt beaucoup moins d'enfans qu'ailleurs. S'il eût employé les listes de Londres, ou même celles de Paris, la proportion qu'il eût trouvée seroit beaucoup plus avantageuse à l'inoculation.* (Note de l'éditeur du Mercure de France.)

** *M. Bernoulli suppose que plusieurs meres pauvres qui portent leurs enfans à l'hôpital s'en abstiendroient par la crainte de l'inoculation. Mais quand on supposeroit que la moitié des enfans qu'on y porte sont légitimes, le petit nombre de ceux qu'on reclame ne prouve que trop le peu d'intérêt que prenent à leur sort ceux qui les y portent.* (Note de l'éditeur du Mercure de France.)

*** *Il est très vrai qu'on n'attend en Italie que l'exemple de la France.* (Note de l'éditeur du Mercure de France.)

2 Pour la bibliographie concernant les listes de mortalité, cf. Intr. p. 221 h.v.

Il ne seroit pas impossible après cela que la maladie attaquée dans son principe ne changeât de nature à la seconde ou à la troisiéme génération, qu'elle ne perdît tout son venin, ou qu'elle ne cessât d'elle-même. Si nous connoissions beaucoup de mariages entre des personnes inoculées & le sort de leurs enfans, nous pourrions prononcer sur cette question définitivement.

Les deux grands motifs pour l'inoculation sont l'humanité & l'intérêt de L'Etat. L'humanité veut qu'on assure & qu'on conserve la vie à chaque particulier, soit jeune, soit vieux: l'intérêt de l'état demande la population du Royaume. L'augmentation du nombre des sujets produiroit dans les revenus du Roi un accroissement qu'on peut évaluer à environ 20 liv. par tête chaque année, en supposant le nombre des habitans de 18 millions & les revenus du Roi de 360 millions. Je ne m'attacherai pas à l'identité de la proportion; mais quand on la réduiroit à la moitié, le profit ne laisseroit pas de devenir immense avec le tems: outre que l'augmentation des revenus n'est pas, à beaucoup près pour l'état, le seul avantage qu'il faille considérer dans le cas présent.

Une autre considération importante, c'est que toute la jeunesse jusqu'à l'âge de 16 ou 18 ans, est en elle-même, non-seulement inutile, mais entierement à la charge de la société: elle ne contribue rien, ou très peu aux besoins publics. A ne considérer que l'intérêt de la société, il vaudroit mieux pour elle que tous ceux qui sont destinés à mourir avant l'âge de 16 ans ne fussent jamais nés. En perdant un enfant avant qu'il ait atteint cet âge, on perd en un moment toutes les dépenses qu'on a faites pour lui pendant toute sa vie, sans que la société en ait tiré le moindre profit. Cette raison ne suffit-elle pas pour donner la plus grande attention à conserver ces enfans jusqu'à cet âge de récolte, en les préservant d'une maladie si meurtriere qui le plus souvent n'attaque précisément qu'eux? Si la petite vérole étoit d'une nature à n'attaquer jamais que la grande vieillesse, les raisons politiques cesseroient. Mais il me semble que les raisons d'humanité devroient encore être les mêmes.

Des considérations générales, je passe à quelques réfléxions particulieres sur l'inoculation. Un argument qu'on fait valoir contre cette pratique, c'est qu'un grand nombre de personnes ne prennent jamais la petite vérole. Il est vrai qu'à l'égard de ces personnes l'opération devient manifestement inutile; elle seroit même cruelle, puisqu'on leur feroit souffrir une maladie incommode. Je dirois encore, si l'inoculation étoit accompagnée d'un risque de vie tant soit peu considérable, qu'elle seroit tyrannique & impie; mais à tout cela je n'ai qu'un mot à répondre: c'est que de légères souffrances ne sauroient être mises en parallèle avec le moindre risque de vie, & que le risque de vie qu'on court par l'inoculation est nul ou comme nul. L'objection prouve seulement qu'il ne faudroit point pratiquer l'insertion sur les personnes qui n'auroient jamais la petite vérole, si on pouvoit les distinguer d'avec les autres & c'est ce que j'accorderai sans difficulté. Mais ceux qui font sonner si haut l'argument pris de la possibilité de n'avoir jamais cette maladie, ne sont-ils pas en contradiction avec eux-mêmes? Ils accordent l'utilité de l'inoculation pour les personnes qu'on sauroit devoir bientôt prendre la petite vérole; il y a cependant parmi toutes ces personnes environ six sur sept qui n'en mourront point. Je demanderai donc à ceux qui font la difficulté précédente, pourquoi ils consentiroient à l'inoculation de tous ceux qu'on seroit sûr qui seront bientôt attaqués de la petite vérole, puisque l'opération seroit encore inutile à six inoculés sur sept. A cela peuvent-ils donner une autre réponse que celle que j'ai donnée plus haut, savoir qu'on ne sauroit distinguer les uns des autres, ni par conséquent s'empêcher de faire indistinctement l'opération sur tous.

D'ailleurs la conservation de la vie n'est pas le seul bien qui résulte de l'inoculation. On connoît les suites souvent fâcheuses, quelquefois terribles de la petite vérole naturelle, & l'on sait en même temps qu'elles sont infiniment rares après l'artificielle, ou plutôt qu'elles n'ont jamais lieu. Quelle proportion encore les souffrances de la petite vérole naturelle tant soit peu maligne, & celles de la même maladie inoculée, lors même qu'elle est des plus mauvaises? J'en atteste les médecins, ceux mêmes qui se déclarent contre l'inoculation, par une triste fatalité que je n'ai jamais pû comprendre. Je puis ici me donner pour témoin oculaire: j'ai vû plusieurs malades de l'une & l'autre classe. Les inoculés avoient quelquefois un grand nombre de pustules:,nés dans une famille fort maltraitée de la petite vérole, je ne puis douter que la maladie naturelle ne les eût enlevés; avec tout cela leur état me paroissoit plutôt celui d'un malaise que celui d'une grande souffrance. Mais je ne saurois sans être ému, me rappeller le triste état auquel j'ai vu réduits quelques-uns de ceux qui avoient été surpris par la petite vérole naturelle.

Examinons encore de quelle manière on doit envisager le danger qu'on peut supposer accompagner l'inoculation. Je grossirai aujourd'hui ce danger presque nul, & je supposerai que cette opération enléve un sur cent de ceux qui s'y soumettent. Un tel risque doit-il rallentir le zèle d'un homme qui n'a eu en vue que le bien de l'humanité? On ne sauroit mieux faire sentir ces vérités morales que par la méthode dont M. *de la Condamine* a fait usage avec tant de succès. Elle consiste à les présenter sous un point de vuë frapant qui ne manque jamais d'entraîner notre conviction; je suivrai donc l'exemple de l'illustre auteur qui m'a donné occasion de faire ces réfléxions.

Je considere la mortalité causée par les maladies de tout genre, qui détruisent peu-à-peu toute une génération. Je partagerai cette mortalité totale en quatorze classes de différentes maladies, & je supposerai pour simplifier la chose toutes ces classes également meurtrières, quoique les unes plus tard que les autres. Je suppose de plus que toutes ces maladies soient de même nature que la petite vérole, c'est-à-dire qu'on puisse prévenir le funeste effet de chacune par un préservatif de même espèce que l'Inoculation. Supposons encore pour rendre toutes choses égales, que toutes ces différentes espèces d'Inoculations, soient accompagnées d'inconvéniens égaux à ceux de la petite vérole inoculée. Tout cela suposé, il est évident qu'il faudra ou rejetter toutes les inoculations, & par conséquent celle de la petite vérole, ou les admettre toutes: il ne s'agit donc que d'examiner cette alternative. Si nous rejettons toutes les Inoculations, nous demeurons dans notre état, qu'il faut avoir étudié pour en connoître toute la misére. La seule premiere année emporte suivant les différentes listes, le quart, le tiers ou plus de toute l'humanité. Mais si l'on adopte toutes les espèces d'Inoculations, si on se hâte de les administrer toutes, pour prévenir plus vite tous les dangers; quand même on voudroit supposer que chaque espéce d'insertion emporteroit la centiéme partie de ceux qui s'y soumettent (supposition par laquelle on exagére le péril au triple & au quadruple de la réalité) qu'en résulteroit-il? Il y auroit quatre vingt-sept personnes sur cent ou les $87/100$ de la totalité; ce qui fait la quatorziéme puissance de $99/100$, qui survivroient à toutes ces opérations, & treize sur cent qui y succomberoient. Ces treize sur cent font à peine la moitié du nombre que toutes les différentes maladies emportent naturellement dans la seule premiere année. Il faut donc compter pour rien cette perte, ou plûtôt il faut la compter pour un gain réel; puisqu'elle diminue la moitié de la perte ordinaire: mais ce n'est pas tout.

Tous les survivans qui font les sept-huitiémes de l'humanité, seroient ensuite exempts de toute infirmité dans le cours de leur vie; ils iroient tous jusqu'au dernier terme de la vieillesse: ils ne feroient plus que cesser de vivre. Quelle différence entre notre état présent & celui que donne notre supposition! Qu'on choisisse maintenant entre les deux alternatives que je propose; mais qu'on se souvienne que c'est se déclarer pour l'inoculation de la petite vérole, que de choisir le second parti: si la Providence ne nous a pas accordé ce grand bien en entier, faut-il pour cela rejetter le partie qu'elle nous offre?

Mais peut être atteindrons-nous plus sûrement le but que nous proposons, si nous ajoutons ici une évaluation du ravage de la petite vérole naturelle, & de ce qu'on peut gagner en la procurant artificiellement. Je ne prétens pas donner une évaluation absolument exacte; nous n'avons pas assez d'observations pour cela: on peut à la vérité suppléer à ce défaut par des hypothèses fort vraisemblables, & en même temps fort approchantes du vrai, mais je prévois qu'on ne sçauroit le faire sans des calculs extrêmement pénibles; parce qu'il faut suivre l'effet de la petite vérole, depuis la naissance jusqu'à la derniere vieillesse. J'entreprendrai cet ouvrage au premier loisir qui me le permettra; je me contenterai pour cette fois d'indiquer comment nous devons estimer à-peu-près les résultats que nous demandons.

On a remarqué par une grande suite d'observations, qu'en comparant le nombre de ceux qui succombent à la petite vérole, avec le nombre de ceux qui en sont attaqués, la proportion se trouve être celle de 1 sur 7 ou au moins de 1 sur 8: la différence en est assez petite. J'adopterai cette derniere proportion par deux raisons: premierement, parce qu'il est plus facile de sçavoir le nombre de tous ceux qui meurent de la petite vérole, qu'il ne l'est d'apprendre le nombre entier de ceux qui en sont attaqués: secondement, je m'en tiens à la proportion d'un sur 8, pour éviter tout soupçon d'accroître le péril de la maladie. Si donc on vouloit supposer que la petite vérole attaque tous les enfans dès leur naissance, il est manifeste que cette maladie emporteroit la huitiéme partie de l'humanité; puisque chaque génération annuelle seroit diminuée en raison de 1 à 7. D'un autre côté la destruction que cause la petite vérole dans l'espèce humaine, est la treiziéme ou la quatorziéme partie de la mortalité totale; puisqu'il est encore constaté que sur 13 ou 14 qui meurent de toutes sortes de maladies, un seul est emporté par la petite vérole. Je dois ici dire en passant, qu'ayant consulté plusieurs listes mortuaires, où l'on fait un dénombrement des morts de la petite vérole en différens pays, le nombre de 1 sur 13 m'a paru plus conforme à la nature, que celui de 1 sur 14. Il me paroît aussi convenir mieux aux autres notions générales que nous avons sur cette maladie; pour concilier ces deux vérités d'observation, on n'a qu'à supposer la petite vérole d'une nature à surprendre tous les enfans à leur entrée dans la cinquiéme ou la sixiéme année; car un calcul qui ne sçauroit s'éloigner sensiblement de la nature, m'a appris que si tous les enfans étoient exempts de la petite vérole jusqu'à l'âge de 4 ou 5 ans accomplis, chaque génération à cet âge seroit réduite de 13 à 8, par toutes les autres causes de mortalité. Si tous les enfans qui composent ces 8/13 prenoient ensuite la petite vérole il en mourroit la huitiéme partie, & cette huitiéme partie feroit précisément la treiziéme partie du total de la génération entiere.

C'est donc sous cette face qu'on peut à cet égard considérer le ravage de la petite vérole, & l'avantage qu'il y auroit si on pouvoit s'exempter de cette destruction; puisqu'on peut dire que la destruction causée par la petite vérole, est à-peu-près la même que si cette maladie enlevoit la 8^{e} partie de l'humanité parvenue à l'âge de 4 ou 5 ans accomplis. Mais qu'est-ce que ce commencement de vie, & quel peut en être le prix, soit pour les enfans eux-mêmes, soit pour leurs peres & meres, soit pour la société, quand ils sont destinés à périr à cet âge? Un si petit objet mérite-t-il quelque considération? N'est-on pas en droit de le négliger, & de dire en conséquence que la petite vérole détruit la huitiéme partie de l'humanité totale? Cependant si l'on veut tenir compte de cette petite portion de vie, comme on fait dans les calculs des vies moyennes, où l'on donne un prix égal à chaque année de vie, on pourra dire que la vie des 4 ou 5 premieres années, faisant environ la septiéme partie de la vie totale moyenne, la petite vérole ne prive ceux qu'elle enléve, que des six-septiémes de leur vie moyenne, & que par conséquent cette maladie détruit environ les six-septiémes d'une huitiéme partie, de l'espéce entiere, c'est-à-dire les trois vingt-huitiémes du total, ce qui approche beaucoup d'un neuviéme. Je ne donne pas, je le répète, cette évaluation comme entiérement exacte: j'ose cependant assurer qu'elle ne s'éloigne pas beaucoup de la juste valeur. On voit donc évidemment que la seule petite vérole enlève plus que la dixiéme partie de chaque génération annuelle, & que c'est une vraie décimation, à laquelle on propose de se soustraire par le moyen de l'Inoculation: laquelle comme M. *de la Condamine* le remarque avec beaucoup de justesse, au lieu de décimer, ne fait plus que millesimer ceux qui se mettent sous sa sauve-garde. Les $3/28$ de chaque génération annuelle que cette opération préserveroit, vaudroient environ soixante mille ames par an à la France seule, & tout le reste demeurant égal, une telle augmentation pourroit doubler le nombre des habitans du Royaume dans un siécle: tant par la conservation de ceux qui seroient garantis de ce fléau, que par la multiplication qu'ils produiroient.

Si ces considérations ne sont pas assez fortes pour ramener ceux qui s'opposent avec tant d'animosité à l'Inoculation, puissent-elles, au moins, engager tous les gens bien intentionnés à ne rien omettre pour donner à cette méthode toute la perfection dont elle est susceptible.

Ceux qui la pratiquent avec le plus de zéle, n'ont-ils point conservé de préjugés? La coutume de différer l'Inoculation jusqu'à l'âge de 5 ans, est elle fondée sur des raisons suffisantes? Je sçai qu'à cet âge où le plus grand danger des maladies de l'enfance est passé, on est moins exposé à voir le succès de l'opération troublé par des causes étrangeres & inconnues. Mais combien d'enfans victimes de cette crainte sont moissonnés au berceau dans certaines épidémies? Je suis tenté de croire qu'en abandonnant en Angleterre l'usage où l'on étoit d'inoculer les enfans nouveaux nés, on a moins déféré au bien général de l'humanité, qu'à l'appréhension de décrier cette méthode auprès du vulgaire, qui lui imputeroit sans examen, les accidens ordinaires à cet âge. Un jour viendra peut-être où l'on ne sera plus forcé à ces funestes changemens. Nous pourrons jouir alors de tous les avantages que nous offre l'inoculation; & l'on s'étonnera de les avoir si longtemps négligés.

Nota. Le Mémoire qu'annonce M. Bernoulli dans ces réflexions a été envoyé à l'Académie des Sciences de Paris, dont M. Bernoulli est membre. Ce Mémoire a pour titre: ***Essai d'une nouvelle analyse de la mortalité causée par la petite vérole, & des avantages de l'inoculation pour la prévenir***[3].

3 Cf. III.2 – St.51 p.235 h.v.

De usu algorithmi infinitesimalis in arte coniectandi. Auct. Daniele Bernoulli

Novi Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae. Bd. XII p. 11–13. 1766–67 (1768)
III. 4* - St. 55*

Calculi probabilium quisquis ad complura vitae negotia late patentem perpendit usum; nobilissimam hanc scientiam non eo, quod ipsius meretur dignitas, studio nostris temporibus excoli, est, quod iure miretur. Ars enim coniectandi non de acumine solum ingenii humani praeclara sistit specimina, sed eo se potissimum nomine commendat, quod, quae ad actiones provide utiliterque dirigendas et ad varias, easque summi nonnunquam ad civitatis salutem momenti, quaestiones politicas et morales dirimendas pertinent regulae, eae sepe numero inde sint repetendae.

Hospes tamen in rerum mathematicarum historia sit, quem praeclara lateant studia, a summo Geometra, *Daniele Bernouilli,* dudum in ea excelenda novisque adaugenda methodis posita, qui simul multiplicem eius usum inter complura specimina in gravissima inprimis atque ad totius fere generis humani salutem pertinente disquisitione, de variolarum insertione, insolita Analyseos specie usus abunde comprobavit. Nova vero sunt et a nemine adhuc in hoc calculi genere adhibita principia, quorum in amplificanda hac scientia vium Cel. Vir in hac dissertatione exponit, dum, quantum et in problematibus coniecturalibus Analysis infinitorum utilitatis praestet, facili methodo demonstrat. Observavit nempe, quotiescunque quaevis in circumstantiis rei, de qua quaeritur, variatio tanquam infinite parva spectari potest, ita, ut quantitatis fluentis notionem ad eam adplicari conveniat, calculum infinitesimalem ad expediendas quaestiones difficillimas felici successu in subsidium vocari; quae quidem hypothesis eo magis est admittenda, cum ante calculi differentialis inventionem veterum arithmetica infinitorum optime eidem fuerit superstructa. Quo igitur novae huius methodi vis pateat evidentius; duplex quaestionis cuiusdam propositae suppeditatur solutio, ex Analysi vulgari una, altera ex infinitesimali calculo deducta cum priori perfecte consentiens. Cuius quidem problematis licet et ex aliis principiis obvia sit solutio; id tamen ad probandam novae methodi praestantiam maxime est accomodatum, cum, adiectis novis quibusdam conditionibus, eius resolutio vix aliter, quam novis his integralis methodi subsidiis obtineri posse videatur.

En igitur praeclarissimam coniectandi scientiam novis incrementis auctam, quae Geometrarum attentione eo sunt digniora, quo feliciorem eius ad gravissimas quaestiones adplicationem ab acutissimi Auctoris meditationibus merito sperare licet; id quod in sequente dissertatione illustri comprobatur specimine.

De usu algorithmi infinitesimalis in arte coniectandi specimen.

Novi Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae. Bd. XII p. 87–98. 1766–67 (1768)
III.4 - St. 55

§. 1. Cum nuper de argumento cogitarem, cuius examen in proximam differam occasionem, in quaestionem incidi, quae ad artem coniectandi pertinet, quia vero ipsa haec quaestio coniecturalis ab altero argumento videri potest prorsus aliena, non incongruum putavi eam seorsim praemittere, sicque disquisitionibus proximis veluti viam sternere, et quidem tanto libentius, ut hoc facerem, animum induxi, quod ipsa methodus nostra mox explicanda aliquid conferre posse videatur ad nova in arte coniectandi principia formanda ac stabilienda, nondum quod sciam adhibita tantoque magis geometrarum attentione digna. Quoties nempe fit, ut sorte continua eaque variabili rerum status permutetur, veluti cum schedulae, diversis numeris inscriptis distinctae, successive ex urna extrahuntur, una post alteram atque leges quaeruntur pro variis inde natis mutationibus determinandis, calculi infinitesimales utiliter adhiberi possunt ad negotium istud perficiendum, si modo quaevis variatio ceu infinite parva considerari possit, quod fieri potest, donec numerus schedularum in urna residuarum valde magnus est. Tunc enim unitas pro elemento infinite veluti parvo haberi potest; eadem innititur hypothesi arithmetica infinitorum, qua mathematici ante detectum calculum differentialem et integralem usi sunt. Verum sentio argumentum istud in abstracto propositum ulteriori opus habere explicatione; igitur ad rem ipsam propero exemplis illustrandam; primo autem analysi utar vulgari, indeque ad usum algorithmi infinitesimalis descendam.

§. 2. *Problema:* Sint schedulae numero pari in urna repositae earumque binae singulae eodem numero notatae ita ut altera alterius sit socia ambaeque unum constituant par; diversa autem paria diversis numeris notata putentur, ut sic singula paria a se invicem dignosci possint; tum sorte extrahantur ex urna schedulae una post alteram; quo facto, quaeritur, dato numero schedularum in urna residuarum, quotnam probabiliter in eo futura sint paria integra simulque quot schedulae sua compari aut socia orbae remansurae.

Solutio. Sit numerus omnium schedularum $= 2n$
omniumque adeo parium $= n$,
post factam autem repetitamque extractionem numerus schedularum in urna superstitum $= r$;
tum ponatur numerus parium superstitum $= x$
adeoque numerus schedularum socia sua privarum $= r - 2x$.

His ita constitutis, pono unam insuper schedulam extrahi, ita ut fiat numerus schedularum in urna residuarum $=r-1$;
postrema ista schedula extracta aut erit de classe solitariarum, aut de classe coniugatarum depromta;
sed numerus casuum pro eventu priori facientium est $=r-2x$,
pro posteriori autem eventu $=2x$;
si prius evenerit, erit numerus parium superstitum etiamnum $=x$;
si posterius, numerus iste unitate decrescet; multiplicentur itaque, pro regula fundamentali in arte coniectandi, praefati valores x et $x-1$ per numerum casuum respondentem, productorumque summa dividatur per summam casuum, quo facto habebimus

$$\frac{(r-2x)x+2x(x-1)}{r}$$

aut simpliciter

$$x-\frac{2x}{r};$$

haec ultima formula nos docet, quavis nova extractione schedulae, numerum parium in urna superstitum diminui quantitate $2x/r$.

Facile nunc est, ad normam praefati lemmatis, valores successivos quantitatis x ab initio usque ad finem definire, ponendo successive pro r numeros

$$2n; \quad 2n-1; \quad 2n-2; \quad 2n-3; \quad 2n-4; \quad 2n-5 \quad \text{etc.}$$

quia enim statim ab initio est

$$x=n,$$

erit post primam schedulae extractionem

$$x=n-1;$$

post secundam extractionem

$$x=n-1-\frac{2(n-1)}{2n-1}$$

sive

$$=\frac{(2n-3)\times(2n-2)}{4n-2};$$

post tertiam extractionem

$$x=\frac{(2n-4)\times(2n-3)}{4n-2}$$

post quartam

$$x = \frac{(2n-5)\times(2n-4)}{4n-2} \quad \text{etc.}$$

Ex successione horum valorum intelligitur post $(2n-r)$ tam extractionem, id est, toties repetitam quoties unitas continetur in $2n-r$, fore

$$x = \frac{(r-1)r}{4n-2}.$$

Q.E.I.

§. 3. Idem valor reperitur, si ordine procedatur retrogrado, ita ut nunc terminus praecedens ex quovis termino insequente determinetur; si nempe significatio literarum x et r eadem maneat, quae in paragrapho praecedente, erit valor termini, cuius index est $r+1$, seu termini antecedentis

$$= \frac{r+1}{r-1}\, x;$$

ponantur iam pro litera r successive numeri naturales, incipiendo a binario, vel a casu $r=2$, sitque pro hoc casu $x=a$; ita erit successive

$$x=a; \qquad x=\frac{3\cdot 2}{2}\,a; \qquad x=\frac{4\cdot 3}{2}\,a; \qquad x=\frac{5\cdot 4}{2}\,a \quad \text{etc.}$$

unde iam patet, pro quocunque numero r, fore

$$x = \frac{r\times(r-1)}{2}\,a;$$

igitur hoc unicum superest faciendum, ut determinetur numerus a, quando duae tantum superstites sunt schedulae; tunc autem unus est casus, quo ambae schedulae sibi sunt compares atque par unum componunt, dum $2n-2$ casus sunt, quibus duae schedulae superstites sunt dispares; unde fit

$$a = \frac{1}{2n-1}$$

idem valor invenitur ex eo, quod posito $r=2n$ sit $x=n$; his enim substitutis valoribus in aequatione

$$x = \frac{r \times (r-1)}{2} a$$

prodit

$$n = \frac{2n \times (2n-1)}{2} a,$$

unde rursus

$$a = \frac{1}{2n-1}:$$

quod si igitur pro a modo dictus valor substituitur, habetur generaliter, ut antea,

$$x = \frac{r \times (r-1)}{4n-2}.$$

§. 4. Regulam nostram modo dictam, ut exemplo aliquo illustremus, ponamus duos chartarum lusoriarum fasciculos (deux jeux de cartes) utrumque 52 chartis vel foliis compositum, ambosque permixtos: ita habebimus 52 foliorum paria atque adeo $n = 52$, totus autem foliorum numerus erit 104; forte auferantur tredecim folia; remanebunt in manipulo 91 folia sicque erit $r = 91$, unde

$$x = \frac{r \times (r-1)}{4n-2} = 39 \frac{156}{206};$$

igitur ab initio tot fere paria destruuntur quot folia extrahuntur. Si vero 52 folia extrahantur, fiet $x = 12^{90}\!/_{103}$; ergo aliqua cum spe lucri certabitur inter residua 52 folia minimum 12 paria fore, certamen autem pro 13 paribus lusori foret aliquantulum damnosum. Verum hisce disquisitionibus diutius non immorabor; nec tamen solutionem problematis directam, utcunque obviam, praeterire volui; nimium certe hisce temporibus nobilissimum artis coniectandi studium negligitur aut vilipenditur, quod plurimas quaestiones sive morales sive politicas dirimere, maximum actionibus humanis commodum conciliare easque cum prudentia dirigere docet. Ad alias nunc progredior animadversiones instituto meo praesenti magis accommodatas.

§. 5. Cum schedulae uniformi successione ex urna extrahuntur, sensim diminuitur numerus r instar quantitatis alicuius fluentis, nec tamen ista fluxionis idea perfecte quadrare dici potest, quia decrementa schedularum in urna superstitum procedunt per saltus a numero integro ad numerum unitate minorem; adeoque si relatio inter abscissam r et applicatam x construatur, erit relationis scala polygonum, non curva; perspicitur autem, polygonum tanto magis ad curvam accedere, quo minor linea pro unitate accipitur, aut quod eodem recidit, quo maior est unitatum numerus r, ac denique veram curvae ideam sistere, si numerus unitatum ceu vere infinitus consideretur.

Iam igitur, ad huius praecepti normam, numeros n et r pro infinitis vel saltem valde magnis habebimus, atque sic poterimus absque errore, saltem sensibili, aequationem paragraphi tertii vel secundi

$$x=\frac{r\cdot(r-1)}{4n-2}$$

mutare in hanc alteram

$$x=\frac{rr}{4n};$$

haec cum ita sint, methodum monstrabo, qua posterior aequatio

$$x=\frac{rr}{4n}$$

immediate et facili calculo infinitesimali inveniri possit.

§. 6. Cum numerus r decrescit elemento dr, istud decrementum cadit in numerum schedularum vel solutarum, quarum numerus est $r-2x$, vel coniugatarum, quarum numerus est $2x$: in priori casu numerus parium nullum decrementum capit fitque $dx=0$; in altero casu totum decrementum dr unice cadit in diminutionem numeri x fitque adeo $dx=dr$; igitur habemus $r-2x$ casus qui elementum dx faciunt $=0$ et $2x$ casus, qui idem elementum dx faciunt $=dr$, unde, per regulam fundamentalem artis coniectandi, fit verus valor elementi

$$dx=\frac{2x\,dr}{r};$$

hinc

$$\frac{dx}{x}=\frac{2\,dr}{r};$$

haec autem ultima aequatio ita est integranda, cum additione constantis, ut posito $x=n$ fiat $r=2n$; unde talis oritur aequatio integralis

$$\log.x-\log.n=2\log.r-2\log.2n$$

vel

$$\log.\frac{x}{n}=2\log.\frac{r}{2n}$$

aut, sumtis numeris,

$$\frac{x}{n} = \frac{rr}{4nn},$$

vel denique

$$x = \frac{rr}{4n};$$

quod demonstrandum suscepi.

§. 7. Ut vero usus huius methodi magis patescat, aliam problemati nostro adiiciemus conditionem et quidem talem, quam rursus argumentum proxima vice pertractandum mihi subministravit.

Ponamus nempe, schedulas in urna repositas dimidiatim in duas classes esse divisas, veluti in nigras et albas, ita ut ante extractionem quaevis nigra suam habeat sociam albam, simili nota aut numero signatam. Ita rursus erit numerus integer parium $=n$ omniumque schedularum $=2n$ in nigras et albas aeque bipartitarum; verum fingamus insuper, schedulas alterutrius classis ad exitum esse proniores secundum datam legem qualemcunque sive constantem sive variabilem, sic ut nigrae et albae inaequali numero ex urna extrahantur. Ponamus adeoque numerum schedularum nigrarum in urna superstitum $=s$ et albarum $=t$; quaeritur nunc iterum, quotnam paria x inter omnes istas schedulas, albas et nigras, sint probabiliter in urna superfutura.

Ad hanc quaestionem solvendam oportet utramque schedularum classem seorsim examinare eamque subdividere in duas partes, quarum altera contineat schedulas etiamnum sociatas, altera solutas: inquiramus de nigris, quarum numerus $=s$; dividatur iste numerus in duas partes x et $s-x$; sic quaevis schedula nigra partis x suam habebit sociam albam, dum quaevis schedula alterius partis $s-x$ sua socia orba erit; sed quoniam omnes et singulae schedulae nigrae eidem sorti aequaliter subiectae ponuntur, erit decrementum dx, quatenus a decremento ds oritur,

$$= \frac{x\,ds}{s},$$

quia nempe sunt x casus, quibus valor istius decrementi est $=ds$, et $s-x$ casus, quibus est $=0$; similiter decrementum numeri x, quod a diminutione numeri t oritur, est

$$= \frac{x\,dt}{t},$$

sic integrum decrementum dx, quod ab ambarum classium diminutione oritur, fit

$$= \frac{x\,ds}{s} + \frac{x\,dt}{t};$$

at si

$$dx = \frac{x\,ds}{s} + \frac{x\,dt}{t}$$

erit

$$\frac{dx}{x} = \frac{ds}{s} + \frac{dt}{t};$$

quia vero ab initio singuli numeri x, s et t sunt aequales numero n, erit aequatio integralis

$$\log.\frac{x}{n} = \log.\frac{s}{n} + \log.\frac{t}{n};$$

unde, sumtis numeris, oritur

$$\frac{x}{n} = \frac{st}{nn}$$

vel

$$x = \frac{st}{n}.$$

§. 8. Si fingatur, schedulas nigras infinita extrahi facilitate, erit constanter $t=n$ fietque adeo $x=s$, cuius corollarii veritas per se patet; nulla enim schedula alba extrahetur et quaevis nigra superstes in urna necessario suam habebit sociam: idem valet, si de albis intelligitur, quod modo de nigris supposuimus. At vero, si aequali facilitate utriusque classis schedulae extrahantur, tunc in quaestionem paragraphi sexti incidemus; erit enim $s=t=\frac{1}{2}r$ proindeque

$$x = \frac{rr}{4n},$$

plane ut in allegato paragrapho sexto invenimus.

§. 9. Haud difficulter porro ex methodo nostra intelligitur, quod si, loco binarum schedularum sociatarum, singulae schedulae trinae aut singulae quaternae coniugatae vel eodem numero notatae ponantur atque ex collectis schedulis tres quatuorve classes formentur diversis coloribus distinctae, ac denique rursus ponatur, ante factam extractionem, quamvis classem continere n schedulas; tum si putetur post extractionem in urna superstites esse s schedulas in prima classe, t schedulas in secunda, u schedulas in tertia, ac denique z schedulas in quarta, si quatuor sint classes, fore numerum ternariorum, qui integri in urna permanserint,

$$= \frac{stu}{nn}$$

vel quaternariorum

$$=\frac{stuz}{n^3}$$

et sic porro in altioribus combinationibus: numeros autem n, s, t, u, z permagnos ac veluti infinitos usque supponimus.

§. 10. Unicum superest, quod porro ad institutum nostrum pertinet aliquo modo. Postquam scilicet in paragrapho septimo diversam in schedulis nigris et albis facilitatem finximus, qua ex urna extrahantur et quae faciat, ut inaequali numero in urna supersint schedulae ad unam alteramve classem pertinentes, non abs re erit paucula superaddere verba, quae propius ad istam hypothesin pertinent.

Notabimus igitur vel cognitam usque esse relationem inter s et t, id est, inter schedulas nigras et albas in urna superstites atque tunc desiderari posse relationem inter praememoratas facilitates, sive relatio ista fuerit constanter eadem sive utcunque variabilis, vel cognitam esse hancce posteriorem relationem, ex qua deducenda sit prior relatio.

§. 11. Sit itaque, pro quavis extractione data, proclivitas in egressum pro schedulis nigris ad similem proclivitatem pro schedulis albis, ut ϕ ad 1, intelligendo per ϕ numerum qualemcunque sive constantem sive data lege variabilem, retineanturque denominationes antea adhibitae; sic patet fore

$$ds{:}dt=\phi s{:}t,$$

quia utique decrementa ds et dt pro quavis imminente extractione rationem sequuntur compositam ex ratione s ad t et ex ratione facilitatum, utrique schedularum classi respondentium, quod posterius ex ipsa nostra diversarum facilitatum definitione liquet; hinc deducimus

$$\phi=\frac{tds}{sdt}$$

et haec aequatio inserviet ad utramvis relationem ex altera data determinandam.

Si $$\phi=1,$$
id est, si facilitas ab utraque parte sit eadem, fit

$$sdt=tds,$$

vel

$$\frac{dt}{t}=\frac{ds}{s};$$

vel

$$\log.\frac{t}{n}=\log.\frac{s}{n};$$

unde

$$t=s.$$

Si $\phi=\dfrac{g}{h}=$ numero qualicunque constanti,

fit

$$\frac{g}{h}=\frac{tds}{sdt},$$

unde

$$\frac{gdt}{t}=\frac{hds}{s}$$

aut

$$g\log.\frac{t}{n}=h\log.\frac{s}{n}$$

sive

$$t=n\left(\frac{s}{n}\right)^{h:g}.$$

Si $\phi=\dfrac{n}{n+s}$,

habetur

$$\frac{n}{n+s}=\frac{tds}{sdt}$$

vel

$$\frac{ndt}{t}=\frac{n+s}{s}ds,$$

unde

$$n\log.\frac{t}{n}=s-n+n\log.\frac{s}{n}$$

atque

$$n\log.\frac{t}{s}=s-n$$

sive

$$t=c^{(s-n):n}s,$$

ubi c indicat numerum cuius logarithmus hyperbolicus est unitas.

Si vicissim ponatur $t=\dfrac{ss}{n}$

erit

$$\phi = \frac{1}{2}$$

vel si $$t = s^f : n^{f-1}$$

fit

$$\phi = \frac{1}{f}.$$

Si denique $$t = \frac{2ss - ns}{n}$$

fit

$$\phi = \frac{2s - n}{4s - n}.$$

§. 12. Non diffiteor, problema nostrum posterius, prouti in septimo paragrapho propositum est, facilem admittere solutionem ex aliis principiis; ista vero facilitas inde oritur, quod utrumque numerum s et t pro cognitis assumserim, cum tamen uterque incognitus est, quando simpliciter datur numerus schedularum tum nigrarum tum albarum in urna residuarum; sic quidem datur summa numerorum s et t; at neuter per se cognoscitur et demum ex data functione ϕ erunt eliciendi. Sic problema longe aliam faciem sumit, necdum video, quemadmodum solutionem a nostra diversam admittere possit. Ipsa autem nostra solutio ita erit instituenda.

Vidimus paragrapho undecimo, esse

$$\phi = \frac{t\,ds}{s\,dt};$$

habemus igitur

$$\frac{ds}{s} = \frac{\phi\,dt}{s},$$

hinc

$$\log \frac{s}{n} = \int \frac{\phi\,dt}{t};$$

ponatur c pro numero, cuius logarithmus hyperbolicus sit unitas, atque sic erit

$$\frac{s}{n} = c^{\int \phi\,dt:t}$$

Quia sic valor numeri s exprimitur per functionem numeri t, erit productum st simpliciter expressum per functionem numeri t; sit nunc iterum data summa omnium schedularum in urna residuarum $=r$ et erit $s+t=r$ et quia datur s per t, habetur aequatio inter t et r cuius ope numerus t mutabitur in functionem numeri r, sic ùt denique quantitas st/n vel quaesita quantitas x pura functione numeri r expressa habeatur. Operosa et intricata est haec solutio generalis intelligiturque ex ipsa formularum indole, solutionem problematis ab analysi communi deduci non posse; verum plurimis in casibus egregie sublevatur calculus, uti nunc videbimus.

§. 13. Ponamus unicuique schedulae nigrae per se inesse proclivitatem, ut extrahatur, duplo maiorem, quam sit in quavis schedula alba; sic erit

$$\phi=2=\frac{tds}{sdt};$$

unde

$$\frac{2dt}{t}=\frac{ds}{s}$$

adeoque

$$s=\frac{tt}{n};$$

quia vero

$$s+t=r,$$

erit nunc

$$\frac{tt}{n}+t=r,$$

simulque

$$x=\frac{st}{n} \qquad (§. 7.)$$

$$=\frac{t^3}{nn}$$

vel

$$t=\sqrt[3]{nnx};$$

hinc aequatio

$$\frac{tt}{n}+t=r$$

mutatur in hanc

$$\sqrt[3]{nxx}+\sqrt[3]{nnx}=r,$$

quae porro reducta dat aequationem quaesitam:

$$x = \frac{\left(-\frac{1}{2}n + \sqrt{nr + \frac{1}{4}nn}\right)^3}{nn}.$$

Fuerit, verbi gratia, $r = {}^5\!/_{16}\,n$, fiet $x = {}^1\!/_{64}\,n$, in hypothesi autem aequalis pro utraque schedularum classe in egressum proclivitatis, fieret in eodem exemplo $x = {}^{25}\!/_{1024}\,n$, ratio utriusque valoris est ut 16 ad 25. Erit praeterea $s = {}^1\!/_{16}\,n$ et $t = {}^1\!/_4\,n$ cum in altera hypothesi esset $s = t = {}^5\!/_{32}\,n$. Exinde abunde patet, quod si ex sola origine inaequalitatis inter valores s et t problema nostrum solvendum fuisset, id vix aliter quam fecimus obtineri potuisset.

De duratione matrimoniorum media pro quacunque coniugum aetate, aliisque quaestionibus affinibus. Auctore Daniele Bernoulli

Novi Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, Bd. XII p. 13–15, 1766–67 (1768).
III. 5* – St. 56*

In omnibus rerum humanarum variationibus ac vicissitudinibus, quantumvis in se incertis ac quasi fortuitis, pro magna tamen hominum indiscriminatim collectorum multitudine, in qua incertitudo sortis singulorum, habita ratione totius, tanquam evanescens spectari possit, statum medium constantes fere sequi leges, multiplicibus observationibus dudum est confirmatum. Ita per longam tabularum natalium seriem fuit exploratum, singulis annis numerum filiorum natorum non superare modo numerum filiarum natarum, sed hanc ipsam quoque inaequalitatem ad numerum omnium natorum in eadem regione constantem fere servare proportionem. Ita etiam tabulae mortuales, pathologicis praesertim notis instructae, definiendae mediae durationi vitae a quacunque aetate insuper exspectandae inserviunt, multisque aliis egregiis usibus, sive ad medicinam spectes sive ad politicam ob novarum veritatum solo ratiocinio inde eliciendarum copiam minime destituuntur. Neque minor tabularum matrimonialium, praesertim si adcuratius conderentur, ad illustrandam oeconomiam politicam usus est, licet ex iis de matrimoniorum duratione media difficillimum sit iudicium. Haec scilicet intricatissima quaestio Analysin requirit ex scientia coniecturali petitam, qua connubiorum duratio media pro quacunque coniugum aetate eaque vel dispari ulterius exspectanda definiatur, huiusque ope, dubium non est, quin multo determinetur exactius, quam quidem longissima observationum serie adhuc fieri potuit. Facile vero patet, hoc problema alia niti quaestione, pariter ex calculo probabilium petenda, quot nimirum ex dato magno aliquo connubiorum eodem tempore initorum numero pro data utriusque coniugis aetate post singulos annos matrimonia integra probabiliter sint superfutura; ubi quidem duos casus distingui oportet, prouti utriusque coniugis vel aequalis fuerit aetas vel inaequalis; admissa insuper hac una hypothesi, ut uterque sexus aequali mortis periculo subiici supponatur, quamvis sequioris sexus vitam a morte tutiorem esse, tabulae mortuales ostendant. Utriusque casus solutio in superiori dissertatione[1] a Cel. *Bernouillio* iam est data, adhibitis ibi terminis in arte coniecturali usitatis. Si enim in urna colligantur *n* paria schedularum, suo quaeque a reliquis colore distincta, omnesque schedulae pari facilitate extrahi posse sup-

1 Cf. III. 4 – St. 55 p. 276 h.v.

ponantur; tum, si post repetitam aliquoties unius schedulae extractionem numero in urna residuarum sit $=r$, ex calculis Cel. Auctoris numerus parium integrorum in urna superstitum probabiliter erit

$$x=\frac{r(r-1)}{4n-2}\,.$$

Quodsi vero una schedularum classis sit altera ad egressum ex urna proclivior, sitque numerus ex una classe in urna residuarum $=s$, ex altera $=t$; parium integrorum in urna residuorum erit numerus

$$x=\frac{st}{n},$$

quarum iam formularum facilis est ad praesentem quaestionem adplicatio; ita, ut tabulae construi potuerint, in quibus, quot ex 500. matrimoniis primitivis pro quacunque utriusque coniugis aetate post singulos annos superfutura sint integra, indicetur; quo problemate soluto de connubiorum duratione media pro quavis connuptorum aetate facili ratiocinio iudicari potest. Alter casus, ubi dispar est coniugum aetas, quam sit complicatus, nemo non videt; sed in eo inprimis tam feliciter soluto novae methodi coniecturalis a Cel. Auctore explicatae vis et praestantia luculentissime cernitur, cum eius solutionem ad aequationem differentialem trium variabilium perduxerit, quae non a permixtione solum variabilium liberari, sed penitus integrari potuerit.

De duratione media matrimoniorum, pro quacunque coniugum aetate, aliisque quaestionibus affinibus.

Novi Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae. Bd. XII p. 99–126. 1766–67 (1768)
III. 5 - St. 56

Conferatur specimen de usu algorithmi infinitesimalis in arte coniectandi pag. 87.[0]

§. 1. Perpetua cum sit nascendi denascendique commutatio, a plurimis iam annis tabulae apud diversas gentes fuerunt constructae tum natales tum mortuales, quibus denique variationum et vicissitudinum leges, mirabili cum successu, observatae atque stabilitae fuerunt; quamvis enim privati uniuscuiusque hominis fatum sit prorsus incertum, negari tamen non potest, quin status medius, pro magno hominum numero indiscriminatim collecto, legibus fere invariatis respondeat, quorsumcunque status iste referatur vel quacunque de re sermo sit. Ita observatum fuit, numerum filiolorum annuatim natorum constanter superare numerum filiolarum annuatim natarum; imo, quod mirabilius est, vel ipsam inaequalitatem propemodum constanter eandem observare proportionem in eadem Regione ad totum natorum numerum: id autem posterius non nisi in permagnis animadverti potest numeris, in quibus nempe incertitudo sortis fortuitae, habita ratione totius, fere evanescere demonstratur; videntur etiam proportiones istae pro utroque sexu esse paululum diversae in diversis regionibus. In tabulis accuratioribus supperadduntur enumerationes pathologicae, unde morborum lethalium indolem optime intelligimus; notum nunc est, solas variolas hisce temporibus duodecimam aut decimam tertiam partem cuiusvis generationis interimere, plus minus pro ratione et diversitate gentium; notum pariter est, morbos primae infantiae fere tres decimas totius generationis partes intra primum nativitatis annum tollere; observatum porro fuit, quod propius ad institutum nostrum pertinet, foeminas communiter vita frui longaeviori quam mares; tabulam hac de re habemus a Celeberrimo D. *Wargentin* in Suecia constructam[1], quae hanc observationem egregie confirmat; neque id diversae vivendi rationi tribui potest, quia ista sequioris sexus praerogativa a primis incunabilis constantissime manifestatur atque per totam vitam in illo manet. De eodem utriusque sexus numero intra primum nativitatis annum moriuntur 1623 filioli et 1438 filiolae; vita media ab ipsa nativitate sumta in filiolis est 24 annorum 2 mensium, in altero sexu est 28 annorum cum decem mensibus; 2008 prioris classis attingunt annum vigesimum, in altera classe 2337. hinc numerus foeminarum constanter

0 Cf. III. 4 - St. 55 p. 276 h.v.
1 P.W. Wargentin «Mortaliteten i Sverige, i anledning af Tabell-Verket» Kongl. Vetenskaps Academiens Handlinger For Ar 1766. Réédítée à Stockholm en 1930.

superat numerum virorum viventium. Huiusmodi observationes, sive ad politicam, sive ad medicinam referantur, sua utilitate minime carent; quin longe latius usus eorum pateret, si omni suo momento ponderarentur iisque recte uterentur scriptores.

§. 2. Praeter tabulas natales et mortuales construi quoque solent matrimoniales, quae ad oeconomiam politicam illustrandam praeprimis inserviunt magisque inservirent, si accuratius conderentur, quippe optandum foret pro quovis connubio, ut adiecto numero arabico utriusque desponsati aetas alioque numero romano indicaretur, num nuptias primas vel secundas aut etiam tertias celebraverit nuptus aut nupta. Ex tabulis matrimonialibus ita conditis optime intelliguntur in ista re consuetudines in diversas gentes diversasque urbes introductae, quae si minus forte cum axiomatibus politicis conveniant, prudenter oppugnari possunt.

§. 3. Praememoratae triplices tabulae fundamentales solis observationibus assiduis magno labore congestis formari poterant, nec enim quicquam hic iuvat rationis usus; at dici non potest, quot novae veritates solo ratiocinio inde elici possint. Tabulae mortuales nos docent, verbi gratia, durationem mediam vitae a quacunque aetate insuper expectandae, non quidem immediate sed per consequentias ut ut per se unicuique obvias; quaestio autem, quam nunc enucleabimus, de duratione media matrimoniorum multo operosior est plurimasque requirit deductiones et cum inde diversae humani generis classes, successiones ac vicissitudines petendae sint, operae pretium me facturum existimavi, si viam monstrarem ad hoc argumentum, quod multa habet communia cum specimine aliquo, quod ante hos septem annos cum Academia Reg. Sc. Parisina communicavi, Commentariis huius Academiae ad An. 1760. inserto, ubi de mortalitate a variolis naturalibus salutarique earum insertione disserui[2], insolita ad hanc rem analyseos specie usus.

§. 4. Cum de duratione media matrimoniorum, pro data utriusque coniugis aetate, quaeritur; necesse est, ut prius tabula exhibeatur pro dato similium connubiorum numero, quae indicet, quotnam eorum post singulos annos remansura sint integra, at modus quo huiusmodi tabula construi possit, adhucdum desideratur. Docebunt equidem tabulae mortuales numerum tam virorum quam foeminarum post singulos annos superstitum; sed uterque numerus compositus erit ex viduatis et ex connuptis seu iis, qui etiamnum in statu matrimoniali vivunt; singuli autem hi numeri cum sint penitus incogniti, analysis requiritur, qua definiri possint atque haec analysis ex arte coniectandi petenda est. Incipiam a simplicioribus, atque primo supponam aequalem in utroque sexu aetatem, ita ut omnes sive connupti sive connuptae communem habeant aetatem; tum etiam ponam utrumque sexum eiusdem aetatis indiscriminatim eidem mortis periculo subiectum, ut ut observatum

2 Cf. III.2 – St.51 p.235 h.v.

sit rem paulo aliter se habere sexumque sequiorem vitam a morte tutiorem agere; nec tamen ista observatio ita est interpretanda, quasi in copiosis urbibus aliisve locis foeminae minori numero annuatim moriantur ac mares, etenim eodem numero si nascantur, oportet etiam ut pari numero moriantur; at notandum est, in omni civitate plures vivere foeminas quam mares; unde sequitur summam annuatim morientium in utroque sexu posse quidem esse absolute aequalem, id autem non impedire, quin habita ratione viventium summae in utroque sexu, minori proportione moriantur foeminae quam mares. Id monere ideo volui, quod nonnullos scriptores erroneam hac de re sententiam ferre viderim.

Postquam sic argumentum nostrum pro hypothesi communi pertractavero, modum ostendam quo generaliter et omni accuratione perfici possit.

§. 5. Fuerit ab initio numerus omnium matrimoniorum $= n$
atque adeo numerus omnium connuptorum $= 2n$;
tum putetur post datum annorum decursum pars eorum morte abrepta
sitque numerus omnium vivorum superstitum $= r$
omniumque proinde demortuorum $= 2n - r$;
ponatur denique numerus matrimoniorum adhucdum subsistentium $= x$
atque adeo numerus omnium viduatorum $= r - 2x$;
His ita definitis, dico fore

$$x = \frac{rr - r}{4n - 2}.$$

Solutionem huius quaestionis demonstratam dedi in specimine *de usu algorithmi infinitesimalis in arte coniectandi* §. 2.[3] (vid. pag. 88. huius commentariorum voluminis) ubi equidem terminis usus sum in arte coniectandi adhiberi solitis; rem autem eodem redire nemo est qui non videat. Erit porro numerus omnium viduatorum seu

$$r - 2x = \frac{2nr - rr}{2n - 1},$$

cuius dimidium perinde exprimit numerum sive viduorum sive viduarum, quandoquidem mortem eadem falce in utrumque sexum saevire ponimus.

§. 6. Sic igitur facile nunc est numerum matrimoniorum, quae integra permanserint, pro quovis numero viventium residuo, determinare et quia posterior iste numerus, ad quemvis aetatis communis annum in tabulis mortualibus reperitur, poterit simul pro quovis anno numerus matrimoniorum superstitum indicari. Seligam tabulas mortuales a celeberrimo *Halleio*[4] pro Civitate Breslawiensi

3 Cf. III. 4 - St. 55 p. 276 h.v.
4 Cf. note 3 du III. 2 - St. 51 p. 241 h.v.

constructas, quae passim fuerunt typis mandatae nominatimque extant in egregio opere D. de Parcieux cui titulus est *Essay sur les probabilités de la durée de la vie humaine*[5], iisque utar ad novas condendas tabulas scopo nostro inservientes. Liberum utique est a numero matrimoniorum incipere quocunque pariter atque ab aetate communi qualicunque. Ponam itaque 500 matrimonia primitiva contracta inter mille personas, quarum singulae praecise 20 annos natae sint. Cum autem in tabula *Halleiana* ponantur 598 personae 20 annorum, ego autem 1000 personas supponam, erunt singuli numeri ab *Halleio* positi augendi in ratione numerorum 598 et 1000; fractiones negligam iisque substituam numerum integrum, cui proximae sunt aut qui melius uniformitatem in progressu observat.

Tabula, quae sequitur, ex quatuor columnis constat, singulis bipartitis. Columna prima aetatem indicat annis expressam; secunda numerum personarum superstitum; tertia numerum matrimoniorum subsistentium et morte intactorum; quarta denique numerum personarum viduatarum nullo habito sexus discrimine, quaeque adeo in duas classes aequales, viduos et viduas, erunt subdividendae. In hunc censum autem referendi sunt omnes, qui viduitatem semel passi sunt, sive novas inierint nuptias sive viduitatis statum retinuerint.

§. 7. Formula, qua usi sumus, ad numeros tertiae columnae calculo eruendos, scilicet

$$\frac{rr-r}{4n-2},$$

satis indicat numeros hosce non esse exacte proportionales numero primo ad arbitrium assumto, nisi numerus iste primordialis sit permagnus; at vero tunc numeri postremi aliquantillum ab identitate proportionalitatis recedent; notandum porro ex eo, quod fractiones omnes reiicimus, parvulos errores unitate maiores, minores tamen binario in numeros quartae columnae cadere posse; numeri isti generaliter exprimuntur formula

$$\frac{2nr-rr}{2n-1} \qquad (\S.\ 5.);$$

ergo numerus viduatorum maximus fit, quando numerus primordialis connuptorum ad dimidium fuit reductus, id est, cum $r=n$; tunc autem fit maximus numerus viduatorum adhuc dum viventium

$$=\frac{nn}{2n-1}$$

5 A. Deparcieux «Essai sur les Probabilités de la durée de la vie humaine ...» Paris 1746. Suppléments publiés en 1760.

I. Aetas, annorum.	II. Viui superstites.	III. Matrimonia residua.	IV. Superstites viduati.
20	1000	500	0
21	990	490	10
22	980	480	20
23	970	470	30
24	960	461	38
25	948	450	48
26	936	439	58
27	924	427	70
28	913	416	81
29	901	406	89
30	888	395	98
31	875	384	107
32	861	372	117
33	848	360	128
34	834	348	138
35	819	336	147
36	804	324	156
37	789	312	165
38	774	300	174
39	759	288	183
40	744	276	192
41	729	265	199
42	714	254	206
43	698	243	212
44	681	232	217
45	664	221	222
46	647	210	227
47	631	199	233
48	614	188	238
49	597	178	241
50	579	168	243
51	560	157	246
52	541	147	247
53	523	137	249
54	505	127	251
55	488	118	252
56	471	110	251
57	454	103	248
58	437	95	247
59	421	88	245
60	404	81	242
61	387	75	237
62	370	69	232
63	354	63	228
64	338	57	224
65	321	52	217
66	304	47	210
67	287	42	203
68	270	37	196
69	254	32	190
70	237	28	181
71	219	24	171
72	200	20	160
73	182	16	150
74	164	13	138
75	147	10	127
76	130	8	114
77	114	6	102
78	98	4	90
79	82	3	76
80	69	2	65
81	57	2	53
82	47	1	45
83	39	1	37
84	33	1	31
85	27	0	27
86	22	0	22
87	17	0	17
88	13	0	13
89	9	0	9

sive in nostro exemplo $= 250\frac{1}{4}$, cum tamen tabula ipsa numerum indicet 252. Id moneo, ne quis compendii causa admissos parvulos errores ipsi methodo tribuat.

§. 8. Tabula, quam modo dedimus, ab aetate incipit 20 annorum; difficile autem non est pro quacunque alia aetate initiali novam construere tabulam. Ita si animus sit indolem matrimoniorum pro aetate 30 annorum explorare, tunc indicat praemissa tabula numerum matrimoniorum superstitum hac aetate esse 395; quia vero ab initio numerus vivorum superstitum semper est duplus numeri matrimoniorum, ponendum est columnam secundum incipere a 790 desponsatis; igitur numerus 888 mutandus est in numerum 790, posteaque omnes numeri in columna secunda expositi ad eandem proportionem sunt diminuendi; numeri vero columnae tertiae omnes retinendi; denique si a numeris secundae columnae praefato modo diminutis subtrahantur numeri tertiae columnae duplicati prodibunt numeri quartae columnae. Atque sic facili negotio tabulae pro quavis connuptorum aetate communi construentur.

§. 9. Si nunc tempus quaeratur, quo matrimonia primordialia, aetate 20 annorum inita, dimidia sui parte morte destruantur, id sola tabulae inspectione patebit; etenim cum ab initio 500 ponantur matrimonia, videndum modo erit in columna tertia, quanam aetate 250 matrimonia morte intacta supersint:

I. annor. aetas	II. Temp. pro dimidia matrimonior. destruct.
20	22 anni $4\frac{1}{2}$ mens.
25	19 — 7 —
30	17 — 2 —
35	15 — 0 —
40	12 — 11 —
45	11 — 0 —
50	9 — 6 —
55	8 — 8 —
60	7 — 4 —
65	5 — 6 —
70	3 — 8 —
75	2 — 6 —
80	2 — 0 —

atque sic apparebit id fieri intra 42^{um}. et 43^{um}. aetatis annum vel potius aetate 42 annorum $4\frac{1}{2}$ mensium; sic igitur aequo pignore certari poterit matrimonium, communi aetate 20 annorum initum, post 22 annos $4\frac{1}{2}$ mens. etiamnum substiturum aut non substiturum.

Verum eadem quaestio pro quacunque alia aetate, modo utrique connupto eadem sit, eodem modo solvitur. Sit, verbi gratia utriusque connupti aetas 40 annorum: tabula nostra indicat, hoc aetatis anno superesse 276 matrimonia, atque hunc numerum ad dimidium reduci post elapsos duodecim annos cum undecim mensibus.

Atque sic tabellam appositam pro quovis aetatis incremento quinquennali construxi, ubi prima columna indicat annorum aetatem utrique connupto communem, secunda vero tempus docet, annis mensibusque expressum, intra quod probabiliter dimidia matrimoniorum pars destruatur. Methodo autem interpolationum satis accurate negotium conficietur pro quavis aetate intermedia.

§. 10. Praefata quaestio de tempore, quo dimidia matrimoniorum pars destruitur incipiendo ab aetate qualicunque, non est confundenda cum quaestione nostra principali, quae durationem mediam matrimoniorum insuper expectandam requirit, quaecunque sit aetas connuptorum, modo sit eadem. Facile tamen providetur non multum admodum inter se differre posse ambas quaestiones; methodus autem pro invenienda duratione media matrimoniorum similis est illi, qua utimur ad durationem vitae, a quacunque aetate, insuper expectandae; sed ipsa haec methodus requirit, ut prius annua quaevis destructio innotescat et haec quidem annua matrimoniorum destructio cum nullis adhuc dum observationibus fuerit determinata, videndum mihi erat annon calculo posset ad quamvis aetatem definiri, quod negotium ex sententia successit; iam igitur modum indicabo, quo ad ductum tabulae, paragrapho sexto subiunctae, pro quavis aetate ulterior matrimoniorum duratio media indagari debeat.

§. 11. Addantur omnes numeri, in columna tertia tabulae nostrae expressi, incipiendo a data annorum aetate usque ad finem et eorum summa dividatur per numerum datae aetatis respondentem: sic *quotiens* exprimeret, ut notum est, durationem mediam quaesitam, si modo matrimonia singula, quae unoquoque anno destruuntur, simul in fine anni destruerentur; at vero cum destructio per totum anni decursum sit fere uniformis, haec sine sensibili errore in medium annum incidere censenda erit; hinc fit, ut praefatus *quotiens* dimidio anno seu sex mensibus sit diminuendus. Sic itaque, si exempli gratia sermo fuerit de duratione media matrimoniorum inter coniuges 55 annos natos, accipienda erit summa numerorum tertiae columnae ab 118 incluso usque ad finem, quae summa est 1208 quaeque nunc dividi debet per numerum 118 propositae aetati respondentem; quotiens proxime erit $10\frac{1}{4}$ totidem exprimens annos, a quibus si denique auferatur annus dimidius remanebunt $9\frac{3}{4}$ sive novem anni cum novem mensibus; igitur duratio media matrimoniorum inter coniuges 55 annorum est novem annorum totidemque mensium.

I. annorum aetas	II. Duratio media matrimoniorum
20	23 a. 10 m.
25	21 — 3
30	18 — 10
35	16 — 8
40	14 — 9
45	12 — 10
50	11 — 1
55	9 — 9
60	8 — 1
65	6 — 2
70	4 — 6
75	3 — 4
80	3 — 0.

Sic itaque ad modum allati exempli, pro quovis rursus aetatis incremento quinquennali, tabellam formavi appositam, cuius prima columna indicat annorum aetatem utriusque coniugis, secunda vero docet durationem mediam matrimoniorum diversis aetatibus istis subsistentium; quod in hoc negotio reliquum est interpolationes conficient.

§. 12. Ut nunc quodammodo appareat, quousque haec nostra theoria cum observationibus cohaereat, exemplum allegabo, quod nuperrime legi in transactionibus Bernensibus, ubi dicitur Lausannae numerata fuisse 1053 matrimonia subsistentia, ibique annuatim 49 matrimonia consecrari; exinde sequitur durationem mediam horum matrimoniorum noviter initorum esse proxime 21 annorum cum sex mensibus; haec duratio media paululum maior est ea, quae convenit aetati 25 annorum. Minime autem vero absimile est, aetatem mediam omnium matrimoniorum, quae consecrantur, esse propemodum 25 annorum, sic ut calculi nostri ipsis observationibus non male conveniant. Nunc vero non vacat alia apud diversos Autores inquirere exempla. Si qui alii istud negotii in se suscipere velint, his facile erit suum formare iudicium, modo meminerint diversam paululum esse in diversis regionibus mortalitatem atque pro mortalitatis gradu increscere aut diminui matrimoniorum durationem.

§. 13. Quod si nunc porro desideremus summam matrimoniorum in civitate, quae annuatim 500 matrimonia nova praebet, subsistentium, simul autem supponatur non alia celebrari matrimonia, quam inter personas 20 annos natas, non aliud faciendum est, quam ut multiplicemus durationem mediam novorum matrimoniorum annuorum per numerum horum matrimoniorum, id est, $23\frac{5}{6}$ per 500; productum 11917 dabit summam quaesitam: haec erit summa omnium matrimoniorum subsistentium: summa autem omnium personarum foedere matrimoniali iunctarum erit 23834. Si vero alia ponatur aetas singulis novis desponsatis communis, eidem quaestioni inserviet tabella paragraphi undecimi; erit enim ubique numerus matrimoniorum annuorum ad summam omnium matrimoniorum subsistentium ut tempus unius anni ad tempus durationis mediae, quod in columna secunda tabellae notatum est. Ponamus itaque singula matrimonia differri in finem trigesimi anni, oportebit nunc multiplicare numerum matrimoniorum annuorum per $18\frac{5}{6}$. Sed ipse numerus matrimoniorum annuorum nunc minor erit in ratione vivorum superstitum, id est, in ratione numeri 1000 ad 888, qui respondent aetatibus 20 et 30 annorum; igitur numerus matrimoniorum annuorum nunc erit $\frac{888}{1000} \times 500$ sive 444, qui multiplicatus per $18\frac{5}{6}$ dat 8362, cum antea fuerit 11917; annon etiam matrimonia prioris classis multo foecundiora praesumi possunt, quam matrimonia finito demum trigesimo aetatis anno inita? Si quae civitas a 500 matrimoniis annuis, singulis sub finem vigesimi aetatis anni contractis, quotannis 2300 liberos susceperit, haec eadem civitas forte vix ultra 1000 liberos quotannis acquiret, si omnia et singula matrimonia elapso demum trigesimo aetatis anno ineantur.

§. 14. Verbum addam de numero viduatorum omnium utriusque sexus, qui ad eandem, de qua diximus civitatem pertinebunt, si viduitatem perpetuo servare ponantur, aut si omnes viduitatem semel passi vel passae huic censui annumerentur. Quod si autem in tabula paragraphi sexti addantur numeri columnae quartae; orietur numerus 10326 qui proxime exprimet numerum omnium personarum viduatarum usque ad finem aetatis 89 annorum; huic addi possunt propemodum 24 superstites aetatem istam transgressi, ita ut summa omnium personarum viduatarum in civitate censeri queat 10350. Igitur omnes personae foedere matrimoniali iunctae rationem habebunt ad omnes viduatas propemodum ut 23834 ad 10350 vel fere ut 23 ad 10. Haec ita se habebunt, si singula matrimonia aetate 20 annorum pro utroque sexu celebrari ponantur. Aetas alia aliam tabulam aliosque numeros haberet, quae autem levi mutatione obtinentur; nimius sim, si omnia attingam, supersunt enim quam plurimae quaestiones, quae solo calculo et quidem melius quam observationibus utcunque assiduis determinantur.

§. 15. Progredior ad alterum matrimoniorum genus inter diversae aetatis coniuges initorum. Communia sunt huiuscemodi connubia, cum plerunque maritus uxorem aetate superet. Notum autem est periculum mortis crescere cum aetate, praeterquam quod, caeteris paribus, maius quoque periculum sit in viris quam in foeminis. Sic igitur si maior aetas ponatur in maritis, hi facilius et citius e vita discedent longeque plures post se relinquent viduas, quam vidui fiant. Verebar equidem, ne ista inter viduos viduasque inaequalitas nimium difficultatis argumento nostro inferret; at iuvit ipsa rei natura eo, quod aequatio differentialis inter tres indeterminatas non separationem modo sed et integrationem, veluti forte fortuna, admittat. Similem habui fortunam in specimine, cui titulus est, *Essay d'une nouvelle analyse de la mortalité causée par la petite verole etc.* Commentariis Acad. Reg. Scient. Paris. ad annum 1760 inserto, cuius iam supra mentionem feci §. 3. Iam vero intelligitur, me methodo algorithmi infinitesimalis usum fuisse, quae requirit, ut numerus matrimoniorum initialis permagnus aut veluti infinitus accipiatur. Methodum istam, solis mutatis nominibus, integram exposui in specimine praeliminari *de usu algorithmi infinitesimalis in arte coniectandi* a paragrapho septimo usque ad finem (vid. iterum pag. 87. huius commentariorum voluminis). Hic sunt mariti et uxores, quod ibi schedulae nigrae et albae; hic matrimonia, quod ibi schedularum sociarum paria; hic denique maior mortalitas alterutrius sexus, quod ibi maior pro extractione ex urna facilitas vel maior in egressum pronitas.

§. 16. Ponatur iam numerus matrimoniorum initialis iterum $= n$
sintque haec matrimonia singula ita constituta, ut mariti omnes quidem eiusdem

sint aetatis inter se pariter atque uxores, verumtamen diversa sit aetas in uno sexu et in altero. Deinde, elapso dato annorum numero,

sit numerus virorum superstitum $= s$

et numerus foeminarum superstitum $= t$;

ambo autem numeri dignoscuntur ex tabulis mortualibus: tum quaeritur quotnam inter hos superstites omnes futura sint matrimonia integra sive eousque morte intacta, quotnam porro vidui vel saltem semel viduati et quotnam viduae aut semel viduatae. Ponatur rursus numerus matrimoniorum superstitum $= x$;

sic erit numerus viduorum superstitum $= s - x$

et numerus viduarum superstitum $= t - x$.

His ita constitutis demonstravimus in fine paragraphi septimi speciminis nostri praeliminaris *de usu algorithmi infinitesimalis in arte coniectandi*, fore

$$x = \frac{st}{n} \cdot$$

Cognitis itaque aut datis numeris s et t innotescunt omnia.

Patet inde, non necesse esse, ut directe ratio habeatur diversae in diverso sexu mortalitatis, quae ab aetatis diversitate oritur; implicite tamen hoc factum fuisse nemo non videt ex eo, quod relatio supponatur inter numeros s et t, quae diversas mortalitates necessario involuit: quin formula nostra, quamvis simplicissima, ita est generalis, ut simul etiam ratio haberi possit alterius mortalitatis differentiae, quae a diversitate sexus originem ducit, siquidem non deficiant tabulae mortuales, quibus viri a foeminis sint distincti. Ut vero porro tabulas *Halleianas* adhibere possimus, solam illam mortalitatis diversitatem considerabimus, quae diversitati aetatis debetur, quod idem fecimus cum de matrimoniis inter coniuges communis aetatis egimus; sic tanto melius diversae matrimoniorum species inter se comparari poterunt.

§. 17. Superest ut modum ostendam, quo altera tabula similis illi, quam paragrapho sexto subiunxi, construi possit pro inaequali coniugum aetate; equidem quaevis utriusque aetatis differentia novum postulat calculum; sufficiet tamen per quinquennia ire, quia interpolationes status intermedios satis accurate explicabunt. Exemplum, quod nunc afferam, instar omnium erit.

Putemus nova iniri matrimonia inter quingentas virgines singulas viginti annos natas totidemque viros quadraginta annorum. Sic erit iterum $n = 500$; tum vero inquirendi veniunt numeri s et t post singulos elapsos annos sive numeri tam virorum quam foeminarum superstitum; uterque numerus facili admodum calculo invenitur ope secundae columnae tabulae nostrae paragrapho sexto annexae. Etenim numerus t obtinetur sumendo dimidium cuiusvis numeri in praefata columna secunda expressi; si deinde iste numerus dimidius multiplicetur per

1000/744, habebitur numerus s; ista autem multiplicatio ideo facienda est, quia numerus virorum primitivus supponitur = 500: atque sic formabitur columna secunda pro viris atque foeminis quovis anno superstitibus. His peractis formabitur columna tertia, quae matrimonia residua indicat, sumendo pro quovis anno quantitatem st/n. Denique quarta ac quinta columna, quae numerum viduorum ac viduarum indicant, construuntur subtrahendo numerum matrimoniorum residuorum a numero virorum vel a numero foeminarum superstitum. Numeros autem ultimos, ad quos tabula mortualis *Halleiana* non pertingit, quamvis per se nullius fere sint momenti, tamen addendos aliisque tabulis mortualibus superstruendos duxi.

I. Aetas annorum		II. Superſtites		III. Matrimon. reſidua	IV. Vidui	V. Viduae
Viri	Foemin.	Viri	Foem.			
40	20	500	500	500	0	0
41	21	490	495	485	5	10
42	22	479	490	470	9	20
43	23	468	485	455	13	30
44	24	457	480	439	18	41
45	25	446	474	423	23	51
46	26	435	468	408	27	60
47	27	424	462	393	31	69
48	28	413	456	377	36	79
49	29	401	450	361	40	89
50	30	389	444	345	44	99
51	31	377	437	330	47	107
52	32	365	430	314	51	116
53	33	353	424	299	54	125
54	34	341	417	283	58	134
55	35	328	409	268	60	141
56	36	316	402	254	62	148
57	37	304	394	241	63	153
58	38	293	387	228	65	159
59	39	282	379	215	67	164
60	40	271	372	202	69	170
61	41	260	364	190	70	174
62	42	249	357	178	71	179
63	43	238	349	166	72	183
64	44	227	340	154	73	186
65	45	216	332	143	73	189
66	46	205	323	132	73	191
67	47	194	315	122	72	193
68	48	183	307	112	71	195
69	49	171	298	102	69	196

I. Aetas annorum		II. Superſtites		III. Matrimon. reſidua	IV. Vidui	V. Viduae
Viri	Foemin.	Viri	Foem.			
70	50	159	289	92	67	197
71	51	147	280	82	65	198
72	52	135	270	72	63	198
73	53	123	261	64	59	197
74	54	111	252	55	56	197
75	55	99	244	48	51	196
76	56	88	235	41	47	194
77	57	77	227	35	42	192
78	58	66	218	29	37	189
79	59	56	210	24	32	186
80	60	46	202	19	27	183
81	61	38	193	15	23	178
82	62	31	185	11	20	174
83	63	26	177	9	17	168
84	64	22	169	7	15	162
85	65	16	160	5	11	155
86	66	12	152	4	8	148
87	67	9	143	3	6	140
88	68	6	135	2	4	133
89	69	3	127	1	2	126
90	70	2	118	0	2	118
91	71	2	109	0	2	109
92	72	1	100	0	1	100
93	73	1	91	0	1	91
94	74	0	82	0	0	82
95	75	0	74	0	0	74
96	76	0	66	0	0	66
97	77	0	58	0	0	58
98	78	0	48	0	0	48
99	79	0	41	0	0	41

§. 18. Usus huius alterius tabulae idem est qui praecedentis; quicquid igitur a paragrapho septimo usque ad finem paragraphi decimi quarti monuimus, id etiam, mutatis mutandis, pro praesenti matrimoniorum genere determinari poterit. Sic, verbi gratia, cum quaestionem formarem paragrapho nono, de determinando tempore, quo matrimoniorum, inter personas 20 annos natas, pars dimidia pereat, inveni tempus istud 22 annorum cum 4 mensibus atque dimidio; in praesenti matrimoniorum genere, quod fit inter mulieres 20 annos natas et maritos 40 annorum, tempus istud contrahitur ad 16 annos cum quatuor mensibus, quod ex sola inspectione columnae tertiae in posteriori tabula apparet. Si de matrimoniis inter foeminas 40 annorum et maritos 60 annorum similis fiat quaestio, eadem columna tertia indicat tunc superesse 202 matrimonia, eaque ad 101 reduci tempore 9 annorum cum uno mense. Atque sic nullo negotio tabella conficietur similis illi quam supra paragrapho nono apposui, quod monuisse sufficiat. Quoniam autem potissimum sermo est de duratione media matrimoniorum pro varia coniugum aetate, parum istud laboris non declinabo.

§. 19. Conficitur haec quaestio, cum mariti 20 annorum aetate superant uxores, eodem plane modo quo §. 11. usi sumus, cum aetas in utroque coniuge aequalis supponeretur. Sic pro aetate initiali 40 annorum in viris et 20 annorum in foeminis, erit summa accipienda columnae tertiae in tabula praecedente, quae fit $=9207$ haecque dividenda per numerum matrimoniorum initialem seu per 500; quotiens erit $18^{41}/_{100}$ anni vel proxime 18 ann. cum 5 mensibus; hinc detractis 6 mensibus, remanent 17 anni cum 11 mensibus pro duratione media quaesita.

Aetas annor.		Duratio media
Viri	Foem.	Matrimoniorum
40	20	17 anni 11 mens.
45	25	15 —— 8
50	30	13 —— 9
55	35	11 —— 11
60	40	10 —— 0
65	45	8 —— 1
70	50	6 —— 2
75	55	4 —— 10
80	60	3 —— 6
85	65	2 —— 6

Atque sic parvulam construxi tabellam appositam, quam nunc comparare licet cum simili tabella paragrapho undecimo adiuncta, ut sic discrimen, quod inter utrumque matrimoniorum genus, ratione eorum durationis quovis tempore insuper expectandae, intercedit, appareat. Haud exiguum est istud discrimen, maiusque futurum fuisset, si simul ratio habita fuisset auctae in viris mortalitatis atque adeo adhibitae fuissent tabulae mortuales, quibus uterque sexus ab invicem distinguitur superstitumque numerus de viris atque de foeminis seorsim indicatur.

§. 20. Lubet denique paucis comparationem inter utrumque matrimoniorum genus instituere; primum quo ambo coniuges eiusdem sunt aetatis, alterum quo maritus uxore viginti annis maior ponitur; atque sic de omni statu medio absque magno errore iudicium ferre poterunt qui novos calculos reformidant.

a) De diversa duratione media pro ambobus matrimoniorum generibus iam diximus. Ita verbi gratia, uxor 55 annorum viro eiusdem aetatis nupta non sine ratione sibi promittit matrimonii sui durationem altero tanto longiorem, quam si nupta fuerit viro 75 annorum.

b) Si duas fingamus civitates, quarum altera annuatim 500 matrimonia primi generis, altera totidem matrimonia secundi generis subministret, civitas prior numerabit 11917 matrimonia, altera non nisi 8958 (§. 13.) si modo utraque civitas in statu suo permanere ponatur. Loquimur autem de coniugiis ab utroque coniuge prima vice initis, quae utique maximum numerum constituunt.

c) Porro una eademque civitas, quae annuatim 500 matrimonia primi generis subministrare possit, non poterit ultra 372 coniugia secundi generis suppeditare, quia scilicet de 500 adolescentibus 20 annorum, non nisi 372 aetatem 40 annorum attingent. Sic quarta pars virginum vel caelibatum servare vel viduis nubere cogitur. Hinc ratio, quod multo plures vidui quam viduae iteratas nuptias ineant, etiamsi numerus priorum longe minor sit numero posteriorum.

d) Dicamus nunc quoque de personis viduatis utriusque sexus; inter has referimus omnes illas, quae semel viduitatem passae sunt, sive illam servent sive ad secundas nuptias recurrant. Vidimus autem . 14 quod pro 500 matrimoniis annuis primi generis sit summa omnium personarum, eo quem diximus modo, viduatarum $= 10350$, sive 5175 viduorum totidemque viduarum; at longe aliter res se habet si de matrimoniis secundi generis sermo sit. Etenim summa viduorum longe tunc minor sit quam summa viduarum, quandoquidem tabula nostra §. 17. tantum 2154 viduos indicat; at summa omnium numerorum columnae quintae est $= 7949$ isteque viduarum numerus etiamnum augendus est, ob viduas superstites post finem columnae, numero 197, quo facto sit numerus omnium viduarum $= 8146$. Ita quidem utrobique summa omnium personarum viduatarum propemodum eadem est; at si viduas cum viris viduis comparemus, videmus in altero casu numerum viduarum fere esse quadruplum numeri viduorum, cum in primo casu sint inter se aequales. Hoc igitur modo in civitate, ubi 500 matrimonia prioris generis annuatim celebrarentur, forent 11917 mariti, totidem uxores, 5175 vidui totidemque viduae omniumque summa 34184; verum si 500 matrimonia annua de secundo genere essent, tunc forent 9207 mariti, totidem uxores, 2154 vidui atque 8146 viduae summaque omnium 28714.

e) In civitate, quae ad statum permanentem reducta ponitur, si quotannis 500 matrimonia nova primi generis celebrentur, necesse est ut totidem matrimonia annuatim dissolvantur; morientur 250 mariti, qui totidem post se relinquent viduas, atque 250 uxores, quae totidem pariter viduos faciunt. Verum si 500 matrimonia annua de secundo genere fuerint, mors annuatim tollet 345 propemodum maritos, 155 uxores, 155 viduos et 345 viduas:

quia enim numerus virorum superstitum $= s$,

numerus foeminarum superstitum $= t$

et numerus matrimoniorum residuorum (§. 16.) $= \frac{st}{n}$

erit decrementum maritorum, ut numerus priorum ad numerum posteriorum, id est, ut s ad $\frac{st}{n}$

vel ut n ad t;

hinc decrementum maritorum exprimendum est per

$$\frac{-t\,ds}{n};$$

decrementum autem uxorum erit

$$= \frac{-s\,dt}{n},$$

unde numerus integer mortuorum maritorum

$$= -\int \frac{t\,ds}{n}$$

et numerus integer uxorum mortuarum

$$= -\int \frac{s\,dt}{n};$$

quia vero relatio generalis inter s et t non datur, nisi per numeros tabulae mortualis, praefatae integrationes fieri non possunt aliter quam per partes, atque sic inveni numeros quos modo exhibui.

Apparet igitur ex isto qualicunque specimine, multas esse in genere humano variationes atque vicissitudines, quae solo calculo accuratius et melius determinari possint, quam innumeris adhuc observationibus fieri potuit.

Disquisitiones analyticae de novo problemate coniecturali. Auctore Daniele Bernoulli.

Novi Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae. Bd. XIV – 1 p. 5–7. 1769 (1770)
III. 6* – St. 58*

Quod in novorum Commentariorum volumine XII, Illustr. Auctor huius dissertationis, attulerat insigne exemplum, quaestionis ad doctrinam probabilitatum pertinentis, ope solius calculi infinitesimalis solutae, id hac dissertatione uberius exponere et explicare constituit[1]. Quaestio autem, quam heic sibi pertractandam proposuit sequens est: Si ex duabus, tribus vel pluribus urnis, in quibus schedulae certo et aequali numero repositae ita sunt, ut unius cuiusvis urnae schedulae ab illis reliquarum urnarum peculiari distinguantur colore; unaquavis permutatione, una extrahatur schedula et in urnam ordine sequentem transponatur, sic ut, quae ex ultima urna extracta sit, in primam reponatur; dato permutationum secundam hanc legem factarum numero, determinare numerum schedularum cuiusvis coloris, probabiliter in quavis urna contentarum? Ut iam vera, quibus solutio huius-quaestionis innititur principia tanto evidentius explicare liceret, casum primo simplicissimum, quamvis in se satis obvium, Illustr. Auctori adferre placuit, eum scilicet, quo duae tantum eiusmodi proponuntur urnae, pro quo quidem casu postquam ex principiis doctrinae combinationum expressionem deduxit generalem numeri schedularum pro quovis permutationum numero, ostendit quem valorem, haec induat expressio, si non solum numerus factarum permutationum ponatur infinite magnus; sed etiam numerus schedularum permagnus fuerit et sic quidem pro infinito haberi possit. Hac facta suppositione valorem eiusdem expressionis calculo infinitesimali in subsidium vocato eruit, quo eundem plane obtinuit, quem antea ex regulis doctrinae combinationum deduxerat. Hac vero quoque constituta hypothesi, alia problemata, quae proprie ad doctrinam permutationum non pertinent, facilem admittunt solutionem, quemadmodum si duo supponantur vasa duobus canaliculis inter se communicantia, et duobus fluidis diversis impleta, quorum perpetua fiat transvasatio ex uno vase in alterum, et quaeratur quaenam certo tempore elapso fit lex permixtionis.

Deinde explicationem casus aliquanto difficilioris, quo tres proponuntur urnae adgressus est Illustr. Auctor, ostendit autem huius quaestionis solutionem eo reduci, ut investigetur lex permutationum pro schedulis, quae solae ab initio in prima urna repositae erant; inde enim reliquarum permutationes facili negotio

1 Cf. III. 4 – St. 55 p. 276 h.v. et III. 5 – St. 56 p. 290 h.v.

deduci possunt. Ex praeceptis igitur doctrinae combinationum, inventis expressionibus numerum schedularum albarum, in quavis urna contentarum explicantibus, insigni artificio analytico adhibito, explicavit quomodo his expressionibus alia forma induci queat, ut terminos contineant numero finitos, eosque omnes reales. Tum vero eandem hanc solutionem, ut pro casu priori fecerat, etiam ex principiis calculi infinitesimalis deduxit, quo ipso utriusque consensus egregie illustratur. Denique considerationes quasdam singulares superaddidit, ad illustrandam legem, quam hae permutationus sequuntur, ubi quidem observavit non solum totum systema ad statum permanentem vergere, quo omnes schedulae in singulis urnis aequaliter inter se sunt permixtae sed etiam infinitas fieri, ultra citraque hunc statum permanentem transitiones, antequam ad eum perveniatur.

Disquisitiones analyticae de novo problemate coniecturali.

Novi Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae. Bd. XIV – 1 p. 3–25. 1769 (1770).
III.6 - St.58

§. 1. Sint duae, tres, pluresve urnae, in quibus singulis schedulae certo et aequali numero repositae putentur, schedulae autem uniuscuiusvis urnae suo peculiari colore a schedulis reliquarum urnarum ab initio distinctae sint; tum porro schedulae successive, sorte tamen, permutentur hac lege ut quavis vice ex singulis urnis schedula una extrahatur, et deinde in urnam ordine sequentem translocetur, illa autem quae ex urna, ultimo loco posita, extracta sint, in primam reponatur; his ita positis datoque permutationum, praefato modo factarum, numero quaeritur numerus schedularum cuiusvis coloris quae probabiliter in quavis urna continebuntur, quoties autem extractio ex singulis urnis simul facta fuit, simulque eo, quo dixi, modo in urnam sequentem schedula quaevis transposita, integram istam operationem unius permutationis nomine indico. Tale est argumentum, quod nunc discutiendum mihi proposui; potuisset quidem generalius proponi, sumendo numeros schedularum primitivos in diversis urnis utcunque inaequales easque vel ab ipso initio qualitercunque permixtas, at aliquid concinnae brevitati dari posse putavi.

§. 2. Quamvis obvius sit calculus pro duabus urnis eum tamen ob nexum, quem habebit cum sequentibus, apponam: sint igitur in prima urna n schedulae albae totidemque nigrae, in urna altera, erit secundum notas combinationum atque probabilitatum regulas,

post primam permutationem, numerus schedularum albarum in prima urna residuarum $= n-1$, post secundam permutationem

$$= \frac{(n-1)(n-2)}{n} + 1,$$

post tertiam permutationem habebitur

$$\frac{(n-1)(n-2)^2}{nn} + \frac{n-2}{n} + 1;$$

post quartam

$$\frac{(n-1)(n-2)^3}{n^3} + \frac{(n-2)^2}{nn} + \frac{n-2}{n} + 1;$$

post quintam

$$\frac{(n-1)(n-2)^4}{n^4} + \frac{(n-2)^3}{n^3} + \frac{(n-2)^2}{nn} + \frac{n-2}{n} + 1;$$

et sic porro; inde colligitur, si generaliter numerus factarum permutationum fuerit r atque ponatur brevitatis gratia

$$\frac{n-2}{n}=m$$

fore numerum schedularum albarum in prima urna reliquarum

$$=\frac{1-m^{r-1}}{1-m}+(n-1)m^{r-1}=\frac{1}{2}n(1+m^r).$$

De hinc reliquarum schedularum distributio per se intelligitur.

§. 3. Quia m semper est unitate minor evanescit terminus m^r, si r sit numerus admodum magnus atque tunc sit numerus schedularum albarum in prima urna residuarum simpliciter $=\frac{1}{2}n$; status is est asymptotos, ad quem dum permutationes fiunt, magis magisque pervenitur, nisi fuerit n vel aequalis unitati vel binario; etenim si unica schedula alba urnae primae et unica nigra urnae alteri indita fuerit, sit $m=-1$ alternisque vicibus vel nulla vel una schedula alba in urna erit locata, quando quidem formula nostra abit in $\frac{1}{2}(1+(-1)^r)$; si vero fuerit $n=2$ sit $m=0$ formulaque indicat unitatem seu valorem medium sive probabilem inter singulos valores possibiles. Haec non urgebo; aliud est quod potissimum intendo nempe ut inquiratur quid futurum sit, cum ipse simul numerus schedularum permagnus est ita ut pro infinito veluti haberi possit, nec enim tum amplius numerus m^r negligi potest, nisi r sit veluti infinities maior vel ipso numero n. Hac facta suppositione incidimus in argumentum, quod solo calculo infinitesimali breviter expediri posse, nulla combinationum habita ratione, ostendi in Commentariorum volumine XII[1]. Igitur consensum utriusque methodi, ut novo argumento manifestarem, animum induxi, praesertim cum hanc eandem methodum infinitesimalem in sequentibus, quae magis erunt abstrusa; pariter adhibere constitui. Nunc in viam redeo.

§. 4. Quod si proinde numerus n pro infinito habeatur, erit $2/n$ pari iure veluti infinite parvus, quem vocabo α fietque $m=1-\alpha$; ergo formula nostra $\frac{1}{2}n(1+m^r)$ numerum schedularum albarum in prima urna residuarum exprimens dabit

$$\frac{1}{2}n\left(1+(1-\alpha)^r\right);$$

Est vero

$$(1-\alpha)^r=1-r\alpha+\frac{rr\alpha\alpha}{1.2.}-\frac{r^3\alpha^3}{1.2.3}+\frac{r^4\alpha^4}{1.2.3.4}-\text{etc.}$$

quae series aequalis est simpliciter

1 Cf. III.4 et 5 - St.55 et 56 p.276 et 290 h.v.

$$c^{-ra} \quad \text{vel} \quad = \frac{1}{c^{ra}} = \frac{1}{c^{\frac{2r}{n}}} \;;$$

ubi litera c denotat numerum, cuius logarithmus hyperbolicus unitas est, aut proxime numerum 2, 718. Igitur si numerus quaesitus schedularum albarum post r permutationes in prima urna residuarum indicetur per x, habebitur

$$x = \frac{1}{2} n \left(1 + \frac{1}{c^{\frac{2r}{n}}} \right).$$

§. 5. Iam vero quaeritur quemadmodum idem valor altera methodo inveniri queat, considerando nempe quantitates x et r tanquam, fluentes, quod utique fieri potest, quamdiu unitas pro valde parva respectu numeri schedularum in urna residuarum haberi potest. Hoc ita posito haud difficulter apparet fore

$$dx = \frac{-x}{n} dr + \frac{n-x}{n} dr,$$

ubi primum membrum debetur schedulae extractae; alterum immissae. Inde habetur

$$\frac{dx}{2x-n} = \frac{-dr}{n}$$

vel

$$\frac{1}{2} \log \frac{2x-n}{n} = \frac{-r}{n}$$

vel

$$\frac{2x-n}{-n} = c^{\frac{-2r}{n}},$$

unde protinus sit

$$x = \frac{1}{2} n \left(1 + \frac{1}{c^{\frac{2r}{n}}} \right),$$

plane ut antea habuimus.

§. 6. Sunt itaque huiuscemodi quaestiones solutu multo faciliores, cum numerus schedularum ceu infinitus haberi potest, quin fere totam suam indolem mutant et vix adhuc in censum probabilium referendae videntur, etiamsi solutionem alteram ex meris principiis artis coniectandi deduxerim; perspicuum enim est, posteriorem nostram solutionem plane eandem fore, si duo supponantur vasa duobus canaliculis inter se communicantia, per quos perpetua fiat transvasatio duorum fluidorum in ambobus vasis contentorum et protinus perfecte permiscibilium, sique ex permixtionis pro quovis temporis puncto quaeratur. Velim autem notetur numeros vel mediocriter magnos sine senibili errore pro infinitis haberi posse; fuerit, verbi gratia, $n=200$ et $r=100$, dabit formula paragraphi secundi numerum schedularum albarum in prima urna probabiliter reliquarum $=136\frac{3}{5}$, dum hypothesis infinitae magnitudinis exhibet $136\frac{2}{3}$. Imo potuissent numeri seligi multo minores.

§. 7. Faciem aliam Problema nostrum induit cum plures quam duas proponimus urnas, tres modo si fuerint, protinus in calculos incidimus satis perplexos; miratus sum novam adhibendi calculi indolem indeque iudicavi latius patere ac putaveram usum algorithmi infinitesimalis in huiuscemodi quaestionibus pertractandis. Prius vero quam ad examen de numero schedularum veluti infinito descendam, solutionem exponam generalem ex principiis usitatioribus deductam ut sic quisque perspiciat, si rem ulterius prosequi voluerit, viam quam debeat calcare.

§. 8. Sint igitur nunc tres urnae, quarum prima ab initio contineat n schedulus albas, altera totidem nigras, tertia autem totidem rubras, supponaturque post datum factarum permutationum numerum, superesse in prima urna A schedulas albas, simulque in urna secunda atque tertia numerum schedularum albarum esse B et C. Est autem perpetuo $\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C}=n$;
His ita positis quisque facile videbit fore post novam supervenientem permutationem numerum schedularum in prima, secunda atque tertia urna

$$\frac{(n-1)A+C}{n}; \quad \frac{(n-1)B+A}{n} \quad \text{atque} \quad \frac{(n-1)C+B}{n};$$

Cognita autem distributione schedularum albarum caetera omnia sua sponte innotescunt

erit nempe numerus schedularum nigrarum in urna prima	$=\mathrm{C}$;
in secunda	$=\mathrm{A}$;
in tertia	$=\mathrm{B}$
atque rubrarum in urna prima	$=\mathrm{B}$,
in urna secunda	$=\mathrm{C}$;
in tertia	$=\mathrm{A}$;

Igitur de sola distributione albarum inquiram. Quia vero, ut vidimus, status sequens ex dato praecedente cognoscitur, statusque initialis datus est, omnis variatio ab initio usque ad quamvis factam permutationem intelligitur. Tabulam adiicio, qua progressio terminorum magis elucescit.

Numerus permutationum.	Numerus ſchedularum albarum, quae probabiliter erunt in vrna. Prima	Secunda	Tertia
0.	n.	0.	0
1.	$n-1$	1.	0
2.	$\frac{(n-1)^2}{n}$	$\frac{2(n-1)}{n}$	$\frac{1}{n}$
3.	$\frac{(n-1)^3+1}{nn}$	$\frac{3(n-1)^2}{nn}$	$\frac{3(n-1)}{nn}$
4.	$\frac{(n-1)^4+4(n-1)}{n^3}$	$\frac{4(n-1)^3+1}{n^3}$	$\frac{6(n-1)^2}{n^3}$
5.	$\frac{(n-1)^5+10(n-1)^2}{n^4}$	$\frac{5(n-1)^4+5(n-1)}{n^4}$	$\frac{10(n-1)^3+1}{n^4}$
6.	$\frac{(n-1)^6+20(n-1)^3+1}{n^5}$	$\frac{6(n-1)^5+15(n-1)^2}{n^5}$	$\frac{15(n-1)^4+6(n-1)}{n^5}$
7.	$\frac{(n-1)^7+35(n-1)^4+7(n-1)}{n^6}$	$\frac{7(n-1)^6+35(n-1)^3+1}{n^6}$	$\frac{21(n-1)^5+21(n-1)^2}{n^6}$
8.	$\frac{(n-1)^8+56(n-1)^5+28(n-1)^2}{n^7}$	$\frac{8(n-1)^7+70(n-1)^4+8(n-1)}{n^7}$	$\frac{28(n-1)^6+56(n-1)^3+1}{n^7}$
9.	$\frac{(n-1)^9+84(n-1)^6+84(n-1)^3+1}{n^8}$	$\frac{9(n-1)^8+126(n-1)^5+36(n-1)^2}{n^8}$	$\frac{36(n-1)^7+126(n-1)^4+9(n-1)}{n^8}$
	etc.	etc.	etc.

§. 9. Quicunque animum ad praemissam tabellam attenderit, hic facile perspiciet legem progressionis, quae talis est. Indicetur numerus factarum permutationum generaliter littera r, assumaturque binomium cuius alterum membrum sit n − 1 alterum 1, istudque binomium elevetur ad dignitatem r, sic ut habeatur

$$((n-1)+1)^r;$$

convertatur dein haec quantitas in seriem:

$$(n-1)^r + r(n-1)^{r-1} + \frac{r.r-1}{1.2}(n-1)^{r-2} + \frac{r.r-1.r-2}{1.2.3}(n-1)^{r-3} \ldots\ldots + 1.$$

In ista serie, quam vocabo, generatrice addantur primus, quartus, septimus etc. terminus, eorumque summa dividatur per n^{r-1}, sicque habebitur numerus schedularum in prima urna. Deinde si addantur secundus, quintus, octavus etc. terminus summaque pariter dividatur per n^{r-1} habebitur numerus schedularum albarum in urna secunda. Denique summa tertii, sexti, noni etc. termini divisa per n^{r-1} dabit numerum schedularum albarum in tertia urna. Unde per se liquet, numerum omnium schedularum albarum, vi huius constructionis, esse constanter $= n$, prouti natura rei postulat.

§. 10. Res eo, quo mihi observatae fuerunt ordine profero; Iam vero facile intelligere potui ex praecedente paragrapho, quotcunque fuerint urnae, praefatam seriem generatricem semper eandem permanere, primum autem eius terminum pertinere ad primam urnam, secundum terminum ad secundam urnam, tertium ad tertiam et sic porro donec perventum fuerit ad urnam ultimam, tumque terminos sequentes eodem ordine iterum tribuendos esse urnae primae, secundae etc. donec secunda periodus finita fuerit, quo facta tertia incipit periodus incipiendo iterum ab urna prima et sic deinceps, usque dum omnes seriei termini fuerint exhausti. Erunt porro singuli termini dividendi per n^{r-1}; hoc facto indicabit summa omnium terminorum ad eandem urnam pertinentium numerum omnium schedularum albarum in ista urna contentarum. Et haec est solutio generalis problematis nostri paragrapho primo expositi.

§. 11. Videamus nunc an ista solutio generalis consentiat cum solutione, quam dedimus pro duabus urnis in fine §. 2. ubi vidimus esse numerum schedularum albarum in prima urna contentarum

$$= \frac{1}{2} n (1+m^r)$$

vel

$$= \frac{1}{2} n \left(1+ \left(\frac{n-2}{n}\right)^r\right),$$

nam ibi brevitatis gratia posueramus $m = \dfrac{n-2}{n}$;

Praesens vero solutio generalis dat numerum schedularum albarum in prima urna

$$= \frac{(n-1)^r}{n^{r-1}} + \frac{r.(r-1)(n-1)^{r-2}}{1.2.n^{r-1}} + \frac{r.(r-1)(r-2)(r-3)(n-1)^{r-4}}{1.2.3.4.n^{r-1}} + \text{etc.}$$

oportet igitur ut praefata series indefinita sit aequalis

$$\frac{1}{2} n \left(1+ \left(\frac{n-2}{n}\right)^r\right),$$

ut ista aequalitas appareat, considerabimus praefatam quantitatem sub hac altera forma

$$\frac{1}{2} n \left(\left(\frac{(n-1)-1}{n}\right)^r + 1\right)$$

sive

$$\frac{((n-1)-1)^r + ((n-1)+1)^r}{2n^{r-1}};$$

Nunc vero si ambo numeratoris binomia in seriem indefinitam convertantur fiet ut termini plane iidem alternatim vel duplicentur vel destruantur sicque ipsissimam solutionis generalis formam exhibeant. At pro casu hoc particulari praeferenda utique est expressio paragraphi secundi ceu longe compendiosior.

Si unica consideraretur urna, permaneret utique in illa idem constanter numerus schedularum albarum, quod ipsum pariter solutio generalis indicat.

§. 12. Iam propius ad id accedo, quod potissimum constitutum habebam nempe ut pro tribus urnis ostenderem quemadmodum istud negotium ope calculi infinitesimalis confici possit, si quamplurimae sint schedulae saepiusque permutationes fuerint repetitae ita ut numeri n et r veluti infiniti censeri possint, cuiusmodi examen fecimus pro duabus urnis §. §. 4 et 5, hanc disquisitionem utraque methodo, analysi nempe communi atque infinitesimali faciam, ut rursus consensus inter utrumque elucescat.

Si statim sermo sit de urna prima, habebimus, vi paragraphi noni, numerum schedularum albarum in illa contentarum, mutata tantisper forma neglectisque terminis negligendis ita expressum[2],

$$n.\left(1-\frac{1}{n}\right)^r\left(1+\frac{r^3}{1.2.3\,n^3}+\frac{r^6}{1.2.3.4.5.6\,n^6}+\text{etc.}\right).$$

Est vero per paragraphum quartum quantitas

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^r=\frac{1}{c^{\frac{r}{n}}}\ ,$$

quae proin quantitas substitui potest; postmodum pari methodo definiri potest numerus schedularum albarum in urna secunda ac denique in tertia, hoc modo invenimus numerum schedularum albarum.

In urna I.

$$=\frac{n}{c^{\frac{r}{n}}}\left(1+\frac{r^3}{1.2.3\,n^3}+\frac{r^6}{1.2.3.4.5.6\,n^6}+\text{etc.}\right).$$

In urna II.

$$=\frac{n}{c^{\frac{r}{n}}}\left(\frac{r}{n}+\frac{r^4}{1.2.3.4.\,n^4}+\frac{r^7}{1.2.3.4.5.6.7\,n^7}+\text{etc.}\right).$$

In urna III.

$$=\frac{n}{c^{\frac{r}{n}}}\left(\frac{rr}{1.2.\,nn}+\frac{r^5}{1.2.3.4.5\,n^5}+\frac{r^8}{1.2.3.4.5.6.7.8\,n^8}+\text{etc.}\right).$$

2 $n.$ corr. de $n,$ (A.dB.)

Hic superest ut et in hisce formulis factorem posteriorem, serie infinita expressum, ad quantitatem terminis finitis circumscriptam reducere tentemus qua quidem in re non memini, quid ab aliis iam praestitum fuerit; quicquid id sit, haud abs re mea fore puto, si omnia simul conspectui exponam.

§. 13. Incipiam a prima serie infinita

$$1+\frac{r^3}{1.2.3\,n^3}+\frac{r^6}{1.2.3.4.5.6\,n^6}+\text{etc.}$$

cuius summa S quaeritur, atque sic habebimus.

$$1+\frac{r^3}{1.2.3\,n^3}+\frac{r^6}{1.2.3.4.5.6\,n^6}+\text{etc.}=\mathrm{S}$$

Huius aequationis sumatur differentiale tertii ordinis ponendo elementum dr constans et considerando quantitatem r tanquam fluentem; sic recurremus ad ipsam seriem propositam, multiplicatam per $\frac{dr^3}{n^3}$, proindeque habebimus.

$$\frac{S\,dr^3}{n^3}=d^3 S\,.$$

Completa huius aequationis integratio necessario tres continebit quantitates constantes, equidem facile apparet assumi posse aequationem

$$S=a\,c^{\frac{mr}{n}},$$

si ponatur $m^3=1$:
habebit sic m tres radices, nempe $m=1$;
$m=(-1+\sqrt{-3})\colon 2$
et $m=(-1-\sqrt{-3})\colon 2$,
qua propter nunc assumere possumus aequationem

$$S=\alpha\,c^{\frac{r}{n}}+\beta\,c^{(-1+\sqrt{-3})\frac{r}{2n}}+\gamma\,c^{(-1-\sqrt{-3})\frac{r}{2n}},$$

quae sic tribus gaudet quantitatibus constantibus arbitrariis α, β et γ, quarum ope singulis circumstantiis satisfieri potest, quae in eo consistunt, quod numerus schedularum initialis in quavis urna arbitrarius est, si quaestio generalissima proponatur; unde liquet argumentum nostrum, si vel decem ponerentur urnae non nisi aequatione differentiali decimi ordinis recte explicari posse, quae tamen semper integram admittet integrationem. Notum autem est, quantitates exponentiales imaginarias in sinus et cosinus converti posse; est scilicet

$$c^{\frac{r\sqrt{-3}}{2n}} = \sin.\frac{r\sqrt{3}}{2n} \quad \text{et} \quad c^{\frac{-r\sqrt{-3}}{2n}} = \cos.\frac{r\sqrt{3}}{2n}$$

atque his factis substitutionibus obtinebimus aequationem meris terminis realibus expressam, nempe

$$S = \alpha\, c^{\frac{r}{n}} + \beta\, c^{\frac{-r}{2n}} \sin.\frac{r\sqrt{3}}{2n} + \gamma\, c^{\frac{-r}{2n}} \cos.\frac{r\sqrt{3}}{2n}.$$

Iam aliud non superest quam ut determinentur quantitates constantes α, β et γ; id vero exinde petendum est, quod facto $r=0$ fieri debeat $\mathrm{S}=1$, $d\mathrm{S}=0$, atque $dd\mathrm{S}=0$ hinc sequitur esse $\alpha+\gamma=1$; deinde

$$\frac{\alpha}{n} + \frac{\beta\sqrt{3}}{2n} - \frac{\gamma}{2n} = 0$$

atque

$$\frac{\alpha}{nn} - \frac{\beta\sqrt{3}}{2nn} - \frac{\gamma}{2nn} = 0.$$

Ex hisce aequationibus deducitur esse $\alpha = 1/3$; $\beta = 0$ et $\gamma = 2/3$, sicque sit

$$\mathrm{S} = \frac{1}{3} c^{\frac{r}{n}} + \frac{2}{3} c^{\frac{-r}{2n}} \operatorname{cosin.} \frac{r\sqrt{3}}{2n}.$$

Atque iste valor, terminis finitis simulque realibus expressus, potest substitui seriei in infinitum continuatae

$$1 + \frac{r^3}{1.2.3.n^3} + \frac{r^6}{1.2.3.4.5.6.n^6} + \text{etc.}$$

sit verbi gratia

$$\frac{r\sqrt{3}}{2n} = \text{quadranti circuli cuius radium unitas exprimit} = \pi = \text{proxime } \frac{11}{7},$$

fiet

$$\mathrm{S} = \frac{1}{3} c^{\frac{2\pi}{\sqrt{3}}}.$$

Haec ad urnam primam.

Simili plane modo determinatur valor seriei secundae quae pertinet ad urnam secundam; iste quippe valor eadem exprimitur aequatione generali cum hoc solo discrimine quod coefficientes α, β et γ nunc alium acquirunt valorem, quandoquidem facto $r=0$ fieri debet ista secunda series $=0$ sive, si series indicetur per S′, oportet sit $S'=0$; tum

$$\frac{dS'}{dr}=\frac{1}{n} \quad \text{atque} \quad \frac{ddS'}{dr^2}=0,$$

unde

$$\alpha+\gamma=0;$$

$$\alpha+\frac{1}{2}\beta\sqrt{3}-\frac{1}{2}\gamma=1$$

et

$$\alpha-\frac{1}{2}\beta\sqrt{3}-\frac{1}{2}\gamma=0$$

atque sic fit

$$\alpha=\frac{1}{3}; \qquad \beta=\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{et} \quad \gamma=-\frac{1}{3};$$

Igitur

$$S'=\frac{1}{3}c^{\frac{r}{n}}+\frac{1}{\sqrt{3}}c^{\frac{-r}{2n}}\sin.\frac{r\sqrt{3}}{2n}-\frac{1}{3}c^{\frac{-r}{2n}}\cos.\frac{r\sqrt{3}}{2n}.$$

Denique si summam seriei ad tertiam urnam pertinentis indicemus per S″, reperiemus pauculis mutatis iisque, plane obviis.

$$S''=\frac{1}{3}c^{\frac{r}{n}}-\frac{1}{\sqrt{3}}c^{\frac{-r}{2n}}\sin.\frac{r\sqrt{3}}{2n}-\frac{1}{3}c^{\frac{-r}{2n}}\cos.\frac{r\sqrt{3}}{2n}.$$

§. 14. Quod si nunc in paragrapho 12. inventos modo valores loco serierum substituamus inveniemus numerum schedularum albarum pro singulis urnis, nempe In urna prima

$$=\frac{1}{3}n+\frac{2}{3}n\cdot c^{\frac{-3r}{2n}}\cdot\cos.\frac{r\sqrt{3}}{2n}$$

In urna secunda

$$=\frac{1}{3}n+\frac{n}{\sqrt{3}}\cdot c^{\frac{-3r}{2n}}\cdot\text{Sin.}\frac{r\sqrt{3}}{2n}-\frac{n}{3}\cdot c^{\frac{-3r}{2n}}\cdot\text{Cos.}\frac{r\sqrt{3}}{2n}$$

In urna tertia

$$=\frac{1}{3}n-\frac{n}{\sqrt{3}}\cdot c^{\frac{-3r}{2n}}\cdot\mathrm{Sin.}\frac{r\sqrt{3}}{2n}-\frac{n}{3}c^{\frac{-3r}{2n}}\cdot\mathrm{Cos.}\frac{r\sqrt{3}}{2n}\,.$$

Deinde schedulae nigrae se habebunt in urna secunda, tertia atque prima simulque schedulae rubrae in urna tertia prima et secunda, quemadmodum schedulae albae se habent in urna prima, secunda et tertia, sic ut omnes et singulae schedularum distributiones in singulis urnis, secundum regulas probabilitatis nunc sint exacte determinatae pro hypothesi quod numeri n et r ita sint magni, ut veluti pro infinitis haberi queant. Istaque omnia terminis finitis exprimuntur, quae antea non aliter quam per series indefinitas determinari poterant. Notetur porro velim, omnia et singula ex principiis artis coniectandi communi analysi fuisse deducta; etenim quae §. 13. dicta sunt non tam ob rem ipsam, quam in gratiam calculi commodioris maiorisque concinnitatis exposui, tum etiam ut notabili ostenderem exemplo insignem consensum inter methodos communes et novam methodum, quem iam passim pro huiuscemodi quaestionibus adhibui solis calculis infinitesimalibus usus: fateor equidem et novam istam methodum suas habere spinas tricasque; at, ni fallor, tanto melius scopo nostro respondebit suaque praestantia simul ac novitate erit commendabilis. Caeterum ipsa ista methodus requirit ut numeri n et r permagni sint, quod idem in postremis tribus paragraphis usque supposuimus.

§. 15. Sit itaque, retentis denominationibus caeteris, numerus schedularum albarum in urna prima $=x$
et in urna secunda $=y$;
sic erit numerus iste pro urna tertia $=n-x-y$;
si nunc quantitates x, y, et r tanquam fluentes consideremus, erit

$$dx=\frac{-x}{n}dr+\frac{n-x-y}{n}dr,$$

ubi prius membrum debetur extractioni ex urna prima, alterum transportationi ex urna tertia in primam; unde

$$dr=\frac{n\,dx}{n-2x-y};$$

similiter erit

$$dy=-\frac{y\,dr}{n}+\frac{x\,dr}{n}$$

vel

$$dr=\frac{n\,dy}{x-y},$$

unde

$$\frac{dx}{n-2x-y}=\frac{dy}{x-y}$$

vel

$$x\,dx-y\,dx=n\,dy-2x\,dy-y\,dy;$$

haec aequatio paullo fiet simplicior si ponatur $x=\frac{1}{3}n+p$

et $y=\frac{1}{3}n-q,$

sic enim fit

$$2p\,dq-q\,dq=p\,dp+q\,dp.$$

Haec aequatio ob permixtionem indeterminatarum, cum nondum integrari possit, ponam $q=tp$

atque $dq=t\,dp+p\,dt;$

sic fiet, si calculus recte ponatur

$$\frac{dp}{p}=\frac{t-2}{t-tt-1}\,dt,$$

quae posterior aequatio ita est integranda, ut ab initio sit $x=n$ et $y=0$, vel ut sit $p=\frac{2}{3}n$ et $t=\frac{1}{2}$; integrata autem aequatione habebitur relatio inter p et t, indeque deducetur relatio inter x et y ita ut y per x determinari queat, quo demum facto recurrendum erit ad aequationem elementarem

$$dr=\frac{n\,dy}{x-y}$$

eiusque integratio tentanda, ut sic habeatur relatio inter r et x. At vero ista methodus, quae prima se offert, fit nimium complexa atque plane inutilis; igitur aliam viam inire coactus rem ita sum aggressus.

Supra obtinuimus

$$\frac{dp}{p}=\frac{t-2}{t-tt-1}\,dt$$

una cum hac altera aequatione

$$\frac{dr}{n}=\frac{dy}{x-y},$$

quae factis congruenter substitutionibus, quas assumsimus, dat

$$\frac{dr}{n}=\frac{dt}{t-tt-1};$$

utraque aequatio iam integrari potest atque sic determinari valor quantitatis p aeque ac valor quantitatis t per functiones quantitatis r; totum negotium commodissime sic absolvetur.

Ponatur $t=s+\frac{1}{2}$ tuncque obtinebitur

$$\frac{dp}{p}=\frac{\frac{3}{2}ds}{ss+\frac{3}{4}}-\frac{sds}{ss+\frac{3}{4}}$$

simulque

$$\frac{dr}{n}=\frac{-ds}{ss+\frac{3}{4}};$$

Hinc

$$\frac{dp}{p}=-\frac{3dr}{2n}-\frac{sds}{ss+\frac{3}{4}},$$

cuius integralis est

$$\log.\frac{p}{\frac{2}{3}n}=-\frac{3r}{2n}-\frac{1}{2}\log.\frac{ss+\frac{}{4}}{\frac{3}{4}}$$

vel

$$p=\frac{2nc^{\frac{-3r}{2n}}}{3\sqrt{\left(1+\frac{4}{3}ss\right)}}.$$

Porro aequatio

$$\frac{dr}{n}=\frac{-ds}{ss+\frac{3}{4}}$$

dat

$$\frac{r}{n}=\frac{2}{\sqrt{3}}\text{arc. tang.}\frac{-2s}{\sqrt{3}}$$

sive

$$\frac{r}{n}=\frac{2}{\sqrt{3}}\text{arc. secant.}\sqrt{1+\frac{4}{3}ss},$$

quae si invertatur, dat

$$\sqrt{\left(1+\frac{4}{3}ss\right)}=\text{secant. arc.}\frac{r\sqrt{3}}{2n};$$

substituatur iste valor atque sic habebitur

$$p=\frac{2nc^{\frac{-3r}{2n}}}{3\,\text{secant. arc.}\frac{r\sqrt{3}}{2n}} \quad \text{sive} \quad p=\frac{2n\cos.\text{arc.}\frac{r\sqrt{3}}{2n}}{3c^{\frac{3r}{2n}}}.$$

Cum vero fuerit

$$\frac{r}{n}=\frac{2}{\sqrt{3}}\,\text{arc. tang.}-\frac{2s}{\sqrt{3}},$$

erit

$$-\frac{2s}{\sqrt{3}}=\text{tang. arc.}\frac{r\sqrt{3}}{2n}$$

sive

$$s=t-\frac{1}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\,\text{tang. arc.}\frac{r\sqrt{3}}{2n},$$

unde

$$t=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\,\text{tang. arc.}\frac{r\sqrt{3}}{2n}$$

sive

$$t=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}\times\sin.\frac{r\sqrt{3}}{2n}}{2\cos.\frac{r\sqrt{3}}{2n}}.$$

Quia denique posuimus supra $x=\frac{1}{3}n+p$

et $y=\frac{1}{3}n-q=\frac{1}{3}n-tp,$

oportebit valores inventos quantitatum p et t substituere, sicque inveniemus numeros quaesitos x et y, qui denotant numeros schedularum albarum in urna prima atque secunda contentarum, qui ambo si a numero n subtrahantur habebitur numerus schedularum albarum in urna tertia. His omnibus ita factis, obtinemus numerum schedularum albarum

In urna prima

$$=\frac{1}{3}n+\frac{2}{3}n\cdot c^{\frac{-3r}{2n}}\cdot\text{Cos. arc.}\frac{r\sqrt{3}}{2n}$$

In urna secunda

$$=\frac{1}{3}n+\frac{n}{\sqrt{3}}\cdot c^{\frac{-3r}{2n}}\cdot \text{Sin. arc.}\frac{r\sqrt{3}}{2n}-\frac{n}{3}\cdot c^{\frac{-3r}{2n}}\cdot \text{Cos. arc.}\frac{r\sqrt{3}}{2n}$$

In urna tertia

$$=\frac{1}{3}n-\frac{n}{\sqrt{3}}\cdot c^{\frac{-3r}{2n}}\cdot \text{Sin. arc.}\frac{r\sqrt{3}}{2n}-\frac{n}{3}\cdot c^{\frac{-3r}{2n}}\cdot \text{Cos. arc.}\frac{r\sqrt{3}}{2n}\cdot$$

Atque istae formulae plane sunt eaedem cum iis quas §. 14. exposuimus, nec id tantum valore suo sed et ipsa expressione; notabilis mihi visus est consensus novam inter methodum meam alteramque principiis familiaribus superinstructam.

§. 16. Paucula superaddam de argumenti proprietatibus; et primo quidem statim apparet totum systema vergere in statum permanentem eumque asymptoton, quem demum post permutationes numero infinitas attingat; tum vero schedulae omnes singulis in urnis aequis partibus sunt permixtae; nec id providere difficile erat; verum modus quo continue fit ad statum permanentem accessus, mihi plane fuit improvisus; scilicet suspicabar fore ut numerus schedularum albarum in urna prima indefinenter decresceret, in secunda et tertia vicissim incresceret; nunc autem video infinitas fieri in quavis urna ultra citraque statum, qui permanens erit, transitiones variationesque motu undulatorio continuo descrescente, diminui tandemque evanescere. Notari autem merentur formulae analyticae quibus huiuscemodi accessus recessusque eorundemque perpetuae diminutiones indicantur: accessus recessusque naturam sequuntur sinuum atque cosinuum eorumque diminutiones debentur communi factori exponentiali $c^{-3r/2n}$. Huiusmodi autem expressiones in variis quaestionibus physico-mechanicis, vel saltem similes, aliquoties me obtinuisse memini. Inquiramus nunc in Casus praecipuos.

§. 17. Considerabimus primo omnes illos Casus quibus

$$\text{Cos. arc.}\frac{r\sqrt{3}}{2n}=0,$$

id est, quibus $\frac{r\sqrt{3}}{2n}$ est vel aequalis quadranti circuli, cuius radius unitas est, vel triplo aut quintuplo aut septuplo etc. quadranti. Sit scilicet quadrans istius circuli $=q$

faciamusque $\frac{r\sqrt{3}}{2n}=q$

vel $=3q$

vel $=5q$

vel $=7q$ etc.

adeoque successive $\frac{r}{n}=\frac{2q}{\sqrt{3}}$

sive $=\frac{6q}{\sqrt{3}}$

sive $=\frac{10q}{\sqrt{3}}$

sive $=\frac{14q}{\sqrt{3}}$ etc.

In omnibus istis casibus, numero infinitis, fit

$$\text{Cos. arc.}\frac{r\sqrt{3}}{2n}=0$$

et

$$\text{Sin. Arc.}\frac{r\sqrt{3}}{2n}=1$$

adeoque numerus schedularum albarum in prima urna $=\frac{1}{3}n$; verum in urna secunda erit numerus iste successive

$$=\frac{1}{3}n+\frac{n}{\sqrt{3}}c^{-q\sqrt{3}}$$

vel

$$\frac{1}{3}n+\frac{n}{\sqrt{3}}c^{-3q\sqrt{3}}$$

vel

$$\frac{1}{3}n+\frac{n}{\sqrt{3}}c^{-5q\sqrt{3}}$$

vel

$$\frac{1}{3}n+\frac{n}{\sqrt{3}}c^{-7q\sqrt{3}} \quad \text{etc.}$$

Denique si omnes istas quantitates exponentiales accipiamus negative habebimus successive numeros schedularum albarum in urna tertia. Sit, verbi gratia, $n=3000$ ponamusque $q=11/7$ et $c=2{,}718$, erit post primas 5443 permutationes numerus schedularum albarum in urna prima $=1000$, in urna secunda $=1146$ et in urna tertia $=854$; tum si 10886 novae superveniant permutationes, consimiles numeri fient 1000, 1001, et 999. Igitur iam omnia ad statum permanentem erunt proxime reducta. Exinde apparet, qui fiat ut status permanens non sit, etiamsi numerus schedularum albarum in urna prima fuerit ad trientem reductus; etenim cum prima vice id evenit, erit numerus schedularum nigrarum in eadem urna prima $=854$ et numerus schedularum rubrarum $=1146$, igitur status permanens esse nequit.

§. 18. Quod si nunc scire cupiamus numerum permutationum r, post quem numerus schedularum albarum prima vice in secunda urna fuerit ad trientem reductus, oportebit ambos terminos

$$\frac{n}{\sqrt{3}}\cdot c^{\frac{-3r}{2n}}\cdot \text{Sin. arc.}\frac{r\sqrt{3}}{2n}-\frac{n}{3}\cdot c^{\frac{-3r}{2n}}\cdot \text{Cos. arc.}\frac{r\sqrt{3}}{2n}\ \text{facere}=0,$$

haec autem conditio obtinetur cum sit

$$\text{arc.}\frac{r\sqrt{3}}{2n}=\frac{1}{3}q$$

sive

$$\frac{r}{n}=\frac{2q}{3\sqrt{3}},$$

qui numerus tertiam tantum partem efficit eius qui pro urna prima requirebatur; est enim inter 1814 et 1815. Simili modo haec quaestio determinatur pro tertia urna, ubi nunc erit

$$\frac{r}{n}=\frac{10q}{3\sqrt{3}}$$

sive quinquies maior quam pro urna secunda adeoque $r=$ proxime 9072.

Quoties autem numerus schedularum albarum sit $=\frac{1}{3}n$, in quacunque urna id contingat, tum ab isto valore iterum recedit modo in unam modo in alteram partem postmodumque iterum accedit hique recessus alicubi maximi fiunt pro quavis periodo; post primam tamen periodum tantum non toti evanescunt.

§. 19. Denique inquiramus, quisnam futurus sit secundum leges probabilitatum, pro quavis urna minimus maximusve schedularum cuiusvis coloris numerus, qui unquam praesumi debeat et quotnam permutationes requirantur ut eo perveniatur. Incipiam a schedulis albis in urna prima: duo autem sunt modi, quibus maxima ista vel minima definiri possunt; alter in hoc positus est, ut differentiale numeri schedularum fiat $=0$, alter ut numerus iste in urna prima fiat aequalis numero in urna tertia, tunc enim extractio ex urna prima sit aequalis transpositioni ex urna tertia in primam uterque modus eodem recidit, quod ipsum formulas nostras tanto magis confirmat. Sic intelligimus fore

$$\text{Cos. arc.}\frac{r\sqrt{3}}{2n} = \frac{-1}{\sqrt{3}}\,\text{Sin. arc.}\frac{r\sqrt{3}}{2n}$$

vel

$$\text{tang. arc.}\frac{r\sqrt{3}}{2n} = -\sqrt{3}\,;$$

quoties huic satisfit conditioni, satisfieri autem potest modis infinitis, obtinetur minimum aliquod maximumve, primum autem erit inter minima minimum. At tangens $-\sqrt{3}$ indicat arcum 120°, est igitur

$$\frac{r\sqrt{3}}{2n} = \frac{4}{3}q$$

sive

$$\frac{r}{n} = \frac{8}{3\sqrt{3}}q,$$

hinc $r = 7257$; ergo post 7257 permutationes numerus schedularum albarum in urna prima sit, quantum unquam fieri potest, minimus descenditque a numero initiali 3000 ad 953, tumque iterum increscit sed parum ultra 1000 rursusque decrescit sed vix infra 1000 descendit; quoniam autem in his casibus numeri schedularum albarum in urna prima et tertia iidem sunt, habebimus pariter post 7257 permutationes in urna tertia 953 schedulas albas adeoque in urna secunda 1094. Sic post easdem 7257 permutationes erunt in urna secunda 953 schedulae nigrae, in tertia 1094 et in prima rursus 953; denique erunt simul in urna tertia 953 schedulae rubrae, in prima 1094 et in secunda 953; hoc modo singulae schedulae pro quavis urna determinantur pro casu quo schedulae albae in urna prima ad minimum fuerint reductae numerum.

§. 20. Sed et porro calculo nostro subiiciamus, ad quem numerum maximum assurgere possint schedulae albae in urna secunda atque tertia et quot permutationes requirantur ut id eveniat. Patet autem pro urna secunda satisfaciendum esse huic aequationi

$$\text{Cos. arc.}\frac{r\sqrt{3}}{2n} = \frac{1}{\sqrt{3}}\,\text{Sin. arc.}\frac{r\sqrt{3}}{2n},$$

sive

$$\text{tang. arc.}\frac{r\sqrt{3}}{2n} = \sqrt{3}\,;$$

hinc

$$\frac{r\sqrt{3}}{2n} = \frac{2}{3}q$$

aut

$$\frac{r}{n} = \frac{4q}{3\sqrt{3}} = 1{,}210\,;$$

hinc $r=3630$ tuncque fit numerus schedularum albarum in urna secunda $=1163$, qui proin numerus maximus est, ad quem schedulae albae in urna secunda assurgere possunt idque obtinetur post 3630 permutationes eoque tempore urna prima pariter continebit 1163 schedulas albas, tertia vero urna nonnisi 674. Denique numerus schedularum albarum maximus sit in urna tertia, quando ponitur

$$\frac{r\sqrt{3}}{2n} = 2q$$

sive $r=10890$ atque tunc numerus iste sit 1004 qui simul valet pro urna secunda.

Quae momenta praecipua pro schedulis albis allata sunt, haec sola transpositione urnarum ad schedulas nigras rubrasque applicari poterunt. Tenue erat per se argumentum variis tamen, ni fallor, titulis utile, potissimum autem scopo quem habui, accommodum.

Mensura sortis ad fortuitam successionem rerum naturaliter contigentium applicata. Auct. Daniele Bernoulli

Novi Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae. Bd. XIV – 1 p. 8–9. 1769 (1770)
III.7a* - St.59a*

Inter singulares naturae leges, quas tabulae anthropologicae offerunt, praecipue attentionem meretur illa, quae proportionem concernit, qua nati in utrumque dividuntur sexum, et quemadmodum in genere quidem constet prolem masculam praevalere, ita difficulter determinari potest, utrum hoc merae sorti adscribendum sit, an vero natura ad procreationem prolis masculae aliquanto proclivior sit quam ad eam sexus foeminini? Hanc autem quaestionem optime dirimi posse existimat Illustr: huius dissertationis Auctor, si inquiratur in leges probabilitatis, quae pro utraque hypothesi locum inventurae sint, atque hac quidem occasione eas, quae pro prima hypothesi, qua natura ad utriusque sexus procreationem aeque proclivis assumitur, locum obtinent, exponere constituit.

Tradita igitur primum formula generali, qua probabilitas pro quocunque puerorum numero dato exprimitur, ostendit maximam probabilitatem adesse, dum infantum utriusque sexus idem est numerus, ipsam vero a medio recedendo decrescere et pro aequalibus a medio distantiis eandem esse; deinde quo maior sit numerus partuum, tanto difficilius contingere ut in utrumque sexum aequaliter distribuatur, eo tamen non obstante inaequalitatem per numerum partuum divisam semper decrescere. Insignis autem et maxime memoratu digna est lex, quam natura pro decremento probabilitatis, ex incremento partuum oriundo, sequitur, et quae hoc continetur theoremate, quod probabilitas quam proxime sit in ratione inversa subduplicata prolis genitae. Ut vero pro dato quovis partuum numero haec probabilitas facillime determinetur, invenit Illustr. Auctor hoc institutum optime prosequi, si ex probabilitate, quae pro ipso medio obtinet, reliquae versus extremitates definiantur, in quo negotio id singulare occurit phaenomenon ut in mediocri a medio distantia omnis probabilitas tantum non evanescat. Formula denique traditur simplex qua pro quovis casu probabilitas satis exacte exprimi potest, ubi sensibiles aberrationes metuendae non sunt, nisi dum probabilitates absolutae fere iam evanescunt.

Mesura sortis ad fortuitam successionem rerum naturaliter contingentium applicata.

Novi Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae. Bd. XIV – 1 p. 26–45. 1769 (1770)
III. 7a - St. 59a

§. 1. Quicunque varias attentius examinaverit tabulas anthropologicas immenso labore congestas, facile, ex magno observationum numero, plures perspexerit naturae leges nec praevisas nec exspectatas idemque dixerim de innumeris rebus aliis, si modo pari industria exploratae simulque pro diverso rerum circumstantium aspectu ordinatae fuerint. Duo sunt, quae in huiusmodi disquisitionibus notanda veniunt: scilicet eventus fortuiti, quos sorti adscribimus, et leges ipsi sorti praescriptae ex magno eventuum numero diiudicandae; innumera cum sint argumenta, quae huc pertinent unicum allegabo exemplum atque id ipsum seligam quod istis ansam dedit observatiunculis. Cum varias iterum inspicerem tabulas anthropologicas argumento instituti quod de proportione agit, qua nati in utrumque dividuntur sexum, prolem autem masculam praevalere nunc uno ore fatentur omnes; id phaenomeni vel mera contigit sorte quamvis sua natura aeque ad utrumque sexum proclivi vel aliqua erit in ipsa sorte modificatio, qua proclivior redditur ad sexum masculinum quam ad alterum, plane ut sors in proiectione duarum alearum posita proclivior dicitur ad numerum septenarium quam ad senarium; istam vero ambiguitatem longe melius explicabit, qui gradum probabilitatis pro quovis eventu prius determinaverit; hunc ut in me susciperem laborem, non haesitavi; utramque disquiram hypothesin si Deus vitam ac vires concesserit numerosque emergentes ad tabulas quae prostant applicabo. In praesentia rerum primam percurram hypothesin, qua natura ad utriusque sexus formationem aeque facilis atque prona supponitur.

§. 2. Fuerit numerus partuum annuorum $=2\mathrm{N}$, quem sic parem facio ut idem esse possit numerus de utroque sexu; quaeritur quanta sit probabilitas, ut numerus puerorum datum seu praescriptum obtineat valorem; sit numerus iste $=m$; indicatur autem probabilitas alicuius rei fractione cuius numerator eam habeat rationem ad denominatorem ut numerus casuum favorabilium ad numerum casuum omnium, si aequali facilitate casus singuli contingant; hoc sensu maxima, quae haberi potest, probabilitas unitate exprimitur eaque res certas, quae non possunt non contingere, indicat. Facile autem ex theoria combinationum colligitur, fore quaesitam probabilitatem

$$=\frac{2\mathrm{N}\cdot(2\mathrm{N}-1)\cdot(2\mathrm{N}-2)\ldots\ldots(2\mathrm{N}-m+3)\cdot(2\mathrm{N}-m+2)\cdot(2\mathrm{N}-m+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\ldots(m-2)\cdot(m-1)\cdot m}\times\frac{1}{2^{2\mathrm{N}}}$$

ubi tam in numeratore quam denominatore fractionis indefinitae tot sunt factores accipiendi quot sunt unitates in m. Si vero proponatur casus $m=0$, quo scilicet singuli partus puellam dedisse finguntur, per se liquet fore tunc probabilitatem $=1/2^{2\mathrm{N}}$ atque adeo longe minimam si vel mediocris fuerit annuus partuum numerus. Crescente numero m increscit probabilitas atque maxima sit in medio, ubi supponitur $m=\mathrm{N}$ idemque adeo infantum utriusque sexus numerus est; ultra medium probabilitas decrescit sic ut pro aequalibus a medio distantiis aequalis sit probabilitas, quod notum est ex natura unciarum in binomio ad potentiam $2\mathrm{N}$ elevato, quas ipsa nostra formula paragraphi secundi sistit successive si numerus m instar numerorum naturalium progrediatur.

§. 3. De casu, cuius modo mentionem fecimus, aequalitatis inter utrumque sexum plura occurrunt notanda: faciamus igitur pro isto casu $m=\mathrm{N}$ atque sic formula nostra generalis in praecedente paragrapho exposita talis erit

$$\frac{2\mathrm{N}\cdot(2\mathrm{N}-1)\cdot(2\mathrm{N}-2)\ldots\ldots(\mathrm{N}+3)\cdot(\mathrm{N}+2)\cdot(\mathrm{N}+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\ldots(\mathrm{N}-2)\cdot(\mathrm{N}-1)\cdot(\mathrm{N})}\times\frac{1}{2^{2\mathrm{N}}}.$$

Sic igitur pro paucioribus partubus maxima ista probabilitas facile determinatur; quo maior autem eorum est numerus tanto difficilius atque rarius continget ut sexu suo in duas dividantur classes praecise aequales; verumtamen probabilitas applicata ad numerum partuum crescit crescente numero N, quod deinde demonstrabimus: hinc fiet ut inaequalitas inter utrumque sexum, divisa per numerum partuum, probabiliter decrescat, quod pariter dicendum est de omnibus observationibus, cuiuscunque sint generis, incerto passu procedentibus; omnes in hoc conveniunt Authores; minorem praesumendam esse aberrationem ex pluribus institutis observationibus quam ex paucioribus; at normam, secundum quam istae aberrationes, caeteris paribus diminuantur a repetitis observationibus, nemo adhuc quod sciam docuit; hanc inferius tradam.

§. 4. Formula, quam in praecedente paragrapho exposui, indefinita hoc laborat inevitabili incommodo ut laborem requirat insuperabilem, si magnus fuerit partuum numerus (ascendit autem Parisiis atque Londini propemodum ad viginti millia) etiamsi tabulae logarithmorum in auxilium vocentur; at de huiusmodi exemplis plerumque sermo est eorumque potissimum curiosus simulque enormitate calculi absterritus viam quaesivi compendiariam, quam paullo curatius describam, quoniam in plurimis aliis argumentis conducibilis est.

Primum expressionem analyticam atque indefinitam paragraphi praecedentis in aliam transtuli formam concinniorem simulque instituto nostro magis accommodam, nempe hanc

$$\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\frac{7}{8}\cdots\cdots\frac{2N-5}{2N-4}\times\frac{2N-3}{2N-2}\times\frac{2N-1}{2N}.$$

ubi tot sunt ordine suo factores accipiendi quot sunt unitates in N, id est, in numero partuum dimidiato. Praemissa hac transformatione rem porro ita sum aggressus.

§. 5. Ponatur, pro numero factorum N, productum ex omnibus factoribus $=q$ posteaque novum supervenire putemus factorem, ponendo scilicet $N+1$ loco numeri N; sic fiet novum productum pro $(N+1)$ factoribus

$$=\frac{2N+1}{2N+2}q=q-\frac{q}{2N+2};$$

Quoties igitur numerus N unitate augetur, toties productum q diminuitur quantitate

$$\frac{q}{2N+2};$$

istud vero decrementum valde parvum est, quando numerus N permagnus assumitur; hinc erit proxime

$$-dq:dN=\frac{q}{2N+2}:1;$$

unde oritur

$$-\frac{dq}{q}=\frac{dN}{2N+2};$$

Et hac aequatione differentiali, postquam integrata fuerit uti licebit ad determinandum valorem q pro dato numero N, si modo aliquot factores initiales in formula praecedentis paragraphi fuerint actu inter se multiplicati; attamen, maioris accurationis causa lubet alteram, veluti secundi ordinis, superaddere correctiunculam; igitur notetur valorem dq/q deductum fuisse ex mutatione quae oritur si loco N ponatur $N+1$; potuisset autem pari iure ex mutatione deduci quae fit cum loco N ponitur $N-1$ atque tunc obtinetur aequatio differentialis paululum diversa, nempe

$$\frac{-dq}{q}=\frac{dN}{2N-1};$$

hinc recte concluditur, accuratiorem fore aequationem differentialem si denominator medius accipiatur inter $2N+2$ et $2N-1$ sive aequalis dimidiae summae eorum, id est, $2N+\tfrac{1}{2}$; utemur ergo aequatione differentiali accuratiori et supra expectationem satisfaciente

$$-\frac{dq}{q}=\frac{dN}{2N+\frac{1}{2}}.$$

Integratio istius aequationis ita est instituenda ut, mediante quantitate aliqua constante addenda, unico satisfiat casui; quo plures autem habuerit factores initiales, eo accuratior erit formula pro tot factoribus consequentibus quot libuerit; ponamus igitur, quod posito numero factorum initialium $=f$, productum emergens sit $=$ A; habebitur ab integratione praefatae formulae differentialis

$$\log.\frac{A}{q}=\frac{1}{2}\log.\frac{2N+\frac{1}{2}}{2f+\frac{1}{2}},$$

sive

$$q=A\sqrt{\frac{4f+1}{4N+1}}.$$

§. 6. Praestantia praefatae methodi magis elucescet si exemplum assumatur cuius valor per se pateat. Proponatur formula indefinita, praecedenti simillima, nempe

$$\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}\cdots\cdots\frac{N-2}{N-1}\times\frac{N-1}{N}\times\frac{N}{N+1}.$$

cuius valor manifesto est

$$=\frac{1}{N+1};$$

videamus autem quid nova methodus indicet; sit rursus productum ex omnibus factoribus $=q$; si vero novus superveniat factor, erit productum

$$\frac{N+1}{N+2}q=q-\frac{q}{N+2};$$

unde nunc oritur

$$-dq:dN=\frac{q}{N+2}:1$$

sive

$$-\frac{dq}{q}=\frac{dN}{N+2};$$

Quod si e contrario ultimus factor resecetur, fiet

$$-\frac{dq}{q}=\frac{d\mathrm{N}}{\mathrm{N}};$$

ergo assumto rursus denominatore medio, faciemus

$$-\frac{dq}{q}=\frac{d\mathrm{N}}{\mathrm{N}+1},$$

cuius integralis, retenta significatione literarum f et A antea adhibitarum, erit

$$\log.\frac{\mathrm{A}}{q}=\log.\frac{\mathrm{N}+1}{f+1}$$

sive

$$q=\frac{f+1}{\mathrm{N}+1}\mathrm{A};$$

at vero in isto exemplo est

$$\mathrm{A}=\frac{1}{f+1};$$

est igitur simpliciter atque generaliter

$$q=\frac{1}{\mathrm{N}+1},$$

sic ut methodus, in hoc quidem exemplo, exacte indicet quod res est. Plura alia hac de re adiici possent, si id instituti nostri ratio permitteret.

§. 7. Quicunque simplicem aequationem in fine paragraphi quinti expositam ad exempla qualiacunque applicare volet, aberrationem certe vix sensibilem deprehendet. Quo maiorem autem factorum initialium numerum, indicatum per f, actu multiplicaverit atque numerum A determinaverit, eo accuratius quaesitum productum q pro integro factorum numero N inveniet. Exemplum allegabo ipsi methodo quam maxime inimicum; ponam simpliciter $f=2$; sic erit

$$\mathrm{A}=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{8}$$

atque fiet

$$q=\frac{9}{8\sqrt{4\mathrm{N}+1}};$$

ponatur porro simpliciter $N=6$ atque sic erit $q=9/40$. Est autem verum productum

$$\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\frac{7}{8}\times\frac{9}{10}\times\frac{11}{12}=\frac{231}{1024},$$

quod ab altero vix differt; at multo accuratius respondebit formula nostra, si numero f maiori superinstruatur computus; ponam igitur $f=12$ atque adeo

$$\sqrt{(4f+1)}=7;$$

sic fiet productum ex duodecim factoribus initialibus sive

$$A=\frac{676039}{4194304};$$

unde

$$A\sqrt{(4f+1)}=\frac{4732273}{4194304}=1{,}12826;$$

adeoque pro assumto numero $f=12$, prodit

$$q=\frac{1{,}12826}{\sqrt{(4N+1)}};$$

atque isto valore, qualiscunque fuerit numerus N, absque ullo plane sensibili errore uti licebit.

§. 8. Intelligitur ex formula generali §. 2. si maiusculus fuerit partuum annuorum numerus, probabilitatem fere nullam esse circa initium et finem atque maximam fieri circa medium etiamsi et tunc pro quovis casu speciali parva admodum sit. Nunc autem porro intelligitur hanc eandem probabilitatem decrescere crescente numero partuum et ita quidem ut sequatur quam proxime rationem inversam subduplicatam prolis genitae; theorema istud calculos, qui prima fronte insuperabiles videbantur, insigniter sublevat; computus enim unius exempli protinus indicat caetera omnia. Velim notetur insuper inquirendum fere unice esse, quid sorti tribui possit circa medium, ubi exigua est inter utrumque sexum differentia, cum vix fieri possit ut inaequalitas certos transgrediatur limites, quod ipsa testatur experientia, si variationes, non inaequalitates, consideremus. Haec causa est, quod conveniat potius argumentum prosequi a medio versus extremitates quam vicissim.

§. 9. Descendamus iam ad exemplum; permagnum supponam partuum numerum, qualis quotannis esse solet Parisiis atque Londini; faciam $2N=20000$ sive $N=10000$: pro hoc exemplo quaeritur, in hypothesi naturam aequaliter in formationem utriusque sexus esse proclivem, quanta sit probabilitas ut numerus puellorum sit praecise $=10000$. Nemo profecto computum conabitur ad ductum formulae paragrapho quarto expositae, multoque minus ad formulam paragraphi tertii recurret; verum si formula utamur in fine paragraphi septimi tradita, protinus invenimus $q=0{,}0056413$ sive

$$q=\frac{1}{177\tfrac{1}{4}}.$$

Tali probabilitate gaudet, cui aequa sorte res fuerit cum 176 collusoribus; parvula spes est, minorem tamen aestimabam ante institutum calculum. Si vero in civitate mediocri foecunditas ponatur centies minor, erit per paragraphum praecedentem, pro simili eventu expectatio decies maior atque adeo proxime

$$=\frac{10}{177\tfrac{1}{4}}.$$

Haec de aequali editorum partuum in utrumque sexum divisione.

§. 10. Permanere nunc putetur valor litterae N et omnem variationem cadere in valorem litterae m sive in numerum puellorum in progeneratione annua comprehensorum; animus scilicet est variationem probabilitatis inquirere, dum numerus m sensim sensimque, sive in unam sive in alteram partem, recedit ab numero N. Igitur faciam successive

$$m=N\pm 1; \qquad m=N\pm 2; \qquad m=N\pm 3 \;\ldots\ldots\; m=N\pm\mu,$$

ubi μ indicat numerum quo puelli a numero N distant sive in excessu sive in defectu, quia in utramque partem probabilitas aequaliter decrescit. Patet autem ex formulis §. §. 2 et 3 adhibitis, probabilitatem successive fore

$$\frac{N}{N+1}q; \qquad \frac{N\times(N-1)}{(N+1)\times(N+2)}q; \qquad \frac{N\times(N-1)\times(N-2)}{(N+1)\times(N+2)\times(N+3)}q \quad \text{etc.}$$

unde formula generalis quae probabilitatem exprimit, qua numerus puellorum fiat $=N\pm\mu$, nunc talis erit

$$\frac{N}{N+1}\times\frac{N-1}{N+2}\times\frac{N-2}{N+3}\times\cdots\cdots\times\frac{N-\mu+1}{N+\mu}\times q.$$

Valor autem litterae q, qua formula haec multiplicata est, adhuc est (vi §. 7.)

$$= \frac{1,12826}{\sqrt{(4\,\mathrm{N}+1)}}\,.$$

§. 11. Ecce iam tabellam ad praeceptum praecedentis paragraphi constructam ubi rursus ponitur $\mathrm{N}=10000$, in qua columna prima denotat valorem litterae μ, altera vero probabilitatem ipsi respondentem.

I.	II.	I.	II.
1.	0, 9999 q	26.	0, 9341 q
2.	0, 9996 q	27.	0, 9291 q
3.	0, 9991 q	28.	0, 9239 q
4.	0, 9984 q	29.	0, 9185 q
5.	0, 9975 q	30.	0, 9131 q
6.	0, 9964 q	31.	0, 9076 q
7.	0, 9951 q	32	0, 9019 q
8.	0, 9936 q	33.	0, 8961 q
9.	0, 9919 q	34.	0, 8902 q
10.	0, 9900 q	35.	0, 8842 q
11.	0, 9879 q	36.	0, 8780 q
12.	0, 9856 q	37.	0, 8716 q
13.	0, 9831 q	38.	0, 8651 q
14.	0, 9804 q	39.	0, 8585 q
15.	0, 9775 q	40.	0, 8517 q
16.	0, 9744 q	41.	0, 8449 q
17.	0, 9711 q	42.	0, 8379 q
18.	0, 9677 q	43.	0, 8308 q
19.	0, 9641 q	44.	0, 8236 q
20.	0, 9604 q	45.	0, 8163 q
21.	0, 9565 q	46.	0, 8089 q
22.	0, 9524 q	47.	0, 8014 q
23.	0, 9481 q	48.	0, 7938 q
24.	0, 9436 q	49.	0, 7861 q
25.	0, 9389 q	50.	0, 7783 q

§. 12. Apposui primam hanc tabellae portiunculam eo fine ut inde quaestionis minime inutilis, quam mente conceperam, solutionem deducere possem; quaeruntur scilicet ambo limites a medio aequidistantes hac lege, ut eadem sit probabilitas, numerum puerorum hosce limites esse transgressurum vel non transgressurum.

Solutio huius quaestionis requirit, ut indagetur quotnam termini tabellae ab initio versus finem sint addendi, ut duplum summae auctum quantitate q fiat $= 1/2$; summa enim terminorum, ultra medium positorum, dat summam probabilitatum, ut numerus puerorum non transcendat limitem, eademque summa citra medium positorum exprimit summam probabilitatum ut numerus puellorum non descendat infra limitem oppositum, ea propter summa est duplicanda; denique huic duplae summae addenda est ipsa probabilitas q pro casu $\mu = 0$ sive pro aequalitate inter utrumque sexum. Ad normam huius praecepti invenitur distantia utriusque limitis a medio sive $\mu = 47$ quam proxime. Etenim summa quadraginta septem terminorum est $= 43{,}6406\, q$, eius duplum $= 87{,}2812\, q$ cui si super addatur q oritur $88{,}2812\, q$. Invenimus autem paragrapho nono $q = 0{,}0056413$, unde tandem quantitas finalis prodit 0,4980, quae paullo minor est quam $1/2$. Quod si vero assumatur $\mu = 48$, tunc eadem quantitas finalis sit $= 0{,}5070$ atque adeo maior quam $1/2$ interpolatio dat proxime $\mu = 47\frac{1}{4}$; distantia autem mutua limitum erit $2\,\mu = 94\frac{1}{2}$. Igitur tandem inter 20000 partus annuos aeque probabile erit, ut numerus masculorum non evagetur extra limites 9953 et 10047 quam ut illos limites transgrediatur, si modo sors utrique sexui aeque faveat. Posterius tamen aliquantillum probabilius est ob fractiunculam neglectam.

§. 13. Simili modo problema nostrum solvetur pro quocunque alio numero N; verum quis novum pro quovis exemplo ferat laborem? Datur compendium operis; dico enim numeros quaesitos μ quam proxime sequi rationem subduplicatam datorum numerorum N, quod quidem ex praemissis, si attentius fuerint examinata, facile colligitur, tantoque erit accuratius compendium quanto maior assumptus fuerit numerus partuum. Ponatur numerus partuum annuus in tota Gallia sive $2\mathrm{N} = 600000$, adeoque $\mathrm{N} = 300000$, qui numerus trigesies maior est praecedente; dico fore nunc $\mu = 47\frac{1}{4} \times \sqrt{30} = 258{,}8$ atque $2\,\mu = 517{,}6$. Sic igitur in hypothesi, quam commentamur, aequipollentiae sortis pro utroque sexu, aequa erit certatio, sive contendas maius fore in Gallia sexus discrimen, sive minus.

Quod si vero pro urbe mediocriter copiosa ponatur numerus partuum annuorum $= 200$, id est, centies minor quam qui in paragrapho praecedente fuit assumptus, fiet numerus μ decies minor sive $= 47\frac{1}{4}/10 = 4{,}725$, nec ambo limites magis quam 9,45 a se invicem distabunt. Hinc intelligimus, esse paullo probabilius ut differentia inter utrumque sexum non excedat denarium quam ut excedat.

§. 14. Lubet nunc posterius istud exemplum directe computare, ut veritas compendii in praecedente paragrapho adhibiti elucescat; hunc in finem aliam tabellae portiunculam apponam pro $\mathrm{N} = 100$ ad ductum formulae indefinitae paragrapho decimo descriptae, in qua sufficiet quinque considerasse terminos pro numeris naturalibus 1, 2, 3, 4 et 5, his alio fine superaddam probabilitates pro numeris 10, 15, 20, 25, 30, 35, et 40: prima columna rursus ordine suo singulos hos numeros indicat, dum secunda columna docet probabilitates respondentes; maximam vero probabilitatem pro casu perfectae aequalitatis inter utrumque sexum, id est, pro $\mu = 0$, nunc indicabo per q'.

I.	II.	I.	II.
1.	0, 9901 q'	10.	0, 3679 q'
2.	0, 9608 q'	15.	0, 1054 q'
3.	0, 9141 q'	20.	0, 01832 q'
4.	0, 8522 q'	25.	0, 001931 q'
5.	0, 7789 q'	30.	0, 0001235 q'

Est autem propemodum

$$q' = \frac{10}{177} \qquad (\S.\ 9.)$$

vel accuratius

$$q' = \frac{1{,}12826}{\sqrt{401}} = 0{,}05634$$

vi paragraphi septimi atque hic valor in singulis numeris erit substituendus.

§. 15. Sumatur nunc summa quinque priorum terminorum et habebitur 4,4979 q'; huius duplum $=8{,}9958\ q'$, cui addatur q' atque sic obtinebitur 9,9958 q' vel 0,5631 et haec quidem quantitas maior est quam $1/2$; at si sumantur quatuor priores termini erit summa eorum $=3{,}7182\ q'$; huius duplum $=7{,}4364\ q'$; si addatur q' habebitur nunc 8,4364 q' vel 0,4753 haec autem quantitas nunc minor est quam $1/2$; ergo regula nostra compendiaria optime quadrat cum vero valore: sic itaque pro ducentis natis si fiat certatio, num sexus differentia maior futura sit quam decem vel non, dico posterius esse probabilius et aequam demum fore certationem, si 5631 offerantur contra 4369: imo poterit audacter ducenties millena millia contra unum offerre, si alteruter sexus infra 60 descenderit.

§. 16. Quae dicta sunt de quaestione paragraphi duodecimi, qua limites pro aequiprobabilitate, sive valores μ ad datum numerum N, determinandi erant, eius sunt indolis ut converti possint hinc novae quaestiones formantur, in quas analysis dominetur. Sint, verbi gratia, duo Collusores alea continuo inter se certantes, uter quovis jactu, prout alea sive numerum parem sive imparem attulerit, punctum unum lucrifaciet, nec prius finita res sit, quam cum alteruter alterum 94 punctis vicerit, quaeritur numerus iactuum post quem aeque probabile sit, ut certatio finita sit vel non finita. Solutionem indicat paragraphus duodecimus; erit nempe numerus iactuum $=20000$ vel tantillo minor ob neglectam fractionem numero 94 adiiciendam. Si lucro 94 punctorum substituatur minus, veluti novem aut decem punctorum, requirentur 200 iactus vi paragraphi decimi tertii. Nec video methodum magis directam, qua huiuscemodi quaestiones solutionem admittere possint.

§. 17. Parvula tabella paragraphi decimi quarti haud obscure nobis indicat, qua lege probabilitates a medio versus extrema decrescant; praesertim exinde apparet, omnem probabilitatem in mediocri distantia a medio tantum non totam evanescere etenim, si $\mu=40$, fit probabilitas relativa $=0{,}00000007774\ q'$ et probabilitas absoluta $=0{,}000000004478$, quae si vel omnibus probabilitatibus pro terminis insequentibus addatur absque omni scrupulo negligi potest.

Velim porro notetur harmonia, quae inter tabellas §. §. 11 et 14 intercedit, quandoquidem probabilitates in priori tabula pro numeris 10, 20, 30, 40 et 50 proxime iisdem coefficientibus numericis exprimuntur, qui in altera tabella pro numeris decies minoribus id est, pro numeris 1, 2, 3, 4 et 5, quod quidem haud difficulter ex theoria nostra provideri poterat. Quia vero numeri columnae secundae in tabula paragraphi undecimi non admodum mutantur, sequitur inde fore etiam summam decies maiorem proxime, quandoquidem decies plures termini sunt accipiendi et cum e contrario q' est propemodum decies maior quam q, sequitur quod summa 10, 20, 30, 40 vel 50 terminorum sit proxime aequalis in tabula §. 11. summae 1, 2, 3, 4 vel 5 terminorum in tabella §. 14. postquam nimirum valores pro q et q' substituti fuerint.

§. 18. Huiusmodi observationes egregie usu venire possunt. Ita intelligimus eandem esse propemodum probabilitatem absolutam, ut inter ducentos natos numerus puerorum non nisi ad 70 ascendat, quae est inter 20000 natos, ut non nisi ad 9700 perveniat; utraque probabilitas tam exigua est ut superfluum sit calculos ultra hos fines extendere, in priori casu fit $\mu=30$ in altero $\mu=300$.

Unicum est quod superaddam; formulam nempe dabo non indefinitam sed determinatam, quae non male admodum numeros utriusque tabulae exprimit, si modo intra certos subsistamus limites; hanc formulam eodem fere modo inveni, quo usus sum in paragrapho quinto ad detegendum quam proxime valorem q, qui probabilitatem pro perfecta aequalitate inter utrumque sexum denotat. Sit generaliter dimidius omnium natorum numerus $=\mathrm{N}$; sitque rursus numerus puerorum $=\mathrm{N}\pm\mu$,
dico fore propemodum probabilitatem huius casus

$$=\frac{\mathrm{Q}}{c^{\frac{\mu\mu}{\mathrm{N}}}}$$

modo numerus μ non sit multo maior quam $\sqrt{\mathrm{N}}$. Est autem Q probabilitas pro casu aequalitatis inter utrumque sexum et c est numerus cuius logarithmus hyperbolicus unitas est, sive $c=2{,}718$.

§. 19. Ut vim huius simplicissimae formulae, unico termino expressae, dignoscere liceat, recurram ad parvulam tabellam §. 14. in qua $\mathrm{N}=100$ et $q'=\mathrm{Q}$, numerosque secundae columnae ad ductum istius formulae computabo; sic aberrationes immediate innotescent.

I.	II.	I.	II.
1.	0, 9901 q'	15.	0, 1057 q'
2.	0, 9610 q'	20.	0, 01819 q'
3.	0, 9143 q'	25.	0, 001864 q'
4	0, 8528 q'	30.	0, 0001124 q'
5.	0, 7797 q'	35.	0, 000003924 q'
10.	0, 3691 q'	40.	0, 00000007774 q'

Ex collatione apparet aberrationes vix esse sensibiles et ubi paullo sensibiliores fieri incipiunt relative, ibi probabilitates absolutas fere totas evanescere. Licebit utique regula compendiaria uti quamdiu numerus μ non excedit numerum $3\sqrt{\mathrm{N}}$.

Eadem librabimus lance formulam pro alio et quidem longe maiore valore literae N. Sit iterum $\mathrm{N} = 10000$ ut diversos casus conferre possimus cum tabula paragrapho undecimo exhibita et directe computata; sic erit valor Q idem quod in tabula indicatur litera q; ponam autem pro μ sucessive numeros 10, 20, 30, 40, et 50: his positis inveniuntur probabilitates respondentes 0,9901 q; 0,9608 q; 0,9141 q; 0,8522 q et 0,7889 q; ipsa vero tabula paragraphi undecimi dat 0,9900 q; 0,9604 q; 0,9131 q; 0,8517 q; et 0,7783 q; qui profecto numeri tantum non ad amussim inter se conveniunt.

§. 20. Perspecta praestantia regulae unicum superaddam exemplum, quo appareat quemadmodum ubique calculus institui debeat pro numeris qualibuscunque.

In egregio opere viri de hisce rebus longe meritissimi, *Ioh. Petri Süsmilch*, editione tertia parte secunda[1] plures annexae sunt tabulae, in quibus pag. 17. videmus, quod in Provincia Selandica a. 1758 natae fuerint 3533 filiolae et 3805 puelli; unde numerus natorum $= 2\mathrm{N} = 7338$ atque $\mathrm{N} = 3669$; quia vero numerus puellorum erat 3805, habebitur $\mu = 136$; hinc

$$\frac{\mu\mu}{\mathrm{N}} = 5\,\frac{151}{3669} = 5{,}04\,;$$

ergo probabilitas, qua numerus puellorum sit praecise $= 3805$, in hoc exemplo indicatur formula

1 J.P. Süssmilch «Die Göttliche Ordnung in den Veränderungen des menschlichen Geschlechts, aus der Geburt, Tod, und Fortpflanzung desselben erwiesen». Berlin 1741 (première édition). cf. également Intr. p. 221 h.v.

$$\frac{Q}{c^{5,04}} = 0{,}0006628\,Q\,,$$

isteque valor tanto accuratior est, quod numerus μ parum ultra numerum $2\sqrt{N}$ ascendit igitur probabilitas pro casu aequalitatis inter utrumque sexum est ad probabilitatem qua numerus puerorum istam aequalitatem praecise superat numero 136 ut 10000000 ad 0,0006628; probabilitas vero absoluta pro posteriori casu habetur si pro Q vel q valor paragrapho septimo definitus substituatur nempe 0,009313; hoc modo ista probabilitas absoluta sit $=0{,}000006173$; dico autem, quod in hoc parvulo valore incerti esse potest, id solum duas figuras numericas ultimas spectare. Sic igitur videmus posse pro omni casu probabilitatem absolutam determinari absque ut per casus intermedios, procedamus atque hoc demum est quod potissimum intendebam, cum hasce disquisitiones susciperem.

§. 21. Quae dicta sunt adhucdum pure sunt analytica, quandoquidem procreationi puellorum puellarumve substitui potuisset extractio schedularum sive nigrarum sive albarum ex urna si modo schedula in urnam reponatur priusquam nova fiat extractio; tum, si numero aequali schedulae de utroque colore in urnam repositae fuerint, habebimus, quod nobis res fuit. Quod si vero schedulas nigras numero praevalere ponamus, incidimus in alteram hypothesin, qua ponitur naturam magis vergere ad sexum formandum masculinum quam muliebrem. Alterum istud argumentum, quod prius ceu simplicem in se continet casum, non potest non novos obiicere labores mihi nondum exploratos; quicquid id sit negotii proximo suscipiam otio.

De mensura sortis ad fortuitam rerum naturaliter contingentium successionem adplicata. Auctore Dan. Bernoulli

Novi Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae. Bd. XV p. 5–8. 1770 (1771)
III. 7b* – St. 59b*

Qui probabilitatis calculum summo dudum cum acumine excoluit, Illustr. Auctor novum profundissimarum hoc de argumento meditationum suarum sistit specimen. In tabulis natalitiis magno numero congestis non potest non digna attentione videri proportio illa, quae in numeris natorum utriusque sexus cernitur. Masculam prolem sequiori praevalere, observationes abunde docent; id vero utrum mero casu, an ex peculiari quadam ipsius naturae ad generandum sexum masculinum proclivitate eveniat, quaestio est altioris indaginis et tanti Geometrae studio dignissima. Problema hoc intricatissimum, quod eo tendit, ut ex ingenti casuum fortuitorum numero sortis ipsius modificationes et leges ac regulae illae, ipsi adeo sorti praescriptae, eruantur, Ill. Auctor iam in alia dissertatione praecedenti Commentariorum Tomo inserta[1] tractare aggressus est; binas scilicet fingit hypotheses, in quarum una natura ad generandum sexum utrumque aeque proclivis esse, in altera vero masculino magis favere statuitur; ex quibus binis utra sit vera naturae lex, Ill. Auctor ita inquirit, ut pro utraque leges probabilitatis computet et cum tabulis anthropologicis conferat atque ita ex calculi cum observationibus consensu de hypotheseos verisimilitudine iudicet.

Posito igitur partuum annuorum numero $= 2\mathrm{N}$
quaeritur probabilitas, ut multitudo puellorum sit $= m$,
adeoque ea puellarum $= 2\mathrm{N} - m$:
hanc itaque quaestionem Ill. Auctor primo pro priori hypothesi, qua natura utrique sexui aequaliter favere statuitur, in priori sua dissertatione resolvit; et probabilitatis quaesitae valorem ita invenit generaliter expressum:

$$\frac{2\mathrm{N}.(2\mathrm{N}-1)(2\mathrm{N}-2)\ldots.(2\mathrm{N}-m+1)}{1.2.3\ldots\ldots m}\cdot\frac{1}{2^{2\mathrm{N}}}$$

ex cuius formulae ad varios casus adplicatione complures elegantes et reconditas conclusiones derivavit.

Expedito itaque problemate pro priori hypothesi; Ill. Auctor eandem quaestionem in praesenti dissertatione etiam pro posteriori hypothesi resolvit,

1 Cf. III. 7a – St. 59a p. 326 h.v.

statuendo scilicet, naturam masculae proli magis favere, quam alteri, idque in ratione constanti $a:b$; qua quidem nova conditione fieri non potuit, quin argumentum evaderet longe intricatius. Primum itaque ex combinationum theoria Ill. Auctor probabilitatis quaesitae valorem ita definiri invenit, ut ad formulam modo allegatam insuper accederet factor

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m \left(\frac{2b}{a+b}\right)^{2N},$$

qui quasi indicem constituit differentiae inter probabilitates pro uno eodemque casu in utraque hypothesi computatas. Ante omnia igitur cardo rei in eo versabatur, ut ex sufficienti observationum numero valor rationis a/b determinaretur; quae quidem proportio eo innotescit exactius, quo plures conferuntur observationes et quo maior est in singulis summa partuum; cum vero diversimodae deductiones ex istis observationibus formari queant; Ill. Auctor eum modum, quo statuitur esse a ad b, uti summa puerorum natorum ad summam filiarum natarum, ceteris censuit praeferendum. Quo igitur constituto, ex tabulis Londinensibus concluditur $a/b = 1{,}055$; hocque valore Ill. Auctor tanquam verisimillimo utitur, omnesque quae in ista hypothesi de proposito problemate quaestiones formari possunt, resolvit et conclusiones ex ipsa theoria deductas cum observationibus comparat; ubi quoque tanta cernitur naturae in ipsis suis variationibus regularitas et tantus theoriae cum observationibus consensus, ut Ill. Auctor aliquot tabulas, consensum turbaturas, pro erroneis declarare tuto potuerit erroresque facto examine actu deprehenderit. Neque tamen hic consensus de limitibus aberrationum arctioribus est intelligendus, cum Ill. Auctor ostenderit observationes etiam ducentorum annorum, Londini instituendas, etiamsi fuerint accuratissimae, nondum tamen sufficere ad tollendam haesitationem 0,006 in definienda ratione a/b, quam legem naturalem in generando utroque sexu adpellari convenit.

Novum igitur gravissimi huius argumenti evolutio sistit specimen, quanto cum acumine insignis hic Geometra etiam istas naturae leges perscrutetur, quas ea eventuum prorsus fortuitorum specie involuisse videtur.

Continuatio argumenti de mensura sortis ad fortuitam successionem rerum naturaliter contingentium applicata.

Novi Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae. Bd. XV p. 3–28. 1770 (1771).
III. 7b – St. 59b

§. 1. In prioribus nostris de isto argumento commentationibus[1] hypothesin examinavimus adeo verisimilem primo intuitu, ut falsitas eius post innumera demum experimenta in suspicionem venire coeperit; aequam intelligo naturae proclivitatem ad utrumque formandum sexum. Nunc vero experti omnes uno fatentur ore, naturam sexui masculino magis favere quam alteri aut saltem huc usque magis favisse. Id vero an caeca sorte an ductu legis naturalis contigit? Equidem prius possibile est, alterum vero longe verisimillimum atque probabilissimum; negligamus verba atque rem ipsam ponderemus. Sic operae pretium erit ut singulorum qui evenire possunt, casuum probabilitatem inquiramus pro hac altera hypothesi, quod natura in formanda prole mascula foecundior sit, quam in altera idque in ratione quacunque data sed constanter eadem quam vocabo a ad b. Novam quaestionem, priori infinities ampliorem, praeter expectationem eleganti satisque simplici formula circumscriptam offendi, quam nunc exponam.

§. 2. Sit iterum, sicuti in paragrapho secundo dissertationis praecedentis, numerus partuum annuorum $=2\mathrm{N}$ atque, ut rem sermone mathematico indicemus, ponamus pro quovis partu sexum hoc modo definiri, ut in urna repositae sint schedulae partim nigrae pro sexu masculo partim albae pro sexu sequiore definiendo; fuerit numerus schedularum nigrarum $=a$, schedularum albarum $=b$: tum cuiusvis partus sexum schedula extracta indicet mox in urnam reponenda; quod si hoc modo sexus pro $2\mathrm{N}$ partubus determinetur quaeritur quanta sit probabilitas ut numerus puellorum fiat praecise $=m$ atque adeo numerus puellarum $=2\mathrm{N}-m$. Dabit nunc theoria combinationum, si modo omnia disposite fuerint ordinata, sequentem formulam generaliorem, quae verum quaesitae probabilitatis valorem sistit:

$$\frac{2\mathrm{N}.(2\mathrm{N}-1).(2\mathrm{N}-2).(2\mathrm{N}-3)\ldots\ldots(2\mathrm{N}-m+1)}{1.2.3.4\ldots\ldots\ldots m.2^{2\mathrm{N}}}\times\left(\frac{a}{b}\right)^{m}\times\left(\frac{2b}{a+b}\right)^{2\mathrm{N}}.$$

1 Cf. III. 7a – St. 59a p. 326 h.v.

§. 3. Miratus sum simplicitatem modi, quo theoria haec generalior complectitur alteram a nobis praemissam pro aequivalentia utriusque sexus: posito enim $a=b$ protinus perspicitur fieri

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m \times \left(\frac{2b}{a+b}\right)^{2\mathrm{N}} = 1$$

atque adeo formulam prodire plane eandem, quam paragrapho secundo primae dissertationis exposuimus. At si parvula intercedat inaequalitas inter a et b, insignis statim inde orietur differentia inter probabilitates ad utramque hypothesin computatas, quotiescunque pro N numeri assumuntur maiores; scilicet sunt ambae probabilitates pro iisdem numeris m et N ut unitas ad numerum

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m \times \left(\frac{2b}{a+b}\right)^{2\mathrm{N}},$$

quae ratio plerumque a ratione aequalitatis admodum recedit pro magnitudine numeri m atque haec proprietas criterium nobis suppeditat haud spernendum in dignoscenda lege naturae, si tabulae natalitiae, pro pluribus annis praesto sint. En huius rei exemplum.

Fuerit numerus omnium natorum $=20000$ sive $\mathrm{N}=10000$ sitque sermo de speciali casu, quo ista natorum summa ab utroque sexu in duas dirimitur partes perfecte inter se aequales: habebimus $m=10000$; ponatur $a/b=1.055$, qui valor observationibus non male respondet: sic fiet

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m \times \left(\frac{2b}{a+b}\right)^{2\mathrm{N}} = \left(\frac{1055}{1000}\right)^{10000} \times \left(\frac{2000}{2055}\right)^{20000} = \frac{1}{1296}.$$

Igitur probabilitas, quae pro hocce casu militat utcunque parvula sit, erit millies ducenties nonagies sexies maior si fuerit $a/b=1$ quam si sit $a/b=1.055$; vidimus autem in praecedente nostra dissertatione paragrapho septimo probabilitatem pro prima positione esse $=1/177$; erit ergo probabilitas pro altera positione $=1/177 \times 1/1296$ sive $=1/229392$. Huic parvulae probabilitati si omnes addamus, quibus numerus m infra numerum N deprimitur, quamvis id fieri possit decem millibus modis prius quam numerus m plane evanescat, tamen summa omnium harum probabilitatum pro decem mille casibus non fit vigesies maior quam est probabilitas pro solo casu, quo ponitur $m=\mathrm{N}$; unde deducitur, si quaestio fuerit quanta sit probabilitas ut Londini plures intra annum nascantur puellae quam pueruli aut saltem numero aequali, hanc probabilitatem minorem esse quam $1/11469$; verosimile autem est, ut id semel contingat in quovis decursu 12000 annorum propemodum. Tabula passim extat, qua ab anno 1664 usque ad annum 1758 numerus quotannis indicatur tam filiolarum quam puellorum Londini in Ecclesia Episcopali baptizatorum, qua videre est nunquam intra 95 annos contigisse ut numerus puellarum aequalis esset, nedum maior, numero puellorum, etiamsi numerus omnium baptismatum annuorum notabiliter minor esset quam 20000 atque adeo id multo facilius contingere potuisset; anno 1703 puellae maxime ad aequalitatem cum puerulis accesserunt; baptizatae nempe fuerunt 7683 puellae atque 7765 pueruli; parvum equidem hic fuit discrimen at superatu longe difficillimum.

§. 4. Formula in fine paragraphi secundi exposita naturam argumenti nostri egregie explicat. In hypothesi prima, qua ponitur $a=b$, decrescit probabilitas a medio versus extremitatem alteram; in hypothesi secunda, qua ponitur $a>b$, primo increscit ad certum terminum ultra quem decrescit; prope medium, ubi $m=N$, probabilitas in prima hypothesi admodum excedit probabilitatem in hypothesi altera; quia vero in priori decrescit in altera increscit, locus erit ubi probabilitas eadem sit pro utraque hypothesi, locus alius ubi probabilitas, in hypothesi altera, sit dupla, tripla, quadrupla &c. hosce nunc locos sive valores m definiam; requiritur autem, ut factor

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m \times \left(\frac{2b}{a+b}\right)^{2N}$$

ponatur successive aequalis 1, 2, 3, 4 &c. indeque determinetur numerus *m*. Incipiamus a prima aequatione atque inveniemus

$$m=\frac{2N\,(log.\,\overline{a+b}-log.\,2b)}{log.\,a-log.\,b}.$$

Vocemus hunc primum valorem A et sic habebimus successive

$$\begin{aligned} m&=A\\ m&=A+\frac{log.\,2}{log.\,a-log.\,b}\\ m&=A+\frac{log.\,3}{log.\,a-log.\,b}\\ m&=A+\frac{log.\,4}{log.\,a-log.\,b}. \end{aligned}$$

Sic generaliter erit

$$m=A+\frac{log.\,\phi}{log.\,a-log.\,b}$$

si desideretur ut ambae probabilitates se habeant ut $1:\phi$. Descendamus ad exempla numerica.

§. 5. Sit porro $N = 10000$ atque $a/b = 1055/1000$; habebitur $A = 10134$ atque generaliter

$$m = 10134 + \frac{log.\,\phi}{log.\,1.055}$$

sive, adhibitis logarithmis communibus,

$$m = 10134 + 43 \log.\,\phi$$

unde si proponatur successive:

$\phi = 1$	habebitur	$m = 10134$
$\phi = 2$	. . .	$m = 10147$
$\phi = 3$	. . .	$m = 10154$
$\phi = 4$	. . .	$m = 10160$
$\phi = 5$	. . .	$m = 10164$
$\phi = 10$	. . .	$m = 10177$.

Apparet hinc quam enormiter increscat ratio quae intercedit inter probabilitates pro ambabus positionibus $a/b = 1$ et $a/b = 1.055$. Intelligitur simul quod quoties numerus puerorum natorum quadraginta tribus auctus ponitur toties ratio inter ambas probabilitates analogas decupletur.

§. 6. Relatio inter ϕ et m ad logarithmicam pertinet sic ut operatione simplicissima numerus m indicari possit, pro quo ratio ϕ datum obtineat valorem. Sit, verbi gratia, pro numeris in praecedente paragrapho assumtis, numerus puellorum m indicandus, qui decies millies millenis millibus vicibus facilius eveniat, posito $a/b = 1.055$ quam posito $a/b = 1$. In hoc exemplo fit $\phi = 10000000000$ et $\log.\,\phi = 10$ ergo (§. 5.) $m \doteq 10134 + 430 = 10564$ quis non miretur incredibilem fere probabilitatum differentiam pro casu, quo numerus puellorum medietatem, parvo numero 564 inter 20000, transgreditur. Quod si igitur rarissimo casu contigerit ut inter 20000 natos numerati fuerint 10564 pueruli atque adeo 9436 puellae, quis harum rerum intelligens statuet naturam ad utrumque formandum sexum esse prorsus aequaliter proclivem? Id saltem certum est, huiuscemodi casum 10000000000 vicibus probabiliorem fieri, si fuerit $a/b = 1.055$, quamvis et tunc quidem vix inter possibiles reponi mereatur, quandoquidem solius casus istius probabilitas tantum est $= 1/_{1416000}$. Si porro ita augeatur minima ista probabilitas, ut comprehendat omnes casus, quibus numerus puellorum transgreditur numerum 10564, vix inde fiet decies maior, quantum absque instituto calculo iudicare possum; sic omnis probabilitas fiet tantum $= 1/_{141600}$, qua neglecta affirmare licebit nunquam futurum ut numerus puellorum natorum ad 10564 ex 20000 natis ascendat, etiamsi sexui masculino sua tribuatur praerogativa, quam valor $a/b = 1.055$ indicat.

§. 7. Vidimus modo, quam parum verisimile sit, ut pro 20000 natis numerus puerorum unquam ad 10564 ascendat puellarumque adeo ad 9436 deprimatur sicque differentia inter utrumque sexum ad 1128 evagetur, etiamsi natura sexui masculino prae altero faveat in ratione 1055 ad 1000. Huius itaque rei curiosus tabulam consulvi Londinensem supra citatam, quam recenset Cl. *Süsmilch* in parte secunda egregii operis sui[2], cui in fine adiectae sunt plurimae huiuscemodi tabulae: inquisivi annos: ubi numerus puellorum maxime superaret puellas; memorabiles mihi visi sunt annus 1676, quo nati dicuntur aut potius baptizati 6552 pueruli et 5847 filiolae, dein a. 1698, quo 8426 masculi et 7626 filiolae; denique a. 1717, quo indicantur 9630 masculi et 8845 alterius sexus. Demonstravi autem differentias inte utrumque sexum mutandas esse in ratione subduplicata numerorum 2N ut eadem retineatur probabilitas: hac igitur adhibita correctione inveni nullum esse ex tribus annis allegatis, qui maiori attentione dignus sit, quam si pro 20000 natis excessus puerorum supra puellas fuerit propemodum 900, qui excessus multum adhuc deficit ab 1128.

Attamen non reticebo annum 1749 prae omnibus caeteris longe maxime rarum, quo scilicet baptizati dicuntur 7288 pueruli ac tantum 6172 filiolae; habemus hic excessum puerorum = 1116, dum summa natorum saltem fuit = 13460; ergo praefatus excessus 1116 augendus erit in ratione subduplicata numerorum 13460 ad 20000, qua facta reductione praefatus excessus mutatur in 1361; iam vero excessus iste notabiliter superat excessum 1128, quem non sine ratione supposuimus in longissima serie plurium millium annorum vix semel eventurum; igitur mihi persuadeo errorem irrepsisse in alterutrum numerum 6172 et 7288; multo nimirum facilius est, ut in tabulas tot numeris refertas atque saepissime exscriptas aliquando error irrepat quam ut inaequalitas portentosa locum inveniat; puto autem loco 6172 filiolarum scribendum fuisse 6972; hac nempe facta unius numeri mutatione relatio inter utrumque sexum fit maxime probabilis, quae fuerat tantum non impossibilis. Errorem suspicatus numerum examinavi, qui indicat summam filiolarum baptizatarum intra decennium ab anno 1741 ad finem anni 1750; in tabula pro summa ponitur 70322, quae adhibita mea correctione perfecte ipsi rei convenit; ergo error vel a scriptore vel a typographo fuit commissus, nec dubito quin annales Londinenses coniecturam meam sint confirmaturi.

Liceat verbum addere de tabula baptismali, quam idem auctor pag. 13. affert pro metropoli Austriaca; sola ipsius inspectio mihi stomachum movit; nil continet,

2 J.P. Süssmilch «Die Göttliche Ordnung in den Veränderungen des menschlichen Geschlechts, aus der Geburt, Tod, und Fortpflanzung desselben erwiesen» Berlin 1741 (première édition); cf. également Int. p. 221 h.v.

nec vereor dicere, nisi mera figmenta, vagante calamo conscripta, quam praestigiosa sit haec tabula, absque calculis nostris vix intelligitur nec miror, quod Cl. *Süsmilch* eam dignatus sit egregio suo operi inserere, relata retulit fidem unicuique liberam faciens.

§. 8. Ex praemissis intelligitur, quod sumto numero

$$m > \frac{2\,\mathrm{N}\,(log.\,\overline{a+b} - log.\,2\,b)}{log.\,a - log.\,b}$$

probabilitas, in hypothesi $a > b$, admodum superet probabilitatem pro hypothesi $a = b$; contrarium obtinet quando sumitur

$$m < \frac{2\,\mathrm{N}\,(log.\,\overline{a+b} - log.\,2\,b)}{log.\,a - log.\,b}\,.$$

Scilicet, retenta significatione litterae ϕ, erit tunc ratio inter utramque probabilitatem expressa per $1/\phi$ et cum sit

$$\log.\,\frac{1}{\phi} = -\log.\,\phi\,,$$

habebitur (§. 4.)

$$m = A - \frac{log.\,\phi}{log.\,a - log.\,b}\,;$$

atque, pro exemplo $m = 10000$, fiet (§. 5.)

$$m = 10134 - 43\,\log.\,\phi\,,$$

ubi nunc ϕ designat, quoties probabilitas, in hypothesi $a > b$, superetur a probabilitate pro hypothesi $a = b$. Ponatur iterum $\phi = 10000000000$ atque fiet $m = 10134 - 430$ sive $m = 9704$.

Hanc rem sic intellige. Quaeratur, pro hypothesi $a = b$, probabilitas ut sit numerus puerorum $= 9704$

et invenietur ista probabilitas propemodum $= \dfrac{1}{177 \times 8000}$

sive $= \dfrac{1}{1416000}$;

si minimae huius fractiunculae sumatur $\dfrac{1}{10000000000}$, habebitur pro hypothesi $a = 1.055\ b$ probabilitas ut sit numerus puerorum $= 9704$. Vix animo huiusmodi parvitas concipitur. Denique si in summam colligantur omnes et singulae probabilitates ut numerus puerorum infra 9704 deprimatur atque ponatur ab hac summatione probabilitatem fieri decies maiorem,

fiet probabilitas unita $= \dfrac{1}{1416000000000000}$,

qua neglecta affirmare licet, fieri non posse ut numerus puerorum limites 10564 atque 9704 transgrediatur, si fuerit $a = 1.055\ b$ nec numerus puellarum limites 9436 ac 10296.

§. 9. Nunc aliam aggredior quaestionem, quisnam sit numerus m prolis annuae masculae prae omnibus caeteris maxima probabilitate donatus? Equidem, pro hypothesi $a = b$, in primo schediasmate assumsi absque demonstratione, quia tunc res per se clara est, faciendum esse $m = \mathrm{N}$. At cum inaequalitas supponitur inter a et b, quaestio praesens aliam induit faciem. Recurremus ad formulam in fine paragraphi secundi expositam, quae pro quovis numero m probabilitatem suam exprimit, nempe[3]

$$\frac{2\mathrm{N}.(2\mathrm{N}-1).(2\mathrm{N}-2).(2\mathrm{N}-3)\ldots.(2\mathrm{N}-m+1)}{1.2.3.4.\ldots\ldots\ldots.m\ .\ 2^{2\mathrm{N}}} \times \left(\frac{a}{b}\right)^m \times \left(\frac{2b}{a+b}\right)^{2\mathrm{N}}.$$

In ista formula valor quidem factoris indefiniti decrescere incipit statim ac numerus m ponitur $> \mathrm{N}$; verum enim vero alter factor variabilis $(a/b)^m$ cum continue crescere pergat, apparet locum esse posse, ubi productum ex ambobus factoribus sit maximum; hinc aliqua veluti excentricitas. Locum vero ipsum maximae probabilitatis ex eo definire licebit, quod pro duobus indicibus proximis m et $m+1$ eadem esse debeat probabilitas. Posito autem

$$\frac{2\mathrm{N}.(2\mathrm{N}-1).(2\mathrm{N}-2)\ldots\ldots(2\mathrm{N}-m+1)}{1.2.3.\ldots\ldots\ldots.m} = \mathrm{S}$$

fit probabilitas pro indice m

$$= \mathrm{S} \times \left(\frac{a}{b}\right)^m \times \left(\frac{b}{a+b}\right)^{2\mathrm{N}}$$

pariterque pro indice $m+1$ oritur probabilitas

$$= \frac{2\mathrm{N}-m}{m+1} \times \mathrm{S} \times \left(\frac{a}{b}\right)^{m+1} \times \left(\frac{b}{a+b}\right)^{2\mathrm{N}}.$$

3 $1.2.3.4\ldots\ldots\ldots.\mathrm{m}.2^{2\mathrm{N}}$ corr. de $1.2.3.4\ldots\ldots\ldots\mathrm{m}+2^{2\mathrm{N}}$ (A.dB.)

Facta igitur aequatione inter ambas probabilitates, reperitur

$$\frac{2\mathrm{N}-m}{m+1}\times\frac{a}{b}=1$$

sive

$$m=\frac{2\mathrm{N}a-b}{a+b},$$

quia vero terminus $2\mathrm{N}a$ veluti incomparabiliter maior est quam b, poterit simpliciter poni

$$m=\frac{2\mathrm{N}a}{a+b}$$

atque numerus puellarum sive

$$2\mathrm{N}-m=\frac{2\mathrm{N}b}{a+b}$$

sic ut ambo numeri sint in ipsa ratione a ad b, quod ipsum formulas nostras egregie confirmat.

§. 10. Sic igitur in exemplo nostro, quo posuimus $2\mathrm{N}=20000$, maxima probabilitas incidit in numerum $m=10268$; ultra citraque hunc locum probabilitas decrescit, ab initio quidem lentissime, deinde citius, mox enormiter. Notabimus hic in transitu quod punctum illud, de quo §. §. 4 et 5 diximus, ubi eadem fit probabilitas pro utraque hypothesi, sit in medio positum inter ambo puncta maximae probabilitatis pro utraque hypothesi; est scilicet pro hoc puncto $m=10134$, qui numerus medius est inter 10000 et 10268 atque haec proprietas generaliter locum habet, si parva sit differentia inter a et b.

§. 11. Maxime conducit praefatum locum, qui facit

$$m=\frac{2\mathrm{N}a}{a+b}$$

et pro quo maxima oritur probabilitas, considerare tanquam punctum fixum omnesque calculos ita ponere ut distantia ab hoc puncto tanquam a centro virium examinetur: quae enim dicta sunt nondum satis computum sublevant: igitur opera danda est ut pro quovis indice dato m probabilitas formula aliqua definita determinetur, saltem quam proxime quandoquidem id omni rigore fieri nequit. Hanc viam inivi in primo schediasmate nec certe sine successu; qua de re videatur primo paragraphus quintus; deinde decimus octavus.

§. 12. Ponatur, brevitatis gratia, $\frac{2Na}{a+b}=M$,

sic ut M denotet numerum puerorum maxima probabilitate donatum
atque ponatur index $m=M+\mu$,
ubi μ notabit excessum indicis supra numerum maximae probabilitati respondentem:
ponatur praeterea probabilitas, pro indice $M+\mu$ $=\pi$,
cuius verum valorem iam supra paragrapho secundo atque nono indicavimus at formula indefinita, pro magnis numeris incomputabili, expressum. Animus fert inquirere rursus, annon isti formulae indefinitae alia substitui possit proxime vera et definita; considerabimus quantitates μ et π tanquam coordinatas variabiles. Patet autem ex ipsa formula indefinita fore probabilitatem, pro indice proximo $M+\mu+1$,

$$=\frac{2N-m}{m+1}\times\frac{a}{b}\times\pi$$

sive

$$\frac{2N-M-\mu}{M+\mu+1}\times\frac{a}{b}\times\pi,$$

quae si subtrahatur a probabilitate praecedente π erit differentia utriusque probabilitatis

$$=\pi-\frac{2N-M-\mu}{M+\mu+1}\times\frac{a}{b}\times\pi.$$

Iam vero iterum supponam hanc differentiam esse ad differentiam duorum indicum proximorum, id est, ad unitatem, sicuti $-d\pi$ ad $d\mu$, quod utique absque ullo sensibili errore supponi potest ob proximitatem amborum indicum; haec autem suppositio sequentem subministrat aequationem

$$-\frac{d\pi}{\pi}=\left(1-\frac{2N-M-\mu}{M+\mu+1}\times\frac{a}{b}\right)d\mu.$$

In ista aequatione pro quantitate M restituam eius valorem

$$\frac{2Na}{a+b},$$

ut tanto melius quantitates, quae in fine calculi negligi possint, ab invicem dignosci queant; facta ista restitutione fit

$$-\frac{d\pi}{\pi}=\left(1-\frac{2\mathrm{N}a:(a+b)-\mu a:b)}{2\mathrm{N}a:(a+b)+\mu+1}\right)d\mu$$

vel

$$-\frac{d\pi}{\pi}=\frac{\mu+1+\mu a:b}{2\mathrm{N}a:(a+b)+\mu+1}\,d\mu$$

autdenique

$$-\frac{d\pi}{\pi}=\frac{\mu+1+\mu a:b}{\mathrm{M}+\mu+1}\,d\mu.$$

§. 13. Praemissa aequatio ita est integranda ut posito $\mu=0$ fiat $\pi=\mathrm{Q}$, ubi per Q intelligo probabilitatem maximam, quae locum habet pro indice M aut $\frac{2\mathrm{N}a}{a+b}$. Sic prodit

$$\log.\frac{\mathrm{Q}}{\pi}=\frac{a+b}{b}\,\mu-\frac{a+b}{b}\,(\mathrm{M}+1)\log.\frac{\mathrm{M}+\mu+1}{\mathrm{M}+1}+\log.\frac{\mathrm{M}+\mu+1}{\mathrm{M}+1}.$$

Quia vero haec aequatio inservire tantum debet supputandis exemplis, in quibus numerus μ multo minor est numero M, quandoquidem in caeteris probabilitas fere evanescit nec meretur ut eius ratio habeatur, e re erit in penultimo termino quantitatem

$$\log.\frac{\mathrm{M}+\mu+1}{\mathrm{M}+1}$$

in seriem convertere; in hac serie sufficiet tres primos considerasse terminos atque sic ponere

$$\log.\frac{\mathrm{M}+\mu+1}{\mathrm{M}+1}=\frac{\mu}{\mathrm{M}+1}-\frac{1}{2}\left(\frac{\mu}{\mathrm{M}+1}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{\mu}{\mathrm{M}+1}\right)^3;$$

hoc modo aequatio sic poni poterit

$$\log.\frac{\mathrm{Q}}{\pi}=\frac{a+b}{b}\left(\frac{\mu\mu}{2(\mathrm{M}+1)}-\frac{\mu^3}{3(\mathrm{M}+1)^2}\right)+\log.\frac{\mathrm{M}+\mu+1}{\mathrm{M}+1}$$

vel posito c pro numero cuius logarithmus hyperbolicus unitas est

$$\frac{\mathrm{Q}}{\pi}=\frac{\mathrm{M}+\mu+1}{\mathrm{M}+1}\,c^{\frac{a+b}{b}\left[\frac{\mu\mu}{2(\mathrm{M}+1)}-\frac{\mu^3}{3(\mathrm{M}+1)^2}\right]}$$

sive[4]

$$\frac{\pi}{\mathrm{Q}}=\frac{\mathrm{M}+1}{\mathrm{M}+\mu+1}\,c^{-\frac{a+b}{b}\left[\frac{\mu\mu}{2(\mathrm{M}+1)}-\frac{\mu^3}{3(\mathrm{M}+1)^2}\right]}.$$

4 $\frac{\mu\mu}{2(\mathrm{M}+1)}$ corr. de $\frac{2(\mathrm{M}+1)}{\mu\mu}$ (A.dB.)

Quod si nos magis a scrupulositate relaxare velimus, licebit simplici uti formula,

$$\frac{\pi}{Q} = c^{-\frac{a+b}{2b} \times \frac{\mu\mu}{M}}$$

Haec vero ultima formula perfecte eadem est cum ea, quam exhibui in primo schediasmate §. 18. et quam paragrapho sequente parvula tabella confirmavi[5]; posito namque $a = b$, fit simul $M = N$ atque sic simpliciter oritur

$$\frac{\pi}{Q} = \frac{1}{c^{\frac{\mu\mu}{N}}}$$

§. 14. Praemissa aequatio tanto erit accuratior, quanto minor supponitur differentia inter a et b et quanto simul minor est numerus μ, quod utrumque instituto nostro satis convenit; igitur operae pretium erit hanc aequationem ulteriori examini subiicere.

Restituatur pro litera M valor ipsius paragrapho duodecimo indicatus, nempe $\frac{2Na}{a+b}$; sic erit exponens

$$\frac{a+b}{2b} \times \frac{\mu\mu}{M} = \frac{(a+b)^2}{4ab} \times \frac{\mu\mu}{N};$$

ponatur $b = 1$ et $a = 1 + \alpha$, ubi α ponitur unitate multo minor; habebitur

$$\frac{(a+b)^2}{4ab} = \frac{4 + 4\alpha + \alpha\alpha}{4 + 4\alpha} = 1 + \frac{\alpha\alpha}{4 + 4\alpha}:$$

hic manifeste negligi potest terminus unitati adiectus atque adeo poni $\frac{(a+b)^2}{4ab} = 1$, quo facto fit exponens

$$\frac{a+b}{2b} \times \frac{\mu\mu}{M} = \frac{\mu\mu}{N}$$

et sic potest simpliciter poni

$$\frac{\pi}{Q} = c^{\frac{-\mu\mu}{N}} \quad \text{sive} \quad = \frac{1}{c^{\frac{\mu\mu}{N}}}.$$

Sic igitur, pro omni valore a/b, probabilitas constanter eodem modo exprimitur, modo, loco distantiae termini a medio, intelligatur per μ distantia a termino maxima probabilitate donato, quae profecto proprietas omnem meretur attentionem.

5 Cf. III. 7a - St. 59a p. 336 h.v.

§. 15. Sed et ipsa probabilitas termini, quae maxima est, variante ratione a/b, proxime eadem manet pro eodem numero μ eodemque numero N, haecque altera proprietas non minus notatu digna est atque totum nostrum argumentum egregie illustrat. Id vero sic demonstro.

Sit in hypothesi $a=b$,
maxima probabilitas $=q$,
qualis est cum sumitur $m=\mathrm{N}$;
deinde, pro eodem numero N, ponatur aliquantilla inaequalitas inter a et b atque pro ista altera hypothesi dicatur maxima probabilitas $=\mathrm{Q}$;
haec autem §. 9. incidit in indicem $\dfrac{2\mathrm{N}a}{a+b}$:
sumatur differentia inter ambos indices N et $\dfrac{2\mathrm{N}a}{a+b}$,
quae erit $=\dfrac{a-b}{a+b}\mathrm{N}$.
Sic erit (pro hypothesi $a=b$) probabilitas termini, cuius index indicatur per $\dfrac{2\mathrm{N}a}{a+b}$

$$=q:c^{\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2\mathrm{N}},$$

quia scilicet pro μ ponendum est $\dfrac{a-b}{a+b}\mathrm{N}$;
haec vero ultima probabilitas, si multiplicetur per $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m\times\left(\dfrac{2b}{a+b}\right)^{2\mathrm{N}}$
dabit, vi paragraphi secundi, probabilitatem Q pro eodem indice $\dfrac{2\mathrm{N}a}{a+b}$,
qui maxima probabilitate in altera hypothesi donatus erit. Sic itaque habebitur

$$\mathrm{Q}=\frac{q}{c^{\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2\mathrm{N}}}\times\left(\frac{a}{b}\right)^m\times\left(\frac{2b}{a+b}\right)^{2\mathrm{N}}$$

ubi supponitur $m=\mathrm{N}+\mu$
sive pro hoc negotio $m=\dfrac{2\mathrm{N}a}{a+b}$,
hacque facta substitutione fit

$$\mathrm{Q}=\frac{q}{c^{\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2\mathrm{N}}}\times\left(\frac{a}{b}\right)^{2\mathrm{N}a:(a+b)}\times\left(\frac{2b}{a+b}\right)^{2\mathrm{N}}.$$

Nunc demonstrabo, quod si a et b parum inter se differant, censeri possit factor

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{2\mathrm{N}a:(a+b)} \times \left(\frac{2b}{a+b}\right)^{2\mathrm{N}} = c^{\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2 \mathrm{N}}$$

sic ut possit assumi $\mathrm{Q}=q$; hunc in finem ponatur rursus $b=1$ et $a=1+\alpha$ intelligendo per α parvulam fractionem; sic fiet

$$\frac{2\mathrm{N}a}{a+b} = \frac{2+2\alpha}{2+\alpha}\mathrm{N} = \left(1+\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{4}\alpha\alpha+\frac{1}{8}\alpha^3\right)\mathrm{N};$$

ergo, sumtis logarithmis hyperbolicis, praefata aequalitas demonstranda abit in hanc alteram:

$$\left(1+\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{4}\alpha\alpha+\frac{1}{8}\alpha^3\right)\mathrm{N}\log.\frac{a}{b}+2\mathrm{N}\log.\frac{2b}{a+b} = \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2\mathrm{N}.$$

Quod si nunc porro pro a et b substituantur valores $1+\alpha$ et 1

atque quantitates $\log.\frac{a}{b}$; $\log.\frac{2b}{a+b}$ et $\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2$

in series convertantur, neglectis terminis in quibus α dimensionem tertiam transcendit, prodibit

$$\log.\frac{a}{b}, \quad \text{sive} \quad \log.(1+\alpha)=\alpha-\frac{1}{2}\alpha\alpha+\frac{1}{3}\alpha^3;$$

deinde

$$\log.\frac{2b}{a+b} = -\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{8}\alpha\alpha-\frac{1}{24}\alpha^3;$$

denique

$$\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2 = \frac{1}{4}\alpha\alpha-\frac{1}{4}\alpha^3;$$

his autem substitutis terminis, si multiplicationes actu instituantur neglectis porro terminis, in quibus α tertiam dimensionem transcendit, aequatio obtinetur perfecte identica. Ergo absque ulla haesitatione potest censeri $\mathrm{Q}=q$.

Sic argumentum nostrum, quod prima fronte videbatur valde tenebricosum, subita luce elucescit; totum enim negotium in eo positum est, ut pro quovis valore a/b index μ numeretur a termino maxima probabilitate donato, sive ut pro μ accipiatur excessus puellorum supra numerum $\frac{2\mathrm{N}a}{a+b}$:

hoc facto erunt variationes probabilitatum in omni exemplo proxime eaedem pro iisdem numeris μ sive affirmative sive negative sumtis. Sed et ipsae probabilitates, ubi maximae sunt, in omni exemplo, fine ullo scrupulo, eaedem censeri possunt, modo inter a et b differentia non admodum magna accipiatur. Sic quoque ratio apparet proprietatis illius, cuius mentionem fecimus §. 10. in fine.

§. 16. Ex praemissis patet, quemadmodum probabilitates possint quam proxime determinari pro quovis natorum numero, pro quolibet puellorum numero et pro qualibet ratione inter a et b. En totum processum! Quaeratur primo maxima probabilitas pro hypothesi $a=b$, quae vi paragraphi septimi prioris schediasmatis

$$=\frac{1.12826}{\sqrt{(4\mathrm{N}+1)}}$$

atque haec probabilitas proxime eadem·manebit, cum maxima est, pro omni alia ratione inter a et b; imo poterit simplicius poni probabilitas maxima

$$=\frac{0.56413}{\sqrt{\mathrm{N}}}\,.$$

Deinde sumatur numerus $\frac{2\mathrm{N}a}{a+b}$,

qui indicat numerum puellorum maxima probabilitate gaudentem, quo facto detur

qualiscunque alius puellorum numerus expressus formula $\frac{2\mathrm{N}a}{a+b}+\mu$;

dico fore probabilitatem proxime

$$=\frac{0{,}56413}{\sqrt{\mathrm{N}}}\times\frac{1}{c^{\mu\mu:\mathrm{N}}}\,.$$

Nec puto hanc rem commodius simulque accuratius confici posse, cum magnus est numerus N. Si parvulus fuerit iste numerus, totum negotium omni rigore absolvetur ope formulae in fine paragraphi secundi expressae. Si denique mediocris, viderit analysta, utram alteri formulam praeferre velit.

§. 17. Integrum processum singulari exemplo illustrabo ex tabulis[6] *Süsmilchianis* selecto, quamvis paulo minus idoneo ob enormitatem numeri nostri μ: scilicet Cel. *Süsmilch* in parte secunda operis sui, cui in fine plurimae adiectae sunt tabulae, pag. 13. tab. IV. refert exemplum pro metropoli Austriaca ad annum 1728, quod natae fuerint 3102 filiolae ac 2020 puelli; hic igitur

6 Cf. note 2 p. 345 h.v.

$$N=\frac{3102+2020}{2}=2561$$

atque posito rursus $\frac{a}{b}=1.055$

fit $\frac{2Na}{a+b}=2651;$

unde $\mu=2020-2651=-631;$
ergo pro ipsissimo hoc casu speciali probabilitas est

$$=\frac{0.56413}{\sqrt{2561}}\times\frac{1}{c^{155}};$$

ista vero fractiuncula minor est, quam unitas applicata ad unitatem sexaginta novem *nullionibus* praefixam, cuiusmodi parvitas omnem eludit conceptum imo si omnes addamus probabilitates, quibus numerus puellorum infra 2021 descendere poneretur, vix inde triplicabitur praefata probabilitas; igitur si quaestio fuerit quanta sit probabilitas ut inter 5122 natos numerus puellorum infra 2021 deprimatur, dico numerum maiorem quam est ternarius sexaginta octo *nullionibus* praefixus, certari posse contra unum non fore ut hoc contingat; an Viennae contigerit et an tot repetitis vicibus aliud simile portentum contigerit, prouti citata tabula refert, iudicent alii. Nec praetexatur fieri posse, ut Viennae facilius et frequentius filiolae procreentur ac puelli; in eadem enim tabella ad annum 1724 refertur, puellas baptizatas fuisse tantum 1422 puerulos autem 3005, quae enormis inaequalitas alteri contraria, si rursus calculo subiiciatur, ab omnibus pro *moraliter impossibili* habebitur. Tantae profecto irregularitates nec legi naturali nec sorti ullo modo adscribi possunt.

§. 18. At si integer natorum numerus sit perexiguus, tunc casus qui apparent maxime extraordinarii, multo minus sunt improbabiles quam praesumi possit; exemplum allegabo, quod mihi certum est. Nempe anno 1763 in parvo Ditionis Basileensis oppido, cui nomen *Liechstahl* est, nati sunt 20 filioli atque 37 puellae. Huiusmodi natorum partitio, ubi numerus puellarum fere duplus est puerulorum, equidem non potest non esse valde rara, at ob natorum paucitatem nihil habet, quod cum praefatis exemplis ullo modo comparari possit. Ecce calculum numericum.

Habemus scilicet

$$2N=57$$

atque adeo (stante porro $a/b=1055/1000$) $\frac{2Na}{a+b}=29,26;$

igitur $$\mu = 20 - 29{,}26 = -9{,}26$$

atque $$\frac{\mu\mu}{\mathrm{N}} = 3{,}01\,;$$

hinc $$c^{\mu\mu:\mathrm{N}} = 20{,}08$$

ergo probabilitas quaesita

$$= \frac{0{,}56413}{20{,}08\sqrt{28{,}5}} = \frac{1}{190},$$

quae quidem valet pro ipso casu, qualis fuit. Igitur pro 57 natis probabile est ut intra 190 annos ipsissimus ille casus, qualis contigit, semel contingat. Quia vero a sola puerorum paucitate notabilis fuit, merito adiiciendae sunt probabilitates singulorum casuum, ubi numerus puellorum magis adhuc sit depressus et tunc summa omnium harum probabilitatum ascendit propemodum ad $1/70$; adeoque si numerus omnium observationum annuarum fuerit 70, probabile fuit ut semel contingeret id ipsum quod contigit, nempe ut de 57 natis proles mascula infra 21 deprimeretur; caeterum reductionem probabilitatis $1/190$ ad $1/70$ obiter feci; fateor etiam calculos numericos, ob parvitatem numeri N et magnitudinem relativam numeri μ, non omni quidem gaudere accuratione; attamen parvulos esse errores, qui facile negligi possint, contendo.

§. 19. Intelligimus nunc porro, quod numerando numeros μ ab numero, in quem maxima probabilitas cadit, eadem sit probabilitas pro eodem numero μ, quaecunque intercedat ratio inter a et b, modo haec ratio parum ab aequalitate recedat, intelligimus, inquam, quod et summa probabilitatum pro eodem terminorum numero μ debeat esse eadem in primo autem schediasmate, tabulam dedi cuius ope determinavi limites intra quos, ut numerus puerorum subsistat, aequa sit certatio; iam dico eosdes limites assumi posse pro ratione qualicunque parum inaequali inter a et b modo fiat ut maxima probabilitas incidat in medium horum limitum. Vidimus autem in fine paragraphi duodecimi pro hypothesi $a=b$ atque $2\mathrm{N}=20000$, quod hi limites sint $9952\frac{3}{4}$ et $10047\frac{1}{4}$, qui aequidistant a numero 10000, uterque nimirum numero $47\frac{1}{4}$; iam igitur dico quod mutata ratione a ad b eaque

posita $$= \frac{1055}{1000},$$

manente eodem natorum numero, similis conditio incidet in limites

$$9952\tfrac{3}{4} + 268 \quad \text{et} \quad 10047\tfrac{1}{4} + 268$$

sive in limites

$$10220\tfrac{3}{4} \quad \text{et} \quad 10315\tfrac{1}{4}$$

aequidistantes a termino

$$10268$$

maxima probabilitate donato, (§. 10.) ubi communis distantia iterum est $47\frac{1}{4}$. Ergo rursus aeque probabile est ut numerus puellorum hosce limites transgrediatur vel non transgrediatur. Miratus sum tantam horum terminorum angustiam.

Sed et porro in praecedente schediasmate monui paragrapho decimo tertio, distantias limitum diminui proxime in ratione subduplicata numerorum, qui omnium natorum summam indicant. Sic pro 5000 natis aequa erit certatio proxime, fore ut numerus puellorum non maior sit quam

$$2500+67+24 \quad \text{sive} \quad 2591$$

nec minor quam

$$2500+67-24 \quad \text{sive} \quad 2543$$

qui limites simpliciter indicantur

$$2567 \pm 24.$$

Si in Gallia tota proles annua ponatur 600000 erit proles mascula media $=308040$ et aequa propemodum erit sponsio, excessum aut defectum prolis masculae numeratae non fore maiorem quam 260, si, cum statu medio conferatur, posito nimirum $a/b = 1.055$.

§. 20. Hasce de limitibus aeque probabilibus disquisitiones utiles fore sperabam, ut tutius et accuratius ferri posset iudicium de vera lege naturali sive de vera proportione inter numeros a et b: an ubivis terrarum? an omni tempore sibi constat? an omnes variationes. quae reliquae sunt. sorti sunt adscribendae? an ipsa lex naturalis aliquam patitur variationem? De his adhuc dum haesito: nimis parvula videtur differentia inter a et b nimiumque efficaciae sortis involuta quam ut maximo observationum numero accurate determinari possit: aliquando ipsi numeri, qui exacte observari potuissent, non sunt omni suspicione certiores. Ratio $a:b$, quam legi naturali adscribo, non potest utique aliter quam ex magno observationum numero deduci; plures autem, deductiones huiusmodi concipi possunt; modus simplicissimus, quo assumitur esse a ad b, ut summa puellorum natorum ad summam filiolarum natarum, mihi adhuc caeteris videtur praeferendus. Attamen non spernenda puto criteria, quae in limitibus aequa probabilitate ditatis posita sunt; hac de re paulo disertius dicam.

§. 21. Quo maior est summa natorum, eo tutior est ad rationem a : b determinandam. Per integros 95 annos Londini nati sunt 737629 filioli atque 698958 puellae; unde optime statuitur

$$\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}} = \frac{737629}{698958} = 1.055$$

(apud *Süsmilchium* parvulo errore ponitur 1.054 vid. pag. 21[7]). Ab hoc valore medio observationes aliquando notabiliter recedunt, etiamsi integra decennia accipiantur: decennium 1721 ... 1730 exhibet 89217 puellas et 92813 filiolos sicque $a/b = 1.040$, qui valor inter omnia decennia minimus est; maximus fit pro septennio 1664 ... 1670, quo nati sunt 37283 puellae et 40306 masculi; unde $a/b = 1.081$ ex summatione praefati decennii atque septennii emergit $a/b = 1.054$, qui valor cum hypothesi communi satis convenit. Decennium 1681 ... 1690 maiorem indicat aberrationem; ponitur enim $a/b = 1.097$; at error fuit commissus et ponendum erat 1.056 loco 1.091. huius modi errores se ipsos produnt; simul autem aliorum commissorum errorum, qui nullo modo divinari possunt, metum faciunt. Attamen ponamus verum valorem $a/b = 1.055$ fueritque pro decennio 1721 ... 1730, $2\mathrm{N} = 182031$ (loco numeri 92813 summam prolis masculae indicantis ponendus erat numerus 92814); sic prodit numerus

$$\frac{2\mathrm{N}a}{a+b} = 93451,$$

qui maxima probabilitate gaudet pro numero prolis masculae indicando; sorte autem evenit ut numerus iste tantum esset 92814; igitur aberratio sorti debita hic fuit $= 637$ pro integra generatione 182031; ponamus nunc generationem multo maiorem adhuc, veluti 4000000; vidimus autem passim aberrationes pro eodem gradu probabilitatis esse in ratione supduplicata generationum; erit igitur nunc aberratio aeque probabilis

$$= 637 \times \sqrt{\frac{4000000}{182031}} = 2986:$$

sed est porro nunc

$$\frac{2\mathrm{N}a}{a+b} = 2053528,$$

qui numerus indicat valorem prolis masculae maxime probabilem, posito $a/b = 1.055$ atque tunc oritur numerus omnium filiolarum 1946472; subtrahamus errorem 2986 sorti debitum a numero puellorum eundemque addamus numero filiolarum, habebimus numeros 2050542 et 1949458, pro utroque sexu, qui eadem facilitate contingere possunt pro generatione 4000000 atque numeri 92814 et 89217 contigerunt pro generatione 182031; est autem $1949458 : 2050542 = 1000 : 1052$. Igitur si vel certa sit posito $a/b = 1.055$, poterit tamen contingere ut vel in generatione

7 Cf. note 2 p. 345 h.v.

4000000 infantum indicetur $a/b = 1.052$; potest porro error a sorte oriundus eadem facilitate contingere in excessu tuncque fieret ratio $a/b = 1.058$. Ergo observationes ducentorum annorum Londini instituendae, etiamsi fuerint accuratissimae, nondum sufficient ad tollendam haesitationem 0.006 in stabilienda lege naturali sive ratione a/b. Evagationes multo maiores esse possunt in generationibus longe minoribus, quod tabulae confirmant.

§. 22. Unicum superaddam de limitibus mediis vel aeque probabilibus aberrationum sorti debitarum; sit scilicet rursus numerus

$$\frac{2\mathrm{N}a}{a+b} \pm \mu,$$

ubi

$$\frac{2\mathrm{N}a}{a+b}$$

exprimit numerum puellorum secundum legem naturae et μ aberrationem; vidimus fore pro $2\mathrm{N} = 20000$, $\mu = 47\tfrac{1}{4}$

et pro quocunque alio valore $\mu = 47\tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{2\mathrm{N}}{20000}} = 0{,}4725\sqrt{\mathrm{N}}$;

igitur aeque probabile erit ut sit μ maior vel minor quam $0{,}4725\sqrt{\mathrm{N}}$ atque pro pluribus annis eventus fortuiti huic legi non male respondere debent, sic ut toties proxime unum contingat quam alterum, nec parvulae inaequalitates valoris a/b hanc proprietatem evertant. Consului itaque in tabula Londinensi decennium 1721 - - - - 1730 atque posito calculo successum habui fere supra expectationem. En tabellam Londinensem calculis meis munitam, ubi columna quinta supponit

$$\frac{a}{b} = 1.055$$

vel

$$\frac{2\mathrm{N}a}{a+b} = \frac{1055}{2055} \times 2\mathrm{N};$$

columna autem septima supponit

$$\frac{a}{b} = 1.040$$

atque adeo

$$\frac{2\mathrm{N}a}{a+b} = \frac{1040}{2040} \times 2\mathrm{N}:$$

anni	puellae	puelli	ſumā 2 N	$\frac{1055}{2055} \times 2$ N	aberratio μ	$\frac{1040}{2040} \times 2$ N	aberratio μ
1721	8940	9430	18370	9431	+ 1 NB.	9365	− 65
1722	9014	9325	18339	9414	+ 89	9349	+ 24 NB.
1723	9392	9811	19203	9858	+ 47 NB	9790	− 21 NB.
1724	9468	9902	19370	9944	+ 42 NB.	9875	− 27 NB.
1725	9198	9661	18759	9630	− 31 NB.	9563	− 98
1726	9203	9605	18808	9655	+ 50	9588	− 17 NB.
1727	9011	9241	18252	9370	+ 129	9305	+ 64
1728	8155	8497	16652	8548	+ 51	8489	− 8 NB.
1729	8324	8736	17060	8758	+ 22 NB.	8697	− 39 NB.
1730	8512	3606	17118	8788	+ 182	8727	+ 121

Parvula haec tabella integram theoriam nostram, tam puram quam appropinquatam, egregie confirmat. In columna sexta aberratio 47 signo NB. notata est, etiamsi limites definitos tantillum transgrediatur; in columna sexta signa affirmativa, in columna octava signa negativa praevalent, cum tamen aberratio ad utramque partem aequali facilitate oriri possit; id ipsum extraordinariae, quae forte contigit, tribuo sortis energiae. His vero diutius non immorabor contentus methodo exposita, qua simul plura alia argumenta affinia cum successu tractari poterunt.

Diiudicatio maxime probabilis plurium observationum discrepantium atque verisimillima inductio inde formanda.

Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae. 1777-1 (1778) p. 3-23.
III. 8 - St. 72

§. 1. Astronomis potissimum, genti sagacissime scrupulosae, diiudicandas proponam haesitationes, quas mihi aliquoties feci, de regula, ad quam confugiunt omnes, quoties plures de eadem re factas prae se habent observationes aliquantulum inter se discrepantes; scilicet observationes tunc omnes in unam colligunt summam, quam postmodum dividunt per observationum numerum; quod a divisione oritur, pro vera accipiunt quantitate quaesita, donec aliunde meliora et certiora fuerint edocti. Hoc modo si singulae observationes eiusdem veluti ponderis censeantur, incidunt in centrum gravitatis, quod pro vera obiecti explorati positione accipiunt; haec quoque regula convenit cum ea, qua utuntur in arte coniectandi, si omnes aberrationes in observando commissae aeque facile contingere supponantur.

§. 2. An vero recte statuitur, singulas observationes eiusdem esse ponderis vel momenti, sive in quosvis errores aeque pronas esse? an errores aliquot graduum aeque facile committentur atque alii totidem minutorum? an eadem ubique probabilitas? absona plane foret haec affirmatio; haec procul dubio causa est, quod malint astronomi prorsus reiicere observationes, quas iudicant nimium a veritate recedere, caeteras vero retineant, imo plane ad eundem censum referant. Id vero dum faciunt, satis et plus satis monstrant, multum abesse, ut idem statuant pretium singulis a se factis observationibus, dum alias reiiciunt totas, alias omnes non solum retineant sed insuper eodem modulo metiantur; nec video limites, quos ultra citrave sint vel penitus reiiciendae vel integrae retinendae; quin forte evenire potest, ut observatio, quae reiicitur, optimam praestitura fuisset reliquis correctionem. Attamen non improbo ubiquaque consilium reiiciendae unius alteriusve observationis, imo probo, quoties inter observandum sinistri aliquid acciderit, quod per se ipsum protinus scrupulum iniiciat observatori, antequam consulverit eventum eumque cum caeteris observationibus contulerit; si nihil tale habeat, quod conqueratur, existimo admittendas esse singulas observationes, qualescunque fuerint; modo observator sibi sit conscius omnis adhibitae industriae.

§. 3. Liceat observatorem comparare cum sagittario, tela sua in propositam metam coniiciente, adhibita omni, qua pollet, industria. Detur ipsi pro meta integra linea verticalis, ita ut singulae aberrationes sub unica directione horizontali aestimandae veniant; putetur meta linearis depicta in medio plano verticali, perpendicülariter ad axem visionis erecto, totumque planum ab utroque latere in fascias verticales, angustas sed singulas eiusdem latitudinis, divisum sit. Quod si nunc persaepe sagitta vibrata fuerit et pro quovis iactu locus illisionis examinatus eiusque distantia a meta verticali in charta notetur, etiamsi eventus minime possit exacte praedici, multa tamen sunt, quae cum ratione praesumi debent et quae imprimis ad rem nostram facere poterunt, si modo nulli alii committantur errores, quam qui in utramque partem aeque faciles sunt et quorum eventus penitus incerti, sola veluti sorte haud vitabili deciduntur; sic in astronomia pro errore non habetur, quodcunque *a priori* correctionem admittit. Factis omnibus quas theoria docet correctionibus, quod tunc reliquum est pro conciliandis singulis observationibus aliquantulum inter se discrepantibus, hoc solius artis coniectandi opus est; quid proprie inter observandum acciderit, hoc, per ipsam hypothesin, profunde ignoramus, sed ipsa haec ignorantia asylum erit, ad quod confugere cogimur, dum consistimus in eo, non quod verissimum sed quod verisimillimum, nec certum sed probabilissimum, ut ars illa docet. An vero status iste semper et ubique competat medio arithmetico adhiberi solito, non sine ratione dubitari potest.

§. 4. Errores, in observando inevitabiles, in singulas utique cadere possunt observationes; attamen unaquaevis observatio suo gaudet iure nec liceret ullam vim ipsi inferre, si sola facta fuisset; igitur quaevis observatio per se sarta atque tecta sit oportet; nulli aliud statuendum est pretium, quam quod ipsi compertum fuit; quia vero sibi contradicunt, pretium statuendum erit toti observationum complexui intactis partibus. Sic singulis observationibus certus quidam error attribuitur; existimo autem, quod inter infinitos modos, quibus observationum errores contingere potuerunt, is seligendus sit, qui maximo probabilitatis gradu, pro integro observationum complexu, donatus fuerit.

Regulam hanc quam propono ultro admittent omnes, si modo pro quavis observatione probabilitatis gradus ratione puncti, quod pro vero assumitur, definiri possit. Equidem libens fateor, hanc postremam conditionem haud esse determinatam, simul autem mihi persuadeo, non esse omnia perinde incerta, atque meliora dari posse, quam quae a regula communiter recepta expectari possint; videamus, annon quaedam iure merito praesumi debeant in hoc argumento, quae non nihil ad maiorem probabilitatem conferant. Examen incipiam a generalioribus.

§. 5. Si innumeros veluti iactus fecerit sagittarius, de quo §. 3. verba feci, et quidem omnes tota sua, qua pollet, industria; sagittae ferient modo fasciam primam metae proximam, modo secundam, modo tertiam et sic porro, idque perinde intelligendum est de utroque latere an dextro an sinistro; annon per se clarum est, tanto densiores et frequentiores praesumendos esse ictus in unamquamvis fasciam, quanto propius haec fuerit posita a meta? si omnes in plano erecto loci utcunque a meta distantes essent aeque expositi, nihil valeret dexterrimus iaculator prae caeco. Id tamen statuunt tacite, qui regula utuntur communi in aestimandis variis observationibus discrepantibus, quando nullo discrimine omnes habent. Hoc igitur modo unius cuiusvis aberrationis gradus probabilitatis *a posteriori* determinari aliquatenus posset, cum dubium non sit pro magno iactuum numero, quin probabilitas sit ut numerus iactuum impingentium in fasciam ad datam a meta distantiam positam.

Porro non est dubium, quin maxima aberratio suos habeat limites, quos nunquam transgrediatur et quidem tanto angustiores, quanto exercitatior atque dexterior fuerit observator. Extra hosce limites omnis probabilitas nulla est; a limitibus versus mediam metam increscet probabilitas atque maxima erit in ipsa hac meta.

§. 6. Praefatae annotationes aliquam sistunt ideam de scala probabilitatum pro omnibus aberrationibus, quam quisque observator sibimet ipsi formare debeat, non quidem ad amussim veram, sed tamen naturae quaestionis haud male accommodatam; meta proposita est veluti centrum virium, in quod nituntur observatores; his vero conatibus innumerae opponuntur imperfectiones minimaque alia obstacula latitantia, quae parvulos iniicere possunt observationibus errores fortuitos, alios conspirantes ad eandem plagam, alios sibi invicem contrarios, prouti fortuna fuerit plus minusve infesta. Intelligitur hinc, aliquam esse relationem inter errores commissos, et ipsam veram positionem centri virium ita ut pro alia metae positione aliter aestimandus sit fortunae eventus: hoc modo incidimus proprie in problema, quo determinanda est positio metae quam maxime probabilis ex cognitis aliquot ictuum locis. Ex allatis sequitur, quod ante omnia scala concipienda sit inter varias distantias a centro virium, quod in ipso scopo vel meta positum erit, et respondentes probabilitates: utcunque vaga sit huius scalae determinatio, videtur tamen variis subiici axiomatibus, quibus si satisfaciamus, non possimus non in meliora incidere, quam si ponamus singulas aberrationes utcunque magnas aequa facilitate committi atque adeo aequa probabilitate esse donatas. Concipiamus lineam rectam, in qua diversa puncta sint positione data, quae nimirum diversarum observationum eventus indicent; notetur in hac linea punctum aliquod intermedium, quod pro vera positione determinanda accipiatur; ex singulis punctis erigantur perpendiculares, quae probabilitates, cuivis puncto convenientes exprimant; si curva ducatur per extremitates singularum perpendicularium, haec nobis scala erit probabilitatum, de qua sermo est.

§. 7. Ad huius descriptionis sensum mihi verisimile sit, sequentia scalae probabilitatum vix denegari posse lemmata.

(*a*) Ex eo, quod aberrationes a vero puncto intermedio ad utramque partem sint aeque-faciles, sequitur, scalam duos habituram esse ramos perfecte similes et aequales.

(*b*) Frequentiores utique erunt atque adeo probabiliores prope a centro virium observationes simulque tanto rariores, quanto magis ab isto centro recedunt; ergo scala ab utraque parte verget ad lineam rectam, in quam coniecta censemus loca observata.

(*c*) Intensitas probabilitatis maxima erit in medio, ubi centrum virium locatum supponimus, eritque tangens scalae pro hoc puncto parallela cum praefata linea recta.

(*d*) Si verum est, quod autumo, observationes vel inauspicatissimas suos habere limites, quos quisque observator sibimet ipsi optime statuet, sequitur scalam recte ordinatam in ipsis limitibus esse pertacturam ad observationum lineam; etenim pro ambabus extremitatibus evanescit tota probabilitas errorque maior sit impossibilis.

(*e*) Denique ex eo, quod ambae aberrationes maximae tanquam limites censentur inter id, quod contingere potest et quod fieri nequit, oportet ut ultima scalae particula, ab utroque latere, praecipitanter tendat ad lineam, in qua puncta observata locantur, sic ut tangentes in punctis extremis fiant ad eandem lineam propemodum perpendiculares et ut ipsa scala indicet, transgressum fieri vix posse ultra limites suppositos; nec tamen haec conditio omnem requiret rigorem, si modo haud nimis considenter erroribus limites posueris.

§. 8. Quod si iam super linea, quae totum aberrationum possibilium campum repraesentat, veluti super axe construatur semi ellipsis cuiuscunque parametri, haec profecto haud male praefatis conditionibus satisfaciet; parameter autem ellipsis ideo arbitraria est, quod hic tantum de proportione inter probabilitates, pro quavis aberratione militantes, sermo sit; utcunque elongata vel compressa fuerit ellipsis super eodem axe constructa, idem praestabit officium, quod indicat non esse, ut nimis simus soliciti de accurata scalae descriptione. Licebit adeoque ipsum adhibere circulum, non ut geometrice verum sed ut vero multo propiorem, quam est linea recta indefinita axi parallela, quae singulas observationes supponit aeque ponderosas atque probabiles, utcunque a vera positione distantes; est quoque haec scala circularis aptissima calculis numericis; hoc interim in antecessum monuisse e re erit, utramque hypothesin ad idem recidere, quoties singulae aberrationes pro infinite parvis habentur; ita quoque conspirant ambae hypotheses, si radius semicirculi auxiliaris ponatur infinite magnus aeque ac si aberrationibus nulli limites essent circumscripti. Hoc modo si aberratio observationis a vera positione consideretur tanquam sinus alicuius arcus circularis, repraesentabitur probabilitas illius observationis per cosinum eiusdem arcus. Liceat semicirculum subsidiarium, quem nunc descripsi, epitheto *moderatoris* insignire; ubi autem centrum ponitur istius semicirculi, ibi vera positio, observationibus quam maxime conveniens, statuenda est. Equidem precaria aliquo usque, at certissime communi praeferenda est hypothesis nostra nec unquam intelligentibus periculosa erit, quoniam eventus, quem statuent, semper erit maiori probabilitate donatus, quam si methodo communi adhaerescant; cum ex natura rei decisio certa non detur, nil superest, quam ut probabilius praeferatur minus probabili.

§. 9. Methodum istam philosophandi triviali quodam illustrabo exemplo: conciliandae proprie sunt observationes discrepantes; ergo de differentia observationum agitur; quod si autem aleator una cum alea tres fecerit iactus, quorum secundus primum uno puncto, tertius secundum duobus punctis excesserit, iactus tribus modis oriri potuerunt, nempe 1.2.4 vel 2.3.5 vel 3.4.6; horum iactuum nullus duobus caeteris est praeferendus; singuli sunt per se aeque probabiles; si praeferas modum medio loco positum, nempe 2.3.5, id absque ulla ratione feceris; simile quid contingit, si observationes pro parte eventuales, sive astronomicas sive alius generis, pro aeque probabilibus haberi velis; iam vero finge aleatorem iactibus duarum alearum, ter iterum repetitis, eundem plane habuisse eventum; tunc octo diversis modis hunc eventum obtinere potuit, nempe 2.3.5; 3.4.6; 4.5.7; 5.6.8; 6.7.9; 7.8.10; 8.9.11 et 9.10.12; at multum abest, ut eorum singuli sint aeque probabiles; notum enim est, probabilitates respectivas progredi ut numeri 8; 30; 72; 100; 120; 90; 40 et 12; ex hac autem scala cognita iure concludo potiori, modum contigisse quintum ceu maxima probabilitate donatum, quam ullum alium, atque sic tres iactus binarum alearum fuisse 6, 7 et 9; nemo tamen inficias ibit, potuisse forte fortuna modum primo loco positum 2, 3 et 5 contingere, utut tantum decima quinta probabilitatis parte, quae modo quinto competit, donatum; sic nihil aliud facio quam quod, seligere coactus, seligam quod maxime est probabile. Quamvis istud exemplum nondum plane quadret ad argumentum nostrum, intelligitur tamen ex illo, quid disquisitio probabilitatum ad diiudicandos casus conferre possit. Iam vero rem ipsam propius aggredior.

§. 10. Velim ante omnia, ut quisquis observator probe secum perpendat atque aestimet maximum errorem, quem nunquam se transgressurum, quotiescunque observationem repetat, moraliter certus sit, si vel omnes Deos Deasque offendat iratas; sit ipsemet dexteritatis suae iudex nec severus nec blandus. Nec tamen admodum multum refert sive congruum sive quodammodo temerarium ea de re tulerit iudicium; tum radium *circuli moderatoris* faciat maximo errori praememorato aequalem; sit radius iste $=r$ atque proin latitudo totius campi ambigui $=2r$; si hac de re praecepta desideres omnibus observatoribus communia, suadeo, ut iudicium demum componas ad ipsas, quas feceris, observationes; si enim differentiam inter duas observationes extremas duplices, sat tuto, mea sententia, ea uteris pro diametro circuli moderatoris vel, quod eodem recidit, facies radium aequalem differentiae inter duas observationes extremas; imo sufficiet fortasse sesquiplicare hanc differentiam ad formandam diametrum circuli, si plures institutae fuerint observationes; ego quidem duplicarem pro tribus vel quatuor observationibus, ac sesquiplicarem pro pluribus. Ne vero haec vagatio quemquam offendat, haud abs re erit monuisse, quod si infinitum faciamus semicirculum nostrum moderatorem; tunc demum incidamus in regulam communiter adhibitam pro medio arithmetico; si vero circulum diminuamus quantum fieri absque contradictione potest, obtineamus mediam inter duas observationes extremas, quam regulam pro pluribus observationibus institutis, minus plerumque fallere vidi, quam credideram nondum explorata re.

§. 11. His omnibus praeparatis denique superest, ut positio circuli moderatoris determinetur, quandoquidem in huius circuli centro singulae observationes veluti concentratae censeri debeant. Deducitur autem praefata positio ex hoc principio, quod totus observationum complexus pro illo situ facilius proindeque probabilius contingat, quam pro ulla alia circuli positione; habebimus sic verum probabilitatis gradum pro toto observationum complexu, si pro singulis observationibus institutis respondentem probabilitatem notemus atque omnes probabilitates inter se multiplicemus, plane ut feci §. 9. Deinde productum, quod a multiplicatione oritur, differentietur tandemque hoc differentiale ponatur $=0$. Hoc modo aequationem obtinebimus, cuius radix dabit distantiam centri a dato aliquo loco.

Ponatur radius circuli moderatoris	$=r$;
minima observatio	$=\mathrm{A}$;
secunda	$=\mathrm{A}+a$;
tertia	$=\mathrm{A}+b$;
quarta	$=\mathrm{A}+c$;
	etc.
distantia centri semicirculi moderatoris a minima observatione	$=x$,

ita ut $\mathrm{A}+x$ denotet quantitatem, quae probabilissime ex omnibus observationibus praesumenda sit;

erit, per hypothesin nostram, probabilitas, pro sola prima observatione, exprimenda

per	$\sqrt{rr-xx}$;
pro secunda observatione per	$\sqrt{rr-(x-a)^2}$;
deinde per	$\sqrt{rr-(x-b)^2}$;
postea per	$\sqrt{rr-(x-c)^2}$

et sic porro. Postmodum velim secundum praecepta artis coniectandi, ut singulae probabilitates inter se multiplicentur, quo facto habebitur

$$\sqrt{rr-xx}\times\sqrt{rr-(x-a)^2}\times\sqrt{rr-(x-b)^2}\times\sqrt{rr-(x-c)^2}\times\text{etc.}$$

Denique si huius producti differentiale ponatur $=0$, dabit aequatio, vi nostrarum hypothesium, valorem quaesitum x ceu maxima probabilitate donatum. Quoniam vero praefata quantitas ad statum maximi valoris reducenda est, patet, fore simul eius quadratum ad hunc statum reductum; licebit igitur, commodioris calculi ergo, formula uti ex meris terminis rationalibus composita, nempe

$$(rr-xx)\times\left(rr-(x-a^2)\right)\times\left(rr-(x-b)^2\right)\times\left(rr-(x-c)^2\right)\times\text{etc.}$$

cuius differentiale iterum ponendum est $=0$; caeterum tot sumendi sunt factores, quot observationes factae fuerunt.

§. 12. Si unica instituta fuerit observatio, aliter non possumus, quin ipsam observationem pro vera accipiamus; id vero etiam indicat hypothesis nostra; si enim primus factor

$$rr-xx$$

solus accipiatur, habebitur

$$-2x\,dx=0$$

vel

$$x=0$$

proindeque

$$\mathrm{A}+x=\mathrm{A};$$

sic nostra cim communi hypothesi coincidit hoc casu.

Si duae factae fuerint observationes A et $\mathrm{A}+a$, accipiendi sunt duo factores, scilicet

$$(rr-xx)\times\left(rr-(x-a)^2\right)$$

vel

$$r^4-2rrxx+x^4+2arrx-aarr-2ax^3+aaxx,$$

cuius quantitatis differentiale

$$=-4rrx\,dx+4x^3\,dx+2arr\,dx-6axx\,dx+2aax\,dx=0$$

sive

$$2x^3-3axx-2rrx+aax+arr=0,$$

quae aequatio pro radice utili dat $x=\frac{1}{2}a$ atque

$$\mathrm{A}+x=\mathrm{A}+\frac{1}{2}a,$$

quod idem rursus hypothesis communis docet. Haecque coincidentia subsistit, qualiscunque adhibeatur radius circuli moderatoris, quod satis indicat pro pluribus institutis observationibus, magnitudinem circuli nostri moderatoris ad amussim exactam, nec in huiusmodi negotio requiri nec expectandam esse. Id vero, quod haud dissimulabo, sinistrum est, quod pro pluribus observationibus calculus requiratur prolixissimus, ita ut vix aliter quam *in abstracto* discussiones hasce proponere audeam. Liceat saltem theoriam trium observationum, quae maximi est momenti, exponere.

§. 13. Quando praesto sunt tres observationes, nempe

$$\mathrm{A}; \qquad \mathrm{A}+a \quad \text{et} \quad \mathrm{A}+b,$$

habebimus tres factores

$$(rr-xx)\times(rr-\overline{x-a}^2)\times(rr-\overline{x-b}^2),$$

pro quibus status valoris *maximi* est definiendus. Si vero hi factores actu inter se multiplicentur, obtinebitur

$$\begin{array}{llllll}
r^6 & +2ar^4x & -3r^4xx & -4arrx^3 & +3rrx^4+2ax^5-x^6 \\
-aar^4 & -2abbrrx & +2bbrrxx & +2abbx^3 & -bbx^4 \;+2bx^5 \\
-bbr^4 & +2br^4x & -aabbxx & -4brrx^3 & -4abx^4 \\
+aabbrr & -2aabrrx & +4abrrxx & +2aabx^3 & -aax^4 \\
 & & +2aarrxx & &
\end{array}$$

Si haec quantitas differentietur, tumque, postquam divisa fuit per elementum dx, pro statu maximi valoris ponatur $=0$, sequens habebitur aequatio generalis pro institutis tribus observationibus qualibuscunque

$$\begin{array}{lllll}
2ar^4 & -6r^4x & -12arrxx & +12rrx^3+10ax^4-6x^5 \\
-2abbrr & +4bbrrx & +\;6abbxx & -4bbx^3\;+10bx^4 \\
+2br^4 & -2aabbx & -12brrxx & -16abx^3 \\
-2aabrr & +8abrrx & +\;6aabxx & -4aax^3 \\
 & +4aarrx & & & =0
\end{array}$$

Radix huius aequationis, quae quidem est quinque dimensionum et lex viginti terminis constat, dabit distantiam centri circuli moderatoris a prima observatione atque quantitas $\mathrm{A}+x$ dabit valorem probabilissime ex factis tribus observationibus deducendum.

§. 14. Pauci fortasse erunt, nisi omni cum attentione principiorum nostrorum energiam perpenderint, qui ullam aliquam suspicentur relationem inter aequationem enormem levissimamque quae videtur quaestiunculam; statuitur enim communiter

$$x=\frac{a+b}{3}.$$

Attamen non male respondet aequatio nostra omnibus notionibus aliunde obviis, quarum nunc aliquas exponam.

(*a*) Si statuatur radius circuli moderatoris infinitus prae vagantibus quantitatibus a et b, reiiciendi sunt omnes termini praeter illos, in quibus littera r ad maximam dimensionem ascendit; sic integra aequatio ad hanc simplicissimam reducitur

$$2ar^4+2br^4-6r^4x=0$$

sive

$$x=\frac{a+b}{3};$$

ergo regula communis continetur in aequatione nostra. Quod si vero definitio nostra, paragrapho decimo exposita, perpendatur, apparebit, quam incongrua sit hypothesis pro radio infinito et quam manifeste alia aptior ipsi substitui possit.

(*b*) Si ponatur $b=2a$, perspicuum est fore $x=a$ qualiscunque valor detur radio r idque rursus commune erit utrique theoriae. Videamus igitur, quid pro hoc casu doceat aequatio nostra; haec facta substitutione pro quantitate b, abit in hanc alteram

$$\begin{array}{lllll} bar^4-6r^4x & -36arrxx+12rrx^3+30ax^4-6x^5 & & & \\ -12a^3rr+36aarrx+36a^3xx & -52aax^3 & & & \\ -8a^4x & & & & =0 \end{array}$$

Huic autem aequationi, qualiscunque fuerit valor r, omnino satisfacit valor $x=a$, quod ipsa rei natura postulat pro hoc casu.

(*c*) Si fuerit $b=-a$, oportet utique ut fiat $x=0$, quiscunque sit valor r; id ipsum vero egregie itidem indicat aequatio nostra, quae nunc abit in hanc alteram

$$\begin{array}{ll} -6r^4x+12rrx^3-6x^5 & \\ -2a^4x+8aax^3 & =0 \end{array}$$

haec autem primo intuitu monstrat radicem utilem $x=0$.

§. 15. Haec et alia similia corollaria satis confirmant verum nexum principiorum nostrorum cum argumento, quod commentamur, utcunque enormis appareat, in quaestione tam simplici, inventa aequatio. Progredior ad exempla, in quibus radius circuli moderatoris nec infinitus nec adiaphorus sit; huc autem pertinent fere omnia. In his exemplis semper differt nova ista theoria a communi et tanto magis differt, quanto magis observatio intermedia accedit ad alterutram extremam. In his discussionibus cardo negotii vertitur. Igitur recurrere debemus ad exempla pure numerica

Exemplum 1. Assumamus tres observationes

$$A;\quad A+0{,}2000 \quad \text{et} \quad A+1{,}0000,$$

ita ut sit $a=0{,}2000$
et $b=1{,}0000$;
ponaturque pro valore ex his tribus observationibus quam probabilissime praesumendo $A+x$; dabit regula communis

$$x=0{,}4000.$$

Videamus novam, meo iudicio, probabiliorem; utamur autem positione $r=1{,}000$ (conf. §. 10.). His positis emergit sequens aequatio pure numerica

$$1{,}9200-0{,}3200x-12{,}9600xx+4{,}6400x^3+12{,}0000x^4-6x^5=0$$

pro qua invenitur, quam proxime,

$$x=0{,}4427,$$

qui valor alterum, communiter receptum, plusquam decima eius parte excedit. Notabilis iste excessus exinde originem duxit, quod observatio media multum admodum propior sit primae, quam tertiae. Hinc facile praesumitur excessum in defectum mutatum iri, si media observatio propior sit tertiae quam primae, istumque defectum tanto minorem fore, quanto minor assumpta fuerit differentia observationis mediae inter utramque distantiam a duabus observationibus extremis. Ut coniecturam experirer, retentis caeteris valoribus, solam mutavi observationem mediam, ut sequitur.

Exemplum 2. Sit igitur nunc $a=0{,}5600$,
posito rursus $r=b=1{,}0000$;
habebimus pro regula communiter recepta,

$$x=0{,}5200.$$

Videamus de nostra. Dabit nunc aequatio paragraphi decimi tertii sequentem aequationem numericam

$$1.3728+3{,}1072x-13{,}4784xx-2{,}2144x^3+15{,}6000x^4-6x^5=0;$$

cui proxime satisfacit

$$x=0{,}5128.$$

Nunc igitur valor x minor sit secundum principia nostra, quam est medius arithmeticus communiter receptus; differentia autem inter utrumque valorem iam admodum exigua est, quippe $=0{,}0072$, plane ut in antecessum rem fore praesumseram. Hinc etiam videtur maximum discrimen inter utramque aestimationem fore, si forte fortuna contigerit ut duae observationes perfecte coinciderent, sola tertia evagante; id duobus diversis modis obtinetur, nempe si ponatur vel $a=0$ vel $a=b$. Eventum pro utroque casu exponam.

Exemplum 3. Sit $a=0$ retentis reliquis denominationibus; habebimus (facta divisione aequationis per $2b-2x$) hanc aequationem numericam:

$$1.0000-6.0000\,x\,x-2.0000\,x^3+3.0000\,x^4=0\,,$$

cui proxime satisfacit valor

$$x=0.3977\,,$$

qui ab regula communi reperitur

$$x=0.3333\,.$$

prior alterum superat quantitate 0,0644.

Quod si vero ponatur $a=b$, oritur aequatio (postquam divisa fuit per $2x$) quae sequitur:

$$4.0000\text{-}6.0000\,x-6.0000\,x\,x+10.0000\,x^3-3.0000\,x^4=0\,,$$

huic nunc aequationi satisfacit valor

$$x=0.6022$$

quam proxime, qui communiter statuitur

$$=0{,}6666\,.$$

Ergo differentia inter utrumque valorem est iterum, ut ante, $=0{,}0644$; nunc autem novus noster valor minor est communi, cum in priori casu esset maior, unde apparet methodum nostram collimare ad punctum aliquod intermedium melius quam methodus communis; huiusmodi criteria haud parum commendant methodum quam propono; hanc animadversionem paulo accuratius discutiam, ut saltem argumentum, quod dicitur ad hominem, habeatur in re, quae demonstrationem geometricam haud admittit.

§. 16. Si utrumque casum in exemplo tertio expositum inter se combinemus, ita ut sex institutas fuisse observationes putemus, nempe A.A.A$+b$ et A$+b$.A$+b$.A, patet sic tres observationes facere pro valore A et totidem pro valore A$+b$; vidimus autem §. 12. in hoc casu utramque methodum indicare medium valorem quaesitum $=\mathrm{A}+\frac{1}{2}b$ sive, pro exemplo tertio, $=\mathrm{A}+0{,}5000$, aut, omissa quantitate permanente

A, simpliciter = 0,5000; de hoc valore, ex unitis sex observationibus deducto, nemo dubium movebit; nunc vero hasce sex observationes resolvamus in duas alias triades, scilicet A.A.A. + 1,0000. atque A + 1,0000. A + 1,0000. A; hoc modo dabit regula communiter recepta, pro prima triade, reiecta iterum quantitate A, dabit, inquam, pro prima triade valorem 0,3333 et pro secunda triade 0,6666; uterque a medio valore 0,5000 differt quantitate 0,1666, alter in defectu alter in excessu; nostra autem methodus eosdem pro quavis triade, valores indicat 0,3977 et 0,6022, quorum uterque a medio valore 0,5000 differt 0,1022 et quidem pariter alter in excessu alter in defectu. Sic itaque theoria communis, pro quavis observationum triade seorsim sumta errorem committeret 0,1666, nostra vero 0,1022 notabiliter minorem: huiusmodi criteria alia quam plurima afferri possent, quibus principia nostra magis stabiliantur; at vereor ne nimius videar in adstruenda re, quae certam omnique titulo perfectam determinationem haud admittit, nec enim ad altiora contendimus quam ut diiudicare possimus id quod magis ab eo quod minus probabile est.

§. 17. Si quae ulterior perfectio expectanda sit, consistet in accuratiori et strictiori determinatione scalae moderatricis eiusque amplitudine. De hoc rei momento aliquas superaddam notationes. Ex praemissis perpensationibus liquet, non multum admodum recedere aestimationes nostras ab regula communiter recepta; agitur ergo de correctione aliqua, quam admittere videtur haec regula; istam correctionem subministrant ipsi discessus observationum a vero puncto quaesito, qui ita ordinari possunt, pro quavis data scalae moderatricis amplitudine, ut probabilissime conveniant cum hoc punto. At equidem nihil video, quo amplitudo praememoratae scalae stricte determinari possit, nisi quod submonui §. 10. Si quis autem observator, virium suarum ultra quam par erat diffisus, nimium auxerit magnitudinem semicirculi moderatoris, hic quidem non omnem tulerit opem sed certiorem; si, e contrario, nimium constrinxerit hanc scalam, incidet caeteris paribus in correctionem paulo maiorem et aliquantulum minus probabilem. Prudentia non minus quam perspicacia hic opus esse videtur. Si ipsis institutis observationibus uti velis ad formandam *a posteriori* aestimationem de adhibenda amplitudine scalae moderatricis, haud imprudenter actum erit, si tecum perpenderis, an feliciter vel infeliciter observationes cessisse statuendum sit; quanto plus fortunae dederis, tanto minus dexteritati in observando adhibitae tribues, tantoque proinde maiorem circulum moderatorem adhibebis. In paragrapho decimo quinto assumsi $r = b$, sive radium circuli moderatoris aequalem distantiae inter duas observationes extremas; faetor tamen, re melius perpensa, hancce radii magnitudinem mihi videri nimia aliquantulum confidentia positam; tutior utique futura fuisset positio $r = \frac{3}{2}b$ vel etiam $r = 2b$; sub hac positione correctio prodiret notabiliter minor at tanto certior maiorique fiducia adhibenda

§. 18. Si quae efficacia insit principiis nostris, etiamsi metaphysicis potius quam mathematicis, iure merito exinde concludemus, nunquam aut saltem rarissime nec sine omni adhibita circumspectione reiiciendam esse aliquam observationem, qua de re sententiam meam in antecessum aperui §. 2. totus enim observationum complexus nihil aliud est quam eventus fortuitus dexteritate observatoris modificatus et intra certos fines coercitus. Inter tres observationes contingere utique potest, quamvis casu rarissimo, ut duae, mirum in modum, inter se conspirent, tertia autem, infausta sorte, ab ambabus prioribus longissime recedat. Id vero si mihi contigerit, atque si certus fuero, me haud nimium coarctasse limites maximorum errorum possibilium aut nimium dexteritati mea fidisse, non haesitarem totius rei examen ad principia nostra revocare ex iisque aestimationem formare. Modo observator pro singulis observationibus parem adhibuerit industriam, quiscunque fuerit earum eventus; velim ut omnium aequa ratio habeatur.

§. 19. Unicum superest monendum de scala, quam adhibui, moderatrice; usurpavimus semicirculum, tanquam sic satis respondentem conditionibus §. 7. expositis simulque calculis subducendis aptissimum; notabile interim est, infinitas dari alias curvas, quae plane ad eandem aequationem, quam in fine paragraphi decimi tertii exposui, perducant. Pro scala circulari fecimus paragrapho undecimo probabilitates respective proportionales applicatis

$$\sqrt{rr-xx}\,; \qquad \sqrt{rr-(x-a)^2}\,; \qquad \sqrt{rr-(x-b)^2}\,.$$

Quod si autem, semicirculi loco, supponamus arcum parabolicum super linea $2r$ constructum, cuius axis per medium huius lineae perpendiculariter transeat, habebimus, retentis iisdem denominationibus, applicatas quasvis sive probabilitates inde expressas aequales[1]

$$\frac{\rho}{rr}\times\overline{rr-xx}\,; \qquad \frac{\rho}{rr}\times(rr-\overline{a-x}^2)\,; \qquad \frac{\rho}{rr}\times(rr-\overline{b-x}^2) \text{ etc.}$$

ubi per novam literam ρ intelligo maximam applicatam pro abscissa $x=0$. Quia vero factor ρ/rr omnibus terminis communis est, poterit huic factori simpliciter unitas substitui, quando productum ex omnibus et singulis probabilitatibus ad *maximum* reducendum est; unde sequitur parametrum parabolae arbitrariam manere; monui etiam in praefato paragrapho undecimo, quod si idem productum ad statum suum *maximum* fuit reductum, simul omnes eius dignitates praerogativa maximi vel minimi gaudeant; hinc liquet utramque scalam, parabolicam aeque ac circularem, ad eundem valorem quaesitum x perducere. Sed et porro perspicuum

1 $\overline{x-a}^2$ et $\overline{x-b}^2$ corr. de $\overline{x-a^2}$ et $\overline{x-b^2}$ (A.dB.).

est, innumeras alias scalas idem praestare officium; erunt autem omnes eius indolis ut a summitate sua in utramque partem ad lineam $2r$, in quam singulae observationes necessario incidere ponuntur, accedant eamque intersecent. Ergo omnes huiusmodi scalae ad scopum nostrum collimant, nec est ut hac in re nimis simus meticulosi, ad meliora si non ad optimum contendisse contenti.

§. 20. Quod denique attinet ad incommodam fereque monstrosam aequationis nostrae fundamentalis §. 13. expositae formam, poterit et huic incommodo aliquatenus occurri; dico enim fore propemodum radicem utilem

$$x = \frac{a+b}{3} + \frac{2a^3 - 3aab - 3abb + 2b^3}{27rr}.$$

prius membrum nil aliud est quam commune medium arithmeticum pro tribus observationibus, alterum indicat proxime correctionem, quam principia nostra porro exigunt; ista quidem radix tanto accuratius cum aequatione §. 13. conveniet, quanto maior assumta fuerit amplitudo scalae moderatricis indicata per $2r$; absit tamen, ut sola calculi commoditate inducti valorem literae r praeter necessitatem augeamus, quia omne augmentum inutile momento correctionis nostrae aliquid detrahit. Nec minus periculosum foret nimium viribus suis in observando tribuere atque sic radium r ultra quam par est contrahere: *Certi sunt fines, quos ultra citraque nequit subsistere rectum.* conf. §. 10. Docent vel ipsa principia nostra fieri nunquam posse ut sit $r < \frac{1}{2}b$, quia haec positio manifestam implicaret contradictionem, dum id ipsum impossibile poneretur, quod contigisse supponitur. Caeterum haud dissimulavi quae in argumentatione nostra paullo liberius assumpta fuerunt; crediderim tamen criteria nostra institutarum observationum non omnia propterea esse reiicienda; hoc saltem mihi persuadeo, *regulam communem pro tribus observationibus peccare aliquantulum in defectu, quoties* $a < \frac{1}{2}b$ *atque in excessu si* $a > \frac{1}{2}b$, *nec unquam certius adhiberi, quam cum observatio intermedia proxime aequidistat a duabus extremis.* Deinde mihi probabile videtur aequationem nostram §. 13. tutius et melius determinare positionem seligendam, modo radius circuli moderatoris haud temere diminuatur ultra limites, quos vires observatoris permittunt: conf. §. 17. Quaestio autem, quam tractavi, proprie haec est, ut datis tribus pluribusve sagittae iactibus, in linea recta notatis, determinetur positio probabilissima loci, quem sagittarius pro scopo suo habebat. Sed unusquisque observator harum rerum intelligens pro natura argumenti, quod prae manibus habet, alia atque alia sibi formabit criteria, scopo suo haud inutilia, si modo regulis, ex arte combinatoria depromtis, caute utatur.

Recapitulatio. Problema nostrum per se utique est indeterminatum, quandoquidem pendet ab usu, experientia, dexteritate observatoris, a praecisione instrumentorum, ab acie sensuum, ab innumeris denique circumstantiis plus minus faventibus; horum omnium ratio habebitur assumpta amplitudine aberrationum campi, qua de re, omni adhibita circumspectione, sententiam meam aperui. Deinde energia sortis fortuitae exploranda est, quae pro quavis aberratione militet, quia utile est ut cuivis aberratione sua, pro natura rei, conveniens assignetur probabilitas; haec equidem probabilitatum scala rursus incerta atque indeterminata manet, si accurata desideretur, attamen plures manifestat, ex ipsa rei natura, proprietates, quibus si satis fiat, poterit pro sufficienter cognita haberi, quod plura tentamina me docuerunt. Inde modus innotescit exprimendi secundum praecepta in arte coniectandi demonstrata, probabilitatem absolutam cuivis systemati observationum dato convenientem pro quovis situ assumpto eiusdem systematis. Sic aliud non superest, quam ut ille seligatur propositi systematis situs, qui maxima gaudet probabilitate. Mirabile prorsus mihi visum est, quod aequatio algebraica, qua situs iste definitur, tam longe petita, ad quintam dimensionem, pro tribus tantum observationibus, assurgens, permagno terminorum numero expressa, ex principiis nunquam usitatis deducta, denique nihil indicet, undecunque examinetur, quod ullo modo displicere possit, multo minus ad absurdum aliquod perducat; quod in quovis exemplo ab calculo emergit semper parum ab eo, quod methodus communis docet, differt si modo haud temere impingatur in praecepta, quae praescripsi; quoties tres observationes datae ita sunt comparatae ut media ab extremis fere aequaliter distet, absque scrupulo regulae communi adhaerebimus; at si ambo intervalla sint notabiliter inaequalia, consultius existimo ad theoriam nostram confugere, si modo ad mentem praeceptorum, quae exposui, omnique adhibita prudentia, aequi fines aberrationum campo statuti fuerint. Caeterum haec omnia velim ut trutina potius methaphysica quam mathematica perpendantur. Qui maxime principiis nostris offenditur, si modo maximum simul statuat aberrationum possibilium campum, nil porro quod redarguat habebit.

Specimen philosophicum de compensationibus horologicis, et veriori mensura temporis.

Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae. 1777–2 (1780) p. 109–128.
III.9 – St.73

§. 1. Quamvis ars horologica nostris temporibus ad summum perfectionis gradum evecta videatur, nullus tamen dubito quin in optimis horologiis, ad observationes astronomicas accuratissime instituendas adhiberi solitis, multae supersint inevitabiles mendae, quae aliquando brevi tempore observatori errorem plurium minutorum secundorum horariorum inferre possint. Innumeri sunt minimarum aberrationum fonticuli, qui omnes homini rudi ad eundem censum redigendi videbuntur, quos vero magis experti in duas referent classes diversas: aliae enim sunt aberratiunculae, quae vel vitari vel diiudicari atque aestimari possunt, aliae quae latitant quaeque sunt et anomalae et anormes. Primam classem minus morabitur industrius observator, ac alteram occultatam aeque ac incertam. Has posteriores aberratiunculas necesse est pro *fortuitis* habere perinde ac iactum aleae; quamvis nulla fiat variatio, quae non suam habeat causam determinantem. Nisi essent longe exilissimae hae variationes nisique simul sese propemodum exacte compensarent, actum foret de genuina temporis mensura; plus tamen *compensationi* quam *exilitati* adscribendum esse puto, etsi aliter sentire intellexerim Artificem automatarium longe dexterrimum simulque artis suae quod ad theoriam spectat gnarissimum. Hoc quicquid sit argumenti paullo accuratius perpendere constitui.

§. 2. Incredibilis horologiorum aequabilitas tota fere debetur pendulo oscillanti; pendulum autem describit arcus circulares, qui ab isochronismo aliquantillum recedunt; huic incommodo ut occurreret magnus Hugenius[1] subtiliter modum invenit ut pendulum arcus cycloidicos oscillando formaret, isochronismo perfecto donatos; at vero laminae cycloidicae, quas eum in finem adhibendas postulat, difficillime in debitam efformantur curvedinem, cum radius osculi in supremo utriusque laminae loco sit infinite parvus, praeterquam quod pluribus aliis laborent incommodis. Igitur relictis arcubus cycloidicis ad circulares recurrere; ne tamen errores inde oriundi sensibiles fierent procuraverunt ut oscillationes manerent valde parvae, quo nempe remedio isochronismus perfectus tantum non restituitur. Accuratius principia, quae ad veriorem temporis mensuram terra marique conducere possint, exposui ante hos triginta et quod excurrit annos, oc-

1 C. Huygens «Horologium Oscillatorium». Paris 1673. Oeuvres complètes Vol. XVIII.

casione quaestionis ab Academia Reg. Sc. Paris. propositae pro annis 1745 et 1747[2]. in dissertatione, quae curante eadem Academia publici iuris facta fuit (*), nec sine voluptate intellexi, habuisse adhibita a me principia, Automatarios Praestantissimos maximeque Parisiis Inclytos, suffragantes. In praememorata dissertatione pag. 26. theorema protuli, quod imprimis huc pertinet, de vero valore oscillationum circularium.

Fuerit tempus oscillationis minimae ac veluti infinite parvae $= \mathrm{T}$;
sinus totus $= 1000000$;
sinus versus arcus dimidii a pendulo descripti $= b$;
dico fore, absque ullo errore sensibili, tempus huius oscillationis

$$= \mathrm{T} + \frac{b}{8000000}\,\mathrm{T}.$$

§. 3. Ut usus huius theorematis in subtilissimis institutis observationibus elucescat, transcribam ex praefata diatriba, paucis fortasse cognita, bina quae attuli exempla.

Exemplum 1. Sit $\mathrm{T} = 1''$. Idem pendulum describat primo arcus $3°.0'$, deinde arcus $4°.20'$, quod exemplum D. *de Maupertius* (**) recenset pag. 166. affirmans oscillationes posteriores respectu priorum, tempore unius diei, retardasse $3\frac{1}{2}''$ vel $4''$. Theorema nostrum indicat pro prioribus

$$b = 343$$

et tempus unius oscillationis

$$= 1''\,\frac{343}{8000000}$$

et omnes hae particulae exhibent, tempore 24 horarum, $3'',7$; posteriores vero oscillationes faciunt

$$b = 715;$$

atque tunc pendulum, tempore unius diei, retardat $7'',7$; differentia retardationem intra diem dat praecise $4''$.

(*) *In collectionis dissertationum praemio condecoratarum Tomo VI.*[3]
(**) *In opusculo*: *De Figura Terrae. Edit. Paris.*[4]

2 Cf. VIII.3 - St. 42. vol. 7.

3 Les quatre autres pièces de ce receuil de Prix de l'Académie de Paris pour 1745 et 1747 sont anonymes.

4 P.L. de Maupertuis «La figure de la terre, déterminée par les observations de Messieurs de Maupertuis, Clairaut, Camus, le Monnier, faites par Ordre du Roy au cercle Polaire». Paris 1738.

Exemplum 2. Academici in Lapponiam missi ex observationibus, summa praecisione institutis, stabiliverunt quod tempore unius fixarum revolutionis horologium a Regia Parisiorum usque ad Pello acceleraverit 59″, 1 .... Observationes in utroque loco, cum eodem horologio et sub iisdem circumstantiis studiose factae fuerunt, hoc solo titulo diversae, quod Parisiis pendulum in utramque partem describeret arcus 2°.10′, Pello 2°.4′, (vid. opusculam D. *de Maupertius* pag. 170, 171 et 172). Haec arcuum parula inaequalitas pendulum Parisiis respectu Pello quovis die retardavit 0″, 58 vi nostri theorematis, quod utique tempusculum ab observata differentia 59″, 1 subtrahi debet; vera itaque acceleratio, tempore unius fixarum revolutionis, a Parisiis ad Pello est 58″, 52.

Apparet itaque inaequalitates arcuum, ab eodem pendulo descriptorum, si modo sedulo observentur, verae temporis mensurae minime officere.

§. 4. Aliam variationum in horologiis scaturiginem efformat inaequalitas frigoris atque caloris; ab aucto frigore decurtatur atque contrahitur pendulum, quod adeoque acceleratur. Variatio frigoris duorum graduum in thermometro *De L'isliano*[5] perdurans variationem in pendulo efficiet propemodum 1″ tempore unius diei vel 24 horarum, si virga penduli ex ferro fuerit constructa; potest autem construi ex alia materia multo minus contractili; haec altera variatio, maxime molesta Astronomis, tanta est ut pendulum intra diem 38″ accellerari possit ab intensissimo frigore ad maximum calorem aestivum relato. Attamen ad eandem classem has variationes cum prioribus refero, quia a statu thermometri identidem explorato corrigi possunt; quin etiam variis modis omnis haec variatio vitari potest, si pendulo usitato pendula aliter composita substituere lubeat; in diatriba supra allegata pag. 108 et 109 modum huius rei simplicissimum ostendi.

§. 5. Ambae praememoratae aberrationum scaturigines solae sunt, quas harum rerum intelligentes attentione sua dignas censuerint; solent autem plerumque in eundem conspirare effectum; ab aucto frigore decurtatur atque acceleratur pendulum, simulque oleum inspissatur, maior pars ponderis horologium moventis impenditur in frictiones rotarum superandas, minor in pendulum concitandum, oscillationes minores fiunt rursusque accelerantur; nec dum tamen effectum ullo modo sensibilem habere possent ambae causae, nisi praeterea diutius perdurarent; etenim si variationes, modo in unam moxque in alteram partem, reciprocationibus utcunque irregularibus, fierent, dubito an ullam inaequalitatem sensibilem pendulo iniicere possent. Caeterum praeter manifestas aberrationes, quas explicuimus, non possunt non innumerae aliae latitare momentaneae, incertae, nullique legi adstrictae, praesertim si pondus penduli exiguum fuerit magnasque efficiat

5 Le zéro de l'échelle de Delisle est fixé au point d'ébullition de l'eau et 1° de Delisle correspond à $-2/3°$ Celsius (la glace fondante est donc à 150°). (Cf. R. Wolf «Biographien zur Kulturgeschichte der Schweiz». Zurich 1860. p. 163.)

excursiones; nec enim motus penduli liberi plane idem est cum motu eiusdem penduli ad horologium applicati; pondus, quod motum penduli in horologio conservat, agit in pinnulas axi penduli appositas, nullaque adhibita industria impetrari poterit, ut minimi impulsus fiant perfecte inter se aequales; inter 86400 oscillationes minuratias secund. quotidianas, nequidem duae esse possunt perfecte isochronae; quis omnes enumeret diversitatum modos? Unicum exponam, cuius efficaciam prae caeteris maximi momenti existimo, ni sollicite praecaveatur.

§. 6. Notum est quam mirifice omnes motus isochroni communicentur cum obiectis circumpositis, si ullo modo synchronismo locus detur. Singularia penitus sunt, quae hac de re innotuerunt in musica. Idem vero pariter contingit in vibrationibus sive motibus reciprocis lentioribus.

Magnus commemorat *Hugenius* in suo horologio oscillatorio, quod cum duo ex eodem tigillo suspendisset horologia minutaria secunda, magna cum admiratione viderit utraque pendula perfectissime inter se conspirantia; ambo vibrationes suas unu eodemque temporis puncto incipiebant terminabantque. Vibrationes autem constanter erant adversae, pendula alternis vicibus sibi obviam ibant atque ab invicem recedebant; imo si data opera ad momentum turbabatur harmonia, ita ut veluti se decussarent pendula, mox ad illam redibant; quod indicat efficaciam pendulorum mutuam aeque ac fibrillarum lignearum ad motum harmonicum propensionem. Imo legere me memini in alia dissertatione manuscripta, idem etiamnum contigisse in horologiis haud parum ab invicem alias discordantibus.

Huc etiam pertinet, quod ab Insigni Artifice Automatario, D. *Ferdinando Berthoud*, Societatis Londinensis Soc. mecum communicatum habeo, qui cum prae manibus haberet horologium, quod dicitur, astronomicum, accuratissimum, cuius motum optime exploraverat, sed quod minus firmiter erat suspensum, consilium cepit machinam undique ac fortiter firmandi; ab sola ista mutatione evenit, ut pendulum nunc arcus trium graduum describeret, quod antea nonnisi duos descripsit gradus, ipsum autem horologium, tempore unius diei, integris 297 minutis secundis retardaret. Notabilis mihi visa fuit tanta inter utrumque statum diversitas, an vero in tanto discrimine perpetua uniformitas eademque perfecta, pro eadem suspensione, praesumi poterit? mihi certe non videtur. Incertus atque variabilis utique erit firmitatis gradus nec idem gradus constanter eodem perfecte aget modo in minimis, quas format, vibratiunculis accessoriis, dum integra horologii theca simul ac caetera obiecta eidem connexa vacillant. Attamen omnes et singulae vibratiunculae accessoriae in singulis locis, ut sint perfecte synchronae cum vibrationibus fundamentalibus penduli, et ratio dictat et suadet experientia.

§. 7. Non abs re foro puto modum inquirere, qui praememorato effectui explicando aliquatenus inservire possit. Utcunque pendulum oscillans ab extremitate sua superiori suspensum sit, fiet inter oscillandum ut tota horologii massa hinc inde alternis vicibus a pondere penduli horizontaliter trahatur retrahaturque; haec quidem actio immediate exercetur in fulcrum, quod pendulum sustinet, dein ipsum fulcrum agit in partes quibuscum connexum est, denique in horologii atque thecae, cui includitur, massam; necdum hic omnis abrumpitur actio, cum vel ipsum tignum, a quo suspenditur aut fulcitur theca, aliquantillam in fibris patiatur compressionem relaxationemque; haec omnia pendent a modo quo partes inter se cohaerent magis minusve firmo, a minimis compressionibus, dilatationibus, inflexionibus corporum etc. Sic igitur verus penduli motus a tot pendet circumstantiis, ut plenam in abstracto determinationem vix admittat; licebit autem totam rem sub alia intueri facie, quae omnem rescindat difficultatem nec male cum re ipsa conveniat.

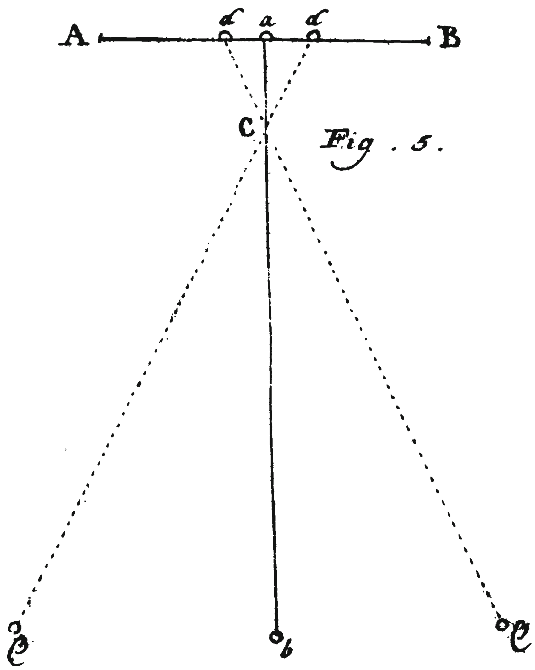


Fig. 5.

Concipiamus planum immobile horizontale A B (Fig. 5), cui magna superincumbat massa concentrata in puncto a, ex quo dependeat virga, gravitatis expers ab, desinens in punctum grave b; perinde autem est sive punctum a fixum sit in plano vacillante A B, sive hoc planum immobile sit massaque a libere moveatur super illo. His ita positis, si concipiatur pendulum ab oscillare et alternis vicibus pervenire in situm $a\beta$ ad utramque partem, dico hasce oscillationes regulares atque uniformes aliter non esse posse, quam ut virga sese constanter decusset in c ambaeque extremitates a et b in contraria currant; dico etiam punctum intersectionis fore in centro gravitatis quod utrique corpori a et b convenit atque longitudinem penduli simplicis isochroni fore aequalem lineae cb.

§. 8. Applicatio huius theorematis ad praesens argumentum satis est per se manifesta, scilicet massa a tanta est, ut motus eius repraesentare possit omnem motum, qui in partibus diversis horologii aeque ac in partibus communicantibus vicinis ab oscillationibus penduli excitatur. Inertia corporis in a positi modificabitur oscillationes corporis in b. Si partes horologii ipsius corporumque cohaerentium firmitate perfecta gaudeant, ita ut nullibi ne minimi quidem motus reciproci accessorii suboriri possint, huic hypothesi satisfiet ponendo massam corporis a infinities maiorem quam sit massa corporis oscillantis b; sic enim punctum c incidit in ipsum locum a pendulumque cb totam suam longitudinem ab retinet; si, e contrario, omnes systematis partes laxius inter se sint connexae simulque magis dispositae ad motus synchronos cum oscillationibus penduli subeundos ac sponte continuandos, oportebit corpus in a supponere valde diminutum; tunc enim, pro eadem excursione $\beta\beta$, increscent excursiones $\alpha\alpha$, deprimetur punctum c, diminuetur longitudo penduli residui cb atque valde accelerabitur horologii motus. Caeterum meminerimus in tota vibrationum isochronarum theoria arcus descriptos valde parvos supponi eosque pro infinite parvis in calculo haberi.

Si nunc de observatione D. *Berthoud* §. 6. allegata sermo sit, erit $ab = 440$ lin. atque $ac = 3$ lin. Hoc enim modo pendulum ab intra unius diei spatium retardat, ratione penduli cb, propemodum 297″. Observatus etiam fuit angulus βcb unius gradus; unde sequitur arcus $\beta b = 7{,}62$ lin, atque spatiolum $\alpha\alpha = 1/19$ lin. propemodum. Hisce valoribus assumtis phaenomeno descripto ex asse satisfit. Simul autem apparet pondus in a (a quo scilicet efficitur ut vera penduli oscillatio fiat circa punctum c) statuendum esse $= 146$ P, si intelligatur per P pondus in b, atque adeo assurgere ad pondus triginta centenariorum propemodum, si pro P assumantur 20 librae, atque istud enorme pondus responderet horologio relaxato. In altero autem statu multo firmiori pondus etiam multo maius supponendum foret; unde intelligitur vix sperandum esse ut motus penduli nullos plane motus accessorios cieat.

Denique quod attinet ad alteram phoenomeni partem, nimirum ad id quod pro statu firmiori maiores arcus pendulum descripserit ac fecerat pro statu laxiori, id nunc nullam uberiorem explicationem postulare puto, cum idem pondus si totum impendatur in pendulum motandum, maiores utique in illo excitabit oscillationes, quam si simul alias oscillationes accessorias sensibiles producere et continuare debeat. Absit vero ut auctae oscillationum magnitudini tribuamus observatam horologii firmius suspensi retardationem, utcunque plausibilis haec prima fronte appareat explicatio. Docet enim theorema §. 2. allegatum, augmentum unius dimidii gradus in quavis semi oscillatione retardationem intra 24 horas producere non potuisse maiorem quam 2″, quae tamen ab D. *Berthoud* observata fuit 297″.

§. 9. Ex praemissis etiam apparet aliquantulam in oscillationes penduli variationem cadere a vacillatione lentis quae virgae annexa est, praesertim si maior fuerit ipsius diameter; sit itaque lens firmissime ad virgam annexa ne ullo modo titubare possit; quo firmior erit coniunctio, tanto magis deprimetur centrum oscillationis tantoque magis retardabitur pendulum; attamen minoris erunt momenti huiusmodi variationes; huc etiam pertinent, quae aliquando cum Academia communicavi *de vera determinatione centri oscillationis in corporibus qualibuscunque filo flexili suspensis eiusque ab regula communi discrepantia*[6]; nam corpora e filo flexili suspensa pariter aliquam patiuntur titubationem, quamvis diversi generis, quae facit ut aliter oscillentur quam secundum regulas communes, quae perfectam in toto systemate supponunt firmitatem aut rigiditatem.

Quae protuli pertinent ad hypothesin, quod sola materiae inertia suspensionem penduli stabiliat firmioremque reddat. Verum alii utique dantur suspensionis modi, qui longe alium faciunt effectum; retardatio insignis a D. *Berthoud* observata, postquam horologium intensius stabilitum esset, visa quidem fuit haud parum paradoxa; attamen nullus dubito quin, invariata manente suspensione, multae ex hoc fonte parvulae inaequalitates in motu horologii scaturire possint; praesertim igitur suspensionis modus solidissimus adhibeatur quando vera longitudo absoluta penduli simplicis, ad quaevis minuta secunda vibrantis, immediate determinanda erit, quia in hoc negotio rite perficiendo vel centesimas unius lineae particulas cordi ac curae habent observatores.

§. 10. Haec paullo prolixius exponere volui ut exinde pateret fieri non posse, quin vel optima horologia innumeris parvulis erroribus continue repetitis perturbentur; quid demum erit de horologiis minoribus portatilibus aliisque, quae penduli loco orbiculo libratorio (*Balancier*) instructa sunt; cum huiusmodi orbiculi libratorii multo minus dominentur in motum rotarum (*Rouage*) quam pendula, magis isochrona suoque pondere longe efficaciora. Denique quid erit de horologiis, quae dicuntur, marinis tot aliis perturbationibus inordinatis indefinenter obnoxiis? Equidem quo magis rem mecum perpendo, eo magis accuratiorem temporis mensuram dubio plenam existimarem, nisi longus horologiorum usus aliter suadere videretur. Visum tandem fuit, optimos successus pro magna parte *compensationi fortuitae* adscribendos esse et cum maxime Astronomorum intersit aequum ferre iudicium de tempore observato, animum induxi novum istud argumentum paullo accuratius prosequi.

§. 11. Multa admodum apud Astronomos reperire est de horologiorum usu accuratissimaque mensura temporis inde petita; alia tamen aliis sunt praestantiora. Hoc ipso tempore, quo hasce conscribo pagellas, ad manus est Tom. II. Collectionis in usum Astronomorum *Ioh. Bernoulli* Astronomi Regii Academiae Berolinensis, Dilectissimi mei ex Fratre Nepotis, ubi pag. 15. et seqq. observationes recensentur a

6 Cf. VI. 16 – St. 67. vol. 6.

Cel. *Kaestnero* institutae[7], quae indicant omnem variationem diurnam horologii substitisse intra limites duorum minutorum secundorum, hancque parvulam variationem maximam fuisse intra tempus plus quam quatuor mensium. vid. pag. 21. et 22. Attamen pag. 20, ubi comparatio instituitur inter idem horologium Q optimae notae aliudque quod *regulatoris* nomine denotat, duae primae observationes in eodem horologio Q immediate se subsequentes variationem indicant fere 3″, dum in regulatore nulla plane observata fuit. Sed alia prostant tentamina de horologiis praestantissimis sumta, quae maiorem arguunt variationem. Sic horologium, de quo loquitur Ill. *Bouguerus* in opere suo immortali *de figura Terrae* pag. 334 et 335.[8] die 31. Aug. retardabat 5′.6″ intra 24 horas temporis medii, quod idem die 5. Sept. subsequente retardabat 5′.11″. intra 24 horas; igitur variatio diurna post paucos dies suborta fuit 5″. hancque variationem ipse Auctor tribuit soli horologii *irregularitati.* Nolo alienae messi falcem immittere atque Astronomis diiudicandas relinquo parvulas irregularitates saepe in optimis horologiis observatas; non dubito autem quin mecum consentiant, vel optima automata aliquibus etiamnum laborare variationibus irregularibus, quae aliquando ad duo, tria vel fortasse plura minuta secunda tempore 24 horarum assurgere possint, absque ut illa variatio ullo modo praevideri aut per se dignosci queat, nisi aliae observationes simul in subsidium vocentur melioris notae, unde variatio quae forte contigit innotescat. Hac ratione inductus, huiuscemodi exiguas variationes inordinatas rebus *fortuito contingentibus* annumero; habent utique suas causas determinantes, quae vero sunt plane irregulares, valde variabiles atque observatori omnino latentes. Igitur quamvis non sint contingentes per se, non possunt non pro talibus haberi. Haec cum ita sint existimavi non male actum fore, si hae minimae variatiunculae calculo subiiciantur atque theoriae, quam exposui in Commentariis Novis Academiae Imperialis, Tom. XIV. parte priori, pag. 26 et seq. ubi theoriam dedi *de mensura sortis ad fortuitam successionem rerum naturaliter contingentium applicata*[9]. Equidem infinities magis complicatum est hoc praesens nostrum argumentum quam quod modo allegavi, ubi duo saltem casus examinandi erant, cum in nostro novo argumento proprie infiniti casus essent considerandi, quandoquidem singulas vibrationes penduli aliquantillum ab invicem differre negari non potest.

§. 12. Ut modo dictae complicationi, quae inextricabilis foret, remedium afferatur, sufficiet utique omnes et singulas penduli oscillationes ad duas referre classes, retardatas scilicet et acceleratas, atque in quavis classe simpliciter accipere

7 Johann III. Bernoulli «Recueil pour les astronomes» en 3 Vols. Berlin 1772–1776.

8 P. Bouguer «La figure de la terre, déterminée par les Observations de Messieurs de la Condamine et Bouguer, de l'Académie Royale des Sciences, envoyés par ordre du Roy au Pérou pour observer aux environs de l'équateur ...» Paris 1749.

9 Cf. III. 7a – St. 59a p. 326 h.v.

mediam, ita ut, pro vera temporis mensura, sint oscillationes in utraque classe numero perfecte aequales simulque alterae alteras perfecte compensent.

Sit horologium, cuius pendulum ad minuta secunda vibrare debeat atque adeo tempore medio 24 hor. 86400 oscillationes perficere, si singulae oscillationes inter se perfecte isochronae ponantur ipsumque horologium perfecte ad tempus medium fuerit ordinatum; tum vero ab isochronismo oscillationum perfecto paululum recedamus, ita tamen ut omnes ad duas classes, alteram acceleratam alteram retardatam, referantur, atque ponamus oscillationes eiusdem classis perfecte isochronas, diversas autem aequaliter a vero valore unius minuti secundi, in utramque partem differre; denique statuamus unicuique oscillationi aequam inesse propensionem ad utramque classem, plane ac si eventus ad sortem revocaretur. Hae positiones non male cum instituto nostro conveniunt, quando animus est discutere, quid probabiliter de motu horologii praesumi debeat, quod parvulis inaequalitatibus fortuitis obnoxium sit.

§. 13. Igitur, ad ductum praecedentis paragraphi, ponam tempus uniuscuiusque oscillationis retardatae $= 1'' + a''$
et tempus acceleratae $= 1'' - a''$,
ubi a'' denotat exiguam unius minuti secundi portiunculam. Hoc posito apparet, si intra 24. h. temporis medii pendulum 43200 oscillationes tardiores totidemque celeriores perfecisse ponatur, compensationem perfectam fuisse, nullumque plane errorem in mensuram temporis irrepsisse; indicium autem huius aequabilis bipartitionis nullum habebimus; datur tamen probabilitatis gradus et mensura pro hoc eventu; posito enim numero oscillationum $= 2\,N$
erit (vi paragraphi septimi pag. 33. Comment. Nov. Tom. XIV. Part. I.)[10] haec probabilitas

$$= \frac{1{,}12826}{\sqrt{(4\,N+1)}},$$

aut (neglecta unitate denominatoris ob magnitudinem numeri N)

$$= \frac{0{,}56413}{\sqrt{N}};$$

hinc posito $N = 43200$
fit ista probabilitas proxime

$$= \frac{1}{369},$$

10 Cf. III. 7a – St. 59a p. 331 h. v.

quantam scilicet habet lusor, cui cum 368 Collusoribus res fuerit. Attamen si vel exacta fuerit, sorte ita favente, temporis 24 horarum mensura, probabilissimum erit, idem horologium durante toto decursu a vero tempore paululum aberrasse solaque fortuita compensatione exactam integri diei mensuram prodiisse. Praefata autem probabilitas $1/369$ mensura est, ad quam omnes casus, qui evenire possunt, erunt referendi: singuli casus tanto minus fient probabiles, quanto maior assumitur inaequalitas inter oscillationes ad unam et ad alteram classem pertinentes.

§. 14. Perspicuum iam est, praesens argumentum nostrum sub hac facie consideratum perfectissime convenire cum theoria *de mensura sortis etc.* superius citata: hic enim sunt oscillationes retardatae et acceleratae, quod ibi fuerant puelli et puellae: ergo mutato nomine hic rursus valebunt omnia, quae in Commentariis Tom. XIV. P. I.[11] demonstrata fuere, quaeque ad innumeras alias quaestiones sorti subiectas non sine successu applicari poterunt. Erunt fortasse Philosophastri qui tanquam absurdum habebunt, quod merae oscillationes retardatae aut merae acceleratae forte fortuna per integrum diem sibi succedere possent: ego quidem possibilitatem absolutam huius eventus non nego, haud secus ac non nego fieri posse ut intra proximos quatuor vel quinque annos Parisiis ne unica quidem puella nascatur. Simul autem affirmo non minus ridiculum esse huiuscemodi possibilitatum rationem habere, ac ridiculum foret in determinatione distantiae centri Saturni a centro Solis millionesimam partem capilli latitudinis negligere nolle: vera enim probabilitas huius casus exprimitur fractione

$$\frac{1}{2^{86400}},$$

cuius parvitatem nemo mortalium capiet. Quoniam autem singuli casus alia atque alia probabilitate gaudent, ab extremis versus medium continue increscente, ut omnem a me avertam morositatem, unicum imprimis commentabor pro nostris hypothesibus statum, scilicet *statum medium;* voco autem statum medium, qui aequa circumscribitur probabilitate ut contingat vel non contingat.

§. 15. Ponamus numerum oscillationum retardatarum qui tempore medio 24 horarum contigerit $= N + \mu$
atque adeo numerum oscillationum acceleratarum $= N - \mu$,
fiet tempus omnium oscillationum:

$$= (N+\mu)(1'' + a'') + (N-\mu)(1'' - a'') = 2N'' + 2\mu a'',$$

11 Cf. III. 7a – St. 59a p. 326 h.v.

quod cum esse deberet $=2\,N''$,
haec positio faciet errorem horologii pro illo die $=2\,\mu\,a''$
in excessu. Quod si iam velimus ponere $\mu=N$,
qui ultimus casus est possibilitatis metaphysicae, proveniret error

$$=2\,N\,a'' \quad \text{sive} \quad =86400\,a'',$$

qui posito verbi gratia $a''=\frac{1''}{100}$

ascenderet ad 864″ sive propemodum ad horae quadrantem; si vero velimus ponere $\mu=100$, ita ut numerus oscillationum tardiorum nunc sit $=43300$ simulque numerus oscillationum citiorum $=43100$, prodibit error in horologio commissus tempore 24 hor. $=2''$. Atque sic a sola compensatione error ab 864″ reductus foret ad 2″. Si numero praevaluisse ponantur oscillationes acceleratae fiet numerus μ negativus. At vero nihil est, quod numerum μ determinet praeter probabilitatis gradum assumptum vel praescriptum; sufficiat igitur, si hunc numerum indicavero pro statu medio in fine praecedentis paragraphi definito, pro quo aequa militet probabilitas, ut vel excessu vel defectu a vero aberret.

§. 16. Demonstravi in cit. Comment. Tom. XIV. Part. I. pag. 37.[12] quod
posito $N=10000$
sit numerus μ, de quo nunc sermo est proxime $=\pm 47\tfrac{1}{4}$
atque $2\,\mu=94\tfrac{1}{2}$
simulque indicavi pag. 38, quod numerus μ sequatur propemodum rationem subduplicatam numeri N; eritque ita pro praesenti argumento

$$\mu=\pm 47\tfrac{1}{4}\times\sqrt{\frac{43200}{10000}}=98{,}21;$$

huic valori substituam numerum rotundum proximum, nempe

$$\mu=\pm 100.$$

Sic paullo probabilius sit, ut numerus oscillationum sive tardiorum sive citiorum subsistat intra limites 43300 et 43100 quam ut illos transgrediatur; atque hi limites horologio variationem incertam tempore 24 horarum iniiciunt quae exprimitur per $200\,a''$ sive per 2″, si a'' ponitur $1/100''$ atque per 1″ posito $a=1/200''$; tanta scilicet est efficacia compensationis, quae sperari aut praesumi debeat.

12 Cf. III. 7a – St. 59a p. 334 h.v.

§. 17. Notabilis est lex evagationum, si alius atque alius assumatur numerus N, nec enim fortuitae evagationes in eodem horologio sequuntur rationem temporum elapsorum sed horum temporum rationem subduplicatam; data itaque aberratione media praesumenda pro intervallo temporis medii unius diei, quam vocabo δ, aestimanda erit aberratio in eodem horologio nullam mutationem aliunde passo, pro tempore unius anni, $= \delta\sqrt{365}$ sive $19{,}1\,\delta$

et pro tempore unius horae $= \dfrac{\delta}{\sqrt{24}}$ sive $0{,}204\,\delta$,

id est, si pro δ sumantur duo minuta secunda, praesumenda erit variatio post integrum annum tantummodo $38''$ praeter propter, dum eadem variatio post unicam horam eadem probabilitate ascendere poterit ad $\frac{2}{5}''$. Nulla tamen erit ratio statuendi in quamnam partem hae variationes ponendae sint, cum aeque facile contingere possit, ut oscillationes retardatae aut acceleratae praevaleant. Caeterum praefatos valores non quidem pro veris offero sed tantum pro verosimilioribus aut probabilioribus quam ullos alios, donec aliunde de re ipsa certiores facti fuerimus.

§. 18. Magnam adhibent curam Astronomi in dignoscendo motu horologii, quotiescunque de vero temporis puncto aliquo definiendo agitur, ut in antecessum sciant, quantum horologium patiatur sive accelerationem sive retardationem; nescio autem annon aliquando hasce suas explorationes praevias paullo nimis liberaliter habeant, cum certissimum sit, motum horologii perfecte uniformem praesumi non posse, etiamsi pendulum suam longitudinem perfecte conservare atque arculos plane aequales inter oscillandum describere ponatur; sic vidimus §. 11. Magnum *Bougerum* pro irregularitate horologii habuisse[13], quod d. 5. Sept. $5''$ plus retardaverit, quam retardaverat d. 31. Aug. Licebit, ni fallor, hanc irregularitatem merae adscribere sorti, qua potuit contingere ut d. 5. Sept. oscillationes retardantes magis praevalverint quam d. 31. Aug. imo probabile est, d. 5. Sept. praevalvisse retardantes d. 31. Aug. vero praevalvisse accelerantes; haec enim distributio maiori gaudet probabilitate quam ulla alia, semperque seligi debet, quod probabilissimum est, quamdiu nulla habetur ratio cur ab hac regula recedatur.

§. 19. Quid vero tandem in valore litterae a'', quae semidifferentiam indicat inter oscillationes medias retardatas et medias acceleratas, statuendum erit? Equidem crediderim exiguum admodum fore hunc valorem in optimis horologiis, quae dicuntur astronomicis, iisque summa cum attentione firmissime suspensis. Supposuimus paragrapho decimo sexto

$$a'' = \frac{1''}{100}$$

13 Cf. note 8 p. 383 h.v.

atque tunc pro statu medio invenimus aberrationem intra 24 horas duorum minutorum secundorum; quod si vero velimus supponere

$$a'' = \frac{1''}{1000},$$

inveniemus aberrationem decies minorem, id est, $\frac{1}{5}$ minuti secundi pro integro die, quae quidem facile negligi poterit; attamen et tunc ad duo vel tria minuta secunda error emergere poterit, si forte fortuna distributio ex ambabus oscillationum classibus, quamvis aequae facilibus, admodum infeliciter successerit. Verum tamen etiamnum in his rarissimis casibus insignem naturalis compensationis efficaciam perspicimus. Docet nos haec observatio, omnem ab artifice automatario adhibendam esse industriam, ut aberratiuncula elementaris a'', quae in singulas vibrationes cadere potest, vitetur aut imminuatur; horologium et pendulum in horologio ita stabiliantur, ut omnis communicatio vibrationum cum partibus circumstantibus resecetur; ambae pinnulae axi penduli appositae sint perfecte aequales et aequaliter in partes oppositas inclinatae; rotula coronaria dentes habeat in toto ambitu perfecte aequidistantes atquae simillime conformatos; pendulum circa suspensionis punctum sit mobilissimum, lens ponderosa, suspensionis modus caveatur ne ullo modo variari possit etc. Nec confundantur hae variatiunculae momentaneae atque fortuitae cum illis quae diutius perdurant, quales sunt quae a variatione caloris et frigoris, ac magnitudinis oscillationum etc., oriuntur, quas vel calculo seorsim definire licet, si modo status thermometri pendulique oscillationum frequentius inspiciantur; ingenere opera danda est, ut omnes et singulae partes quovis momento aequabiliter sua functione defungi cogantur; etenim quacunque lege pendulum oscillationem quamvis perficiat, si modo eaedem recurrant oscillationes, necesse est utique ut sint isochronae. Sic ingeminatur isochronismi principium.

§. 20. In horologiis vilioribus maiores erunt aberratiunculae mediae elementares a'', at vero lex compensationis eadem erit; in statu suo medio aberratio intra 24 horas adhucdum poterit censeri $=200\,a''$, ad normam §. 16., at vero quantitas a'', pro imperfectionis gradu horologiorum, multo maior esse potest ipsaque aberratio media pro 24 horis eadem proportione increscere nec tamen sex aut septem minuta secunda excedere. Si loco penduli adhibeatur orbiculus libratorius *(Balancier)* maioris utique momenti esse poterunt aberratiunculae mediae elementares; si vero caetera omnia summa cura fuerint elaborata, resarcietur defectus; quo minora sunt huiusmodi automata, eo magis erunt vibrationes sorti obnoxiae; efficacia autem compensationis notabilis in horologiis portatilibus plerumque observabitur, eaque tanto maior, quanto plures vibrationes intra 24 horas perficiuntur; solent autem ad minimum quater vibrare intra minutum secundum sive 345600 vicibus tempore unius diei, hocque respectu dimidiatur aberratio diurna caeteris paribus; hinc posita aberratiuncula media elementari decies maiore quam in pendulis, quintuplicabitur tantum aberratio diurna media et probabiliter subsistet intra decem minuta secunda, quamvis valde adversa fortuna aliquando multo maiores pati possint inaequalitates huiuscemodi automata.

§. 21. Suppetunt animadversiones ad mentem huiusce theoriae instituendae de horologiis mari adhibendis, quibus conficiendis summi artifices in Anglia aeque ac Gallia ab aliquo tempore operam dederunt; idem suo tempore iam olim tentaverat ipse *Hugenius*[14]; suis tamen ausis excidit, quoniam nimiae plerumque sunt navium agitationes quam ut usum pendulorum, quibus unice pro vera temporis mensura confidebat, permittant; ea propter in dissertatione Parisina §. 2. allegata, auctor fui ut horologia marina, ad instar parvulorum automatum portatilium, orbiculo libratorio instruerentur, magnitudine autem sua haec automata multum superarent, ut omnes in horologio marino partes summa accuratione tanto melius elaborari possent, quo consilio omnes artifices ab eo tempore usi sunt; nullus autem dubito, quin haec automata, navi vecta utcunque agitata, eadem propemodum gaudeant in motu suo uniformitate ac si terra adhiberentur, praesertim si cautelae, quas in dissertatione mea exposui, pro optima eorum suspensione simul in usum vocentur. Quod si tamen navis iactationes aliquas automato parvulas inaequalitates imprimere possint, hae non possunt non esse mere contingentes atque fortuitae, nec puto difficile effectu fore ut pro statu medio omnes inaequalitates nunquam errorem decem minutis secundis maiorem intra 24 horas inducant, qui error tempore centum dierum probabiliter non ultra centum minuta secunda increscet, quandoquidem errores praesumendi radicibus temporum sunt proportionales; talem autem errorem, qui 25′ respondet in aequatore haud gravatim condonabunt nautae. Velim autem ut conferantur, quae de meliori perfectione horologiorum orbiculo versatili, loco penduli, instructorum marique adhibendorum, in dissertatione Parisina uberius exposui.

§. 22. Summa pertracti argumenti nostri in hoc consistit, ut intelligatur duas inesse horologiis aberrationum species, *chronicarum* quae diutius subsistere possunt; et *momentanearum*, quae continue hinc et illinc evagantur; priores saepenumero recte statui poterunt temporibus ellapsis propemodum proportionales, posteriores vero sequentur potius horum temporum radices quadrates, haeque aliquando post breve temporis intervallum, si recte coniecto, sensibiles aliquantillum esse poterunt, praesertim in horologiis non ultima accuratione elaboratis. An recte coniiciam, id puto melius diiudicari posse ex observatis eadem nocte intervallis temporum pro plurium fixarum culminationibus, si haec intervalla aliquot noctibus successivis,

14 Cf. Pars Prima p. 16 de la réf. de la note 1 p. 376 h.v.

quantum fieri potest, accurate observentur ab experientissimis Astronomis; hic enim agitur de aberratiunculis, post breve tempus in apricum proferendis, nec tamen, post longiora temporis intervalla, aequa proportione manifestis. Si nihil tale observetur in horologiis perfectissimis, indicium habebimus, aberratiunculas elementares littera a'' designatas plane in his horologiis negligi posse. Nec tamen habebimus, quod dubitemus methodum nostram rebus aliis, quae passibus incertis maioribus divagentur, applicare, nominatimque horologiis pinguiore Minerva constructis aut indole sua mensurae verae temporis minus adaequatis.

Personenregister

Die Namen sind in alphabetischer Reihenfolge aufgeführt. Nur wenige biographische Einzelheiten sind angegeben: in erster Linie solche über wenig bekannte Autoren, Angaben darüber, wo ein Autor mit Daniel Bernoulli zusammenkam oder in seiner Nähe arbeitete. Dafür ist überall, wo dies möglich ist, auf die Angaben in folgenden, allgemein zugänglichen Werken verwiesen:

P.: *J. C. Poggendorff,* Biographisch-Literarisches Handwörterbuch zur Geschichte der exacten Wissenschaften, Leipzig 1863.

DSB: *Dictionary of Scientific Biographies,* Ed. Charles Coulston Gillespie.

J.: *Ch. G. Joecher,* Allgemeines Gelehrten Lexicon, 1961.

Anhand dieser Angaben ersieht der Leser leicht die Stelle, wo ein Autor von Daniel Bernoulli oder einem Herausgeber zitiert wird und wo weitere Angaben zu finden sind.

Zur Orientierung des Lesers reproduzieren wir den folgenden Teil des Stammbaums der Familie Bernoulli aus der Einleitung von O. Spiess zum Band 1: «Briefwechsel».

Jacob I — Johann I

Nicolaus I — Nicolaus II — Daniel I — Johann II

Johann III — (Daniel II) — Jacob II

Bernoulli, Johann III 1744 Basel - 1807 Köpenick bei Berlin Astronom, Mitglied der Akademie, math. Klasse, Neffe Daniels	P.; DSB	III.9 - St.73, p. 382-383. Hinweise zum Briefwechsel, p. 221, 222.
Bernoulli, Nicolaus I 1687 Basel - 1759 Basel 1716-1719 Professor an der Universität Padua 1719-1759 Professor für römisches Recht, Logik und Lehnrecht an der Universität Basel, Vetter Daniels	P.; DSB; J.	II. 1 - St. 16, p. 49. Einleitung zur Wahrscheinlichkeitsrechnung, p. 199. III. 1 - St. 22, p. 230, 232. Hinweise zum Briefwechsel, p. 47, 221.
Berthoud, Ferdinand 1727 Plancemont, Neuchâtel - 1807 Groslay bei Montmorency Horloger Mécanicien du Roi et de la Marine, F.R.S.	P.	III.9 - St.73, p. 379, 381, 382.
Bischof, J.J. Drucker in Basel		II.4 - S, p.97.
Bossut, Abbé Charles 1730 Tartaras, Rhône-et-Loire - 1814 Paris	P.; DSB	Einleitung zur Analysis, p. 34. II.7* - St.66*, p. 135-137. II.7 - St.66, p. 138-151.
Bouguer, Pierre 1698 Croisie, Bretagne - 1758 Paris Professor der Hydrographie und Mitglied der Académie Royale des Sciences de Paris	P.; DSB; J.	III.9 - St.73, p. 383, 387.
Brouncker, William 1620 Castlelyons - 1684 London Viscount of Castlelyons (Irland)	P.; DSB; J.	Einleitung zur Analysis, p. 37, 38, 44-46. II.8* - St.70*, p. 152. II.8 - St.70, p. 156, 171. II.9* - St.71*, p. 173. II.9 - St.71, p. 177, 179.
Buffon, Georges Louis Leclerc de 1707 Montbard - 1788 Paris Botaniker, Zoologe, Mathematiker	P.; DSB	Einleitung zur Wahrscheinlichkeitsrechnung, p. 221. III.2 - St.51, p. 241, 255, 263.
Cassini, Jacques 1677 Paris - 1756 Thury bei Clermont in Beauvorsis Sohn von Giovanni Domenico Cassini, nach dessen Tod 1712 Direktor des Observatoire Royal in Paris	P.; DSB; J.	II. 1 - St. 16, p. 49.
Cauchy, Augustin-Louis 1789 Paris - 1857 Sceaux	P.; DSB	Einleitung zur Analysis, p. 29.

Laplace, Pierre Simon 1749 Beaumont-en-Auge, Normandie - 1827 Paris	P.; DSB	Einleitung zur Wahrscheinlichkeitsrechnung, p. 200, 214.
Leibniz, Gottfried Wilhelm 1646 Leipzig - 1716 Hannover	P.; DSB; J.	Einleitung zur Analysis, p. 30–31, 35, 38. II.6 - St.64, p.121.
Mallet, Jacques André 1740 Genf - 1797 Genf	J.	Hinweise zum Briefwechsel, p.221, 222.
Maupertuis, Pierre, Louis Moreau de 1698 St-Malo - 1759 Basel 1741-1753 Berlin 1745-1753 Präsident der physikalischen Klasse der Akademie der Wissenschaften	P.; DSB; J.	Einleitung zur Wahrscheinlichkeitsrechnung, p.202. III.2 - St.51, p. 235. III.9 - St.73, p. 377, 378. Hinweise zum Briefwechsel, p. 221.
Moivre, Abraham de 1667 Vitry-le-François - 1754 London	P.; DSB	Einleitung zur Analysis, p.21, 22. II.1 - St.16, p.49, 50. Einleitung zur Wahrscheinlichkeitsrechnung, p.216.
Montel, Paul 1876 Nice - 1975 Paris Professor in Paris	P.	Einleitung zur Analysis, p.22, 46.
Montmort, Pierre de 1678 Paris - 1719 Paris Canonicus von Notre-Dame, Mitglied der Académie Royale des Sciences	P.; DSB; J.	II.1 - St.16, p.49. Einleitung zur Wahrscheinlichkeitsrechnung, p.199. III.1 - St.22, p.230, 232.
Moore, Charles 1882 Cincinnati - 1967 Cincinnati Professor an der Universität Cincinnati	P.	Einleitung zur Analysis, p. 46.
Newton, Sir Isaac 1642 Woolsthorpe - 1727 London	P.; DSB; J.	Einleitung zur Analysis, p. 25. II.2a - St.20a, p.70. II.4 - S, p.94, 96.
Padé, Henri 1863 Abbeville, Somme - 1953 Aix-en-Provence	P.	Einleitung zur Analysis, p. 29.
Pell, John 1611 Southwick - 1685 London	P.; DSB; J.	Einleitung zur Analysis, p. 37.
Perron, Oskar 1880 Frankenthal Professor in München und Tübingen		Einleitung zur Analysis, p. 41, 46.

Verzeichnis der gedruckten Werke Daniel Bernoullis, zusammengestellt von H. Straub und ergänzt durch P. Radelet-de Grave und V. Scheuber

Abkürzungen

AE	Acta Eruditorum
AP	Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae
(N)CP	(Novi) Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae
Prix	Recueils des Pièces qui ont remporté le prix de l'Académie royale des sciences de Paris
Mém. Berlin	Mémoires de l'Académie royale des sciences et des belles lettres de Berlin
Mém. Paris	Mémoires de mathématiques et de physique de l'Académie royale des sciences de Paris
AH	Acta Helvetica Basilea 1761-1767

St

1 «Dissertatio inauguralis physico-medica de respiratione» (Basel 1721).

2 «Positiones miscellaneae medico-anatomico-botanicae» (Basel 1721).

3 «Theses logicae sistentes methodum examinandi syllogismorum validitatem» (Basel 1722).

4 «Exercitationes quaedam mathematicae» (Venise 1724).

5 «Notata in praecedens schediasma Ill. Co. J. Riccati.» AE, supp. 8 (1724).

6 «D. Bernoulli explanatio notationum suarum, quae exstant, Suppl. Tom. VIII, sect. II» ibid., 1725 (1725), auch gedruckt in 4.

7 «Solutio problematis Riccatiani propositi in Act. Lips., Suppl. Tom. VIII, p. 73» ibid., 1725 (1725), auch gedruckt in 4.

8 «Discours sur la manière la plus parfaite de conserver sur mer l'égalité du mouvement des clepsidres ou sabliers» Prix, 1725 (1725).

9 «Examen principiorum mechanicae, et demonstrationes geometricae de compositione et resolutione virium» CP, 1, 1726 (1728).

10 «Tentamen novae de motu musculorum theoriae» ibid.

11 «Experimentum circa nervum opticum» ibid.

12 «Theoria nova de motu aquarum per canales quoscunque fluentium» ibid., 2, 1727 (1729).

13 «De mutua relatione centri virium, centri oscillationis et centri gravitatis» ibid.

14 «Dissertatio de actione fluidorum in corpora solida et motu solidorum in fluidis» ibid., «Continuatio»; ibid., 3, 1728 (1732).

15 «Methodus universalis determinandae curvaturae fili» ibid.

16 «Observationes de seriebus quae formantur ex additione vel substractione quacunque terminorum se mutuo consequentium» ibid.

17 «Problema astronomicum inveniendi altitudinem poli una cum declinatione stellae ejusdemque culminatione» ibid., 4, 1729 (1735).

18 «Theorema de motu curvilineo corporum, quae resistentiam patiuntur velocitatis suae quadrato proportionalem» ibid., «Additamentum»; ibid., 5, 1730/31 (1738).

19 «Experimenta coram societate instituta in confirmationem theoriae pressionum quas latera canalis ab aqua transfluente sustinent» ibid., 4, 1729 (1735).

20 «Notationes de aequationibus, quae progrediuntur in infinitum, earumque resolutione per methodum serierum recurrentium» ibid., 5, 1930/31 (1738).

21 «Dissertatio brevis de motibus corporum reciprocis seu oscillatoriis, quae ubique resistentiam patiuntur quadrato velocitatis suae proportionalem» ibid.

22 «Specimen theoriae novae de mensura sortis» ibid.

23 «Theoremata de oscillationibus corporum filo flexili connexorum et catenae verticaliter suspensae» ibid., 6, 1732/33 (1738).

24 «Quelle est la cause physique de l'inclinaison des plans des orbites des planètes par rapport au plan de l'équateur de la révolution du soleil autour de son axe» Prix, 1734 (1735).
25 «Demonstrationes theorematum suorum de oscillationibus corporum filo flexili connexorum et catenae verticaliter suspensae» CP, 7, 1734/35 (1740).
26 «De legibus quibusdam mechanicis, quas natura constanter affectat, nondum descriptis, earumque usu hydrodynamico, pro determinanda vi venae aquae contra planum incurrentis» ibid., 8, 1736 (1741).
27 «De variatione motuum a percussione excentrica» ibid., 1737 (1744).
28 «Réflexions sur la meilleure figure à donner aux ancres» Prix, 1737 (1737).
29 «Commentationes de immutatione et extensione principii conservationis virium vivarum, quae pro motu corporum coelestium requiritur» CP, 10, 1738.
30 «Commentationes de statu aequilibrii corporum humido insidentium» ibid.
31 «Hydrodynamica, sive de viribus et motibus fluidorum commentarii» 1734 (Strasbourg 1738).
32 «De motibus oscillatoriis corporum humido insidentium» CP, 11, 1739 (1750).
33 «Traité sur le flux et le reflux de la mer» Prix, 1740 (1741).
34 «De oscillationibus compositis praesertim iis quae fiunt corporibus ex filo flexili suspensis» CP, 12, 1740 (1750).
35 «Exerpta ex litteris ad Leonhardum Euler» ibid., 1741-43 (1751).
36 «De motu mixto, quo corpora sphaeroidica super plano inclinato descendunt» ibid.
37 «De vibrationibus et sono laminarum elasticarum» ibid.
38 «De sonis multifariis quos laminae elasticae diversimode edunt disquisitiones mechanico-geometricae experimentis acusticis illustratae et confirmatae» ibid.
39 «Mémoire sur la manière de construire les boussoles d'inclinaison» Prix, 1743 (1748).
40 «Nouveau problème de mécanique» Mém. Berlin, 1745 (1746).
41 «Nouveaux principes de mécanique et de physique, tendans à expliquer la nature et les propriétés de l'aiman» mit Joh. II. Prix, 1746 (1748).
42 «La meilleure manière de trouver l'heure en mer» ibid., 1745 und 1747 (1750).
43 «Remarques sur le principe de la conservation des forces vives pris dans un sens général» Mém. Berlin, 1748 (1750).
44 «Sur la nature et la cause des courans» Prix, 1749 und 1751 (1769).
45 «Réflexions et éclaircissemens sur les nouvelles vibrations des cordes» Mém. Berlin, 1753 (1755).
46 «Sur le mélange de plusieurs espèces de vibrations simples isochrones, qui peuvent coexister dans un même système de coprs» ibid.
47 «Recherches sur la manière la plus avantageuse de suppléer à l'action du vent sur les grands vaisseaux» Prix, 1753 (1769).
48 «Quelle est la meilleure manière de diminuer le roulis et le tangage d'un navire» ibid., 1757 (1771).
49 «Sur les nouvelles aiguilles d'inclinaison» Journal des Sçavans 1757 (1757).
50 «Lettre de Monsieur Daniel Bernoulli à M. Clairaut, au sujet des nouvelles découvertes faites sur les vibrations des cordes tendues» ibid., 1758 (1758).
51 «Essai d'une nouvelle analyse de la mortalité causée par la petite vérole, et des avantages de l'inoculation pour la prévenir» Mém. Paris, 1760 (1766).
52 «Réflexions sur les avantages de l'innoculation» Mercure de France (Juin 1760).
53 «Sur le son et sur les tons des tuyaux d'orgues» Mém. Paris, 1762 (1764).
54 «Mémoire sur les vibrations des cordes d'une épaisseur inégale» Mém. Berlin, 1765 (1767).
55 «De usu algorithmi infinitesimalis in arte coniectandi specimen» NCP, 12, 1766/67 (1768).
56 «De duratione media matrimoniorum, pro quacunque coniugum aetate» ibid.
57 «Commentatio de utilissima ac commodissima directione potentiarum frictionibus mechanicis adhibendarum» ibid., 13, 1768 (1769).
58 «Disquisitiones analyticae de novo problemate coniecturali» ibid., 14, 1769-1 (1770).
59 «Mensura sortis ad fortuitam successionem rerum naturaliter contingentium applicata» ibid., «Continuatio»; ibid., 15, 1770 (1771).

60 «Commentationes physico-mechanicae de frictionibus» ibid., 14, 1769-1 (1770).
61 «Examen physico-mechanicum de motu mixto qui laminis elasticis a percussione simul imprimitur» ibid., 15, 1770 (1771).
62 «De summationibus serierum quarundam incongrue veris» ibid., 16, 1771 (1772).
63 «De vibrationibus chordarum» ibid.
64 «De indole singulari serierum infinitarum quas sinus vel cosinus angulorum arithmetice progredientium formant, earumque summatione et usu» ibid., 17, 1772 (1773).
65 «Expositio theoretica singularis machinae hydraulicae» ibid.
66 «Theoria elementaria serierum, ex sinibus atque cosinibus arcuum arithmetice progredientium diversimode compositarum, dilucidata» ibid., 18, 1773 (1774).
67 «Vera determinatio centri oscillationis in corporibus qualibuscunque filo flexili suspensis eiusque ab regula communi discrepantia» ibid.
68 «Commentatio physico-mechanica generalior principii de coexistentia vibrationum simplicium haud perturbatarum in systemate composito» ibid., 19, 1774 (1775).
69 «Commentatio physico-mechanica specialior de motibus reciprocis compositis» ibid.
70 «Adversaria analytica miscellanea de fractionibus continuis» ibid., 20, 1775 (1776).
71 «Disquisitiones ulteriores de indole fractionum continuarum» ibid.
72 «Diiudicatio maxime probabilis plurium observationum discrepantium atque verisimillima inductio inde formanda» AP, 1777-1 (1778).
73 «Specimen philosophicum de compensationibus horologicis et veriori mensura temporis» ibid. -2 (1780).
74 «Sur la cause des vents» Receuil des prix de l'Académie de Berlin 1746.
75 «Oratio physiologica de vita» Verhandlungen der Naturforschenden Gesellschaft Basel, 52 (1940/41).

Dieses Verzeichnis ist auch im DSB als Anhang zum Artikel «Daniel Bernoulli» von H. Straub abgedruckt.

R «Remarques sur les Aimans artificiels de Basel» Nouvelle Bibliothèque Germanique, Jan., Fév., Mars 1755.
S «Extrait d'une lettre de M.D. Bernoulli à M. Garcin sur les Elémens d'algèbre de M. Clairaut» Journal Helvétique, Jan. 1747.
Ta «Diverses réflexions concernant la physique générale» AH, I, 1751.
Tb «Diverses réflexions concernant la physique générale» AH, II, 1751.

Daniel Bernoullis Werke nach dem Datum ihrer Entstehung

Ort	Band Datum	1 Jugend- schrif- ten und Medizin I	2 Analysis II	2 Wahr- schein- lich- keits- rech- nung III	3 Mecha- nik IV	4/5 Hydro- dynamik V	6 Elasti- zität VI	7 Magne- tismus VII	7/8 Schriften zur prak- tischen Anwen- dung der Physik VIII
Bâle	1	St. 1, 2							
	2	St. 3							
VE	3								
NI	4	St. 4, 5							
SE	1725	St. 6, 7							St. 8
St.	6	St. 10, 11			St. 9				
PE	7				St. 13	St. 12, 14a			
TE	8		St. 16			St. 14b	St. 15		
RS	9	St. 17a, b				St. 18a, 19			
BO	1730		St. 20a, b	St. 22		St. 18b, 21			
UR	1								
G	2						St. 23		
	3					St. 31			
	4				St. 24		St. 25		
Bâle	1735								
	6					St. 26a, b			
	7	St. 75			St. 27				St. 28
	8				St. 29		St. 30		
	9						St. 32		
	1740				St. 33		St. 34		
	1		St. 35		St. 36		St. 37, 38		
	2								
	3							St. 39	
	4								
	1745				St. 40				St. 42
	6					St. 74		St. 41	
	7								
	8		S		St. 43				
	9					St. 44			
	1750								
	1					Ta, b			
	2								
	3						St. 45, 46		St. 47
	4								
	1755							R	
	6								
	7							St. 49	St. 48

Ort	Band Datum	1 Jugendschriften und Medizin I	2 Analysis II	2 Wahrscheinlichkeitsrechnung III	3 Mechanik IV	4/5 Hydrodynamik V	6 Elastizität VI	7 Magnetismus VII	7/8 Schriften zur praktischen Anwendung der Physik VIII
	8						St. 50		
	9								
	1760			St. 51, 52					
	1								
	2						St. 53		
	3								
	4								
	1765						St. 54		
	6			St. 55, 56					
	7								
	8				St. 57				
	9			St. 58, 59a	St. 60				
	1770			St. 59b			St. 61		
	1		St. 62				St. 63		
	2		St. 64						St. 65
	3		St. 66				St. 67		
	4						St. 68, 69		
	1775		St. 70, 71						
	6								
	7			St. 72, 73					

Verteilung der Werke Daniel Bernoullis auf die einzelnen Bände

Band	Gebiet	Kolonne in der chronologischen Übersichtstafel, p. 401–402
1	Medizinische Schriften	I
	Mathematische und logische Jugendwerke	
2	Analysis	II
	Wahrscheinlichkeitsrechnung	III
3	Allgemeine Mechanik	IV
	Mechanik des Planetensystems und der Gezeiten	
4	Hydrodynamik I, inkl. «St. Petersburgerfassung» der Hydrodynamica	V
5	Hydrodynamik II, inkl. «Baslerfassung» der Hydrodynamica	V
6	Elastizitätstheorie	VI
7	Magnetismus	VII
	Schriften zur praktischen Anwendung der Physik	VIII
8	Schriften zur praktischen Anwendung der Physik	VIII