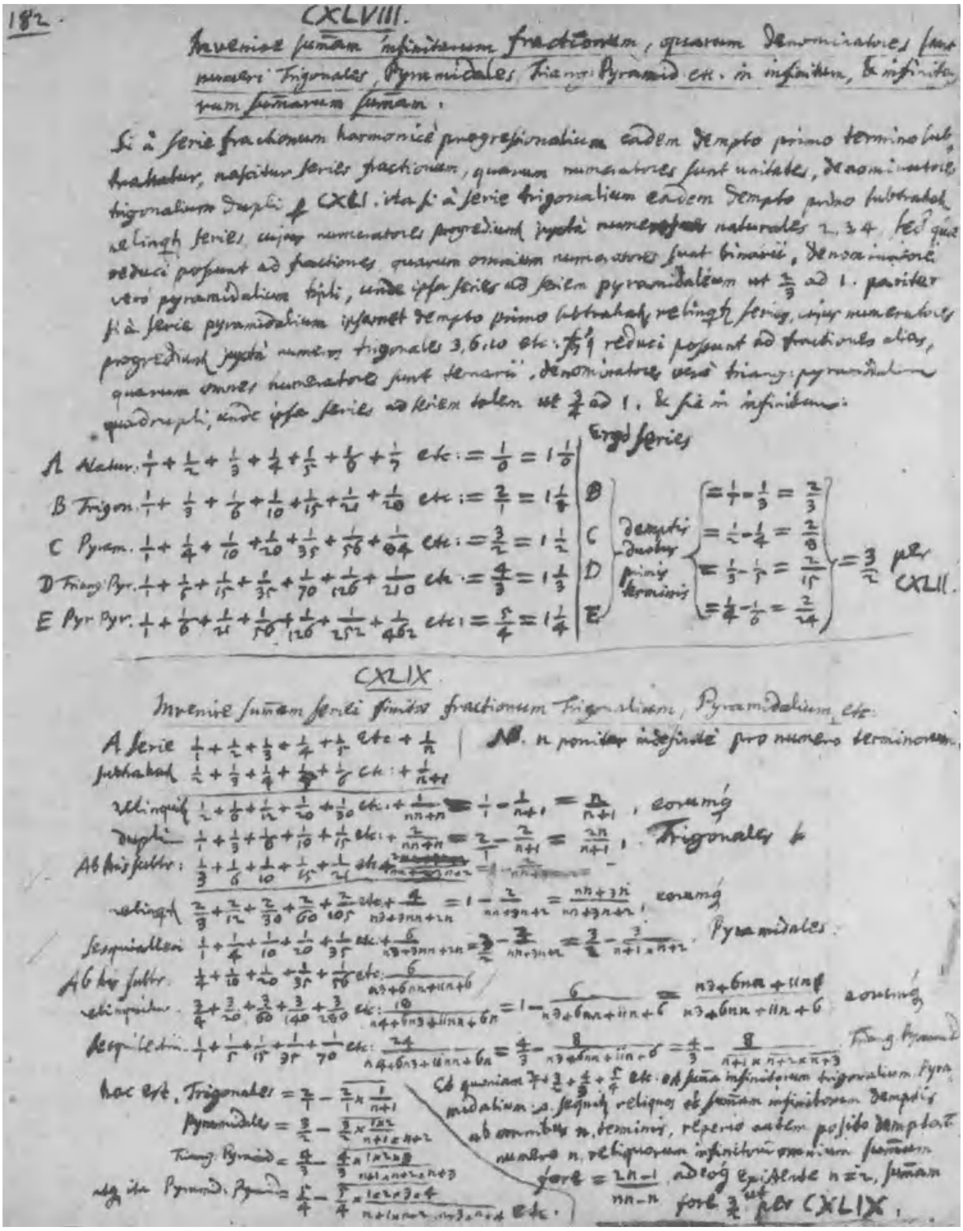
DIE WERKE VON JAKOB BERNOULLI

Band 4

Herausgegeben von der
Naturforschenden Gesellschaft in Basel

Springer Basel AG


182. CXLVIII.

Invenire summam infinitarum fractionum, quarum Denominatores sunt numeri Trigonales, Pyramidales, Triang. Pyramid. etc. in infinitum, & infinitarum summarum summam.

Si a serie fractionum harmonice progressionalium eadem dempto primo termino subtrahatur, nascitur series fractionum, quarum numeratores sunt unitates, denominatores trigonalium dupli per CXLI. ita si a serie trigonalium eadem dempto primo subtrahatur, relinquitur series, cujus numeratores progrediuntur juxta numeros naturales 2, 3, 4, sed quae reduci possunt ad fractiones, quarum omnium numeratores sunt binarii, denominatores vero pyramidalium tripli, unde ipsa series ad seriem pyramidalium ut $\frac{2}{3}$ ad 1. pariter si a serie pyramidalium ipsamet dempto primo subtrahatur, relinquitur series, cujus numeratores progrediuntur juxta numeros trigonales 3, 6, 10 etc. & quae reduci possunt ad fractiones alias, quarum omnes numeratores sunt ternarii, denominatores vero triang. pyramidalium quadrupli, unde ipsa series ad seriem talem ut $\frac{3}{4}$ ad 1. & sic in infinitum.

A Natur. $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}$ etc. $=\frac{1}{0}=1\frac{1}{0}$

B Trigon. $\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21}+\frac{1}{28}$ etc. $=\frac{2}{1}=1\frac{1}{1}$

C Pyram. $\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{10}+\frac{1}{20}+\frac{1}{35}+\frac{1}{56}+\frac{1}{84}$ etc. $=\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}$

D Triang. Pyr. $\frac{1}{1}+\frac{1}{5}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{70}+\frac{1}{126}+\frac{1}{210}$ etc. $=\frac{4}{3}=1\frac{1}{3}$

E Pyr. Pyr. $\frac{1}{1}+\frac{1}{6}+\frac{1}{21}+\frac{1}{56}+\frac{1}{126}+\frac{1}{252}+\frac{1}{462}$ etc. $=\frac{5}{4}=1\frac{1}{4}$

Ergo series B, C, D, E demptis primis terminis $=\frac{1}{1}-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$, $=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{2}{8}$, $=\frac{1}{3}-\frac{1}{5}=\frac{2}{15}$, $=\frac{1}{4}-\frac{1}{6}=\frac{2}{24}$; $=\frac{3}{2}$ per CXLII.

CXLIX.

Invenire summam seriei finitae fractionum Trigonalium, Pyramidalium etc.

A serie $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$ etc $+\frac{1}{n}$ | NB. n ponitur indefinite pro numero terminorum.

subtrahatur $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}$ etc $+\frac{1}{n+1}$

relinquitur $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}$ etc $+\frac{1}{nn+n}=\frac{1}{1}-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$, eorumque

dupli $\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}$ etc $+\frac{2}{nn+n}=\frac{2}{1}-\frac{2}{n+1}=\frac{2n}{n+1}$, Trigonales.

[illegible]

Reproduktion der Seite 182 von Jacob Bernoullis wissenschaftlichem Tagebuch *Meditationes*. Die Artikel Med. CXLVIII und Med. CXLIX (entstanden zwischen 1687 und 1689, erstmals gedruckt auf S. 199–201 dieses Bandes) demonstrieren Bernoullis wichtigste Techniken zur Summation unendlicher Reihen.

Die gesammelten Werke der Mathematiker und Physiker der Familie Bernoulli

Herausgegeben von der
Naturforschenden Gesellschaft
in Basel

Springer Basel AG

Die Werke von Jakob Bernoulli

Im Auftrag
der Naturforschenden Gesellschaft in Basel
und der Otto Spiess-Stiftung

Ediert von
David Speiser

Springer Basel AG

Die Werke von Jakob Bernoulli

Band 4
Reihentheorie

Bearbeitet und kommentiert von
André Weil,

mit historischen Anmerkungen von
Patricia Radelet-de Grave
und Martin Mattmüller

Springer Basel AG 1993

Library of Congress Cataloging-in-Publication Data

Bernoulli, Jakob, 1654–1705.
[Works. 1993]
Die Werke / von Jakob Bernoulli ; im Auftrag der Naturforschenden Gesellschaft in Basel und der Otto Spiess-Stiftung ; ediert von David Speiser.
p. cm. – (Die gesammelten Werke der Mathematiker und Physiker der Familie Bernoulli)
French, German, and Latin.
Includes bibliographical references and indexes.
Contents: – Bd. 4. Reihentheorie / bearbeitet und kommentiert von André Weil
ISBN 978-3-0348-5039-1 ISBN 978-3-0348-5038-4 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-0348-5038-4

1. Mathematics. 2. Bernoulli, Jakob, 1654–1705. I. Speiser, David, 1926– . II. Naturforschende Gesellschaft in Basel. III. Otto-Spiess-Stiftung. IV. Title. V. Series.
QA3.B477 1993
510—dc20

Die Deutsche Bibliothek –
CIP-Einheitsaufnahme

Die **gesammelten Werke der Mathematiker und Physiker der Familie Bernoulli** / hrsg. von der Naturforschenden Gesellschaft in Basel.

NE: Naturforschende Gesellschaft «Basel»

Bernoulli, Jakob: Die Werke.
Bd. 4. Reihentheorie. – 1993

Bernoulli, Jakob:
Die Werke / von Jakob Bernoulli. Im Auftr. der Naturforschenden Gesellschaft Basel und der Otto Spiess-Stiftung. Ed. von Joachim Otto Fleckenstein und David Speiser.

(Die gesammelten Werke der Mathematiker und Physiker der Familie Bernoulli)
NE: Fleckenstein, Joachim Otto [Hrsg.];
Bernoulli, Jakob: [Sammlung]

Bd. 4. Reihentheorie / bearb. und kommentiert von André Weil. Mit historischen Anm. von Patricia Radelet-de Grave und Martin Mattmüller. – 1993
ISBN 978-3-0348-5039-1

NE: Weil, André [Bearb.]

Publiziert mit Unterstützung des Schweizerischen Nationalfonds zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung.

Ursprünglich erschienen bei Birkhäuser Verlag Basel 1999

Abbildungen: Repro-Photographie der Universitätsbibliothek Basel
Buchgestaltung: Albert Gomm

ISBN 978-3-0348-5039-1

9 8 7 6 5 4 3 2 1

INHALTSVERZEICHNIS

MANUSKRIPTE – *MANUSCRITS*

VERZEICHNISSE – *INDEX*

Vorwort des Editors

Als das Kuratorium der Otto-Spiess-Stiftung im Jahre 1980 mit einem neuen Editionsplan vor die Öffentlichkeit treten wollte, schien das Unternehmen gewagt und der Erfolg ungewiss. Als die wichtigste Aufgabe erschien es, sachkundige Herausgeber zu finden. Würden sich für alle 18 Bände der ersten Etappe solche finden lassen?

Die Werke Jacob I Bernoullis waren stets als eine Hauptaufgabe betrachtet worden; Band 1 war 1969 durch J.O. Fleckenstein, Band 3 1975 durch B.L. van der Waerden ediert worden. Zudem hatte Fleckenstein Band 2 an Frau C.S. Roero übergeben, die diesen Band 1989 mit T. Viola ediert hat.

Die Herausgabe der weiteren Schriften Jacob Bernoullis bereitete dem Redaktor eine gewisse Sorge. Es war deshalb eine freudige Überraschung, als er von C.A. Truesdell erfuhr, dass André Weil, Professor Emeritus am Institute for Advanced Study in Princeton, bereit war, an der Edition mitzuarbeiten.

Schon beim allerersten Zusammentreffen in Princeton erklärte sich Herr Weil bereit, den Band 4 (*Reihentheorie*) der Werke von Jacob Bernoulli zu übernehmen. Über seine gleichzeitig geäusserte Bereitschaft, die Korrespondenz Jacob Bernoullis zu edieren, wird das Vorwort zu dem parallel erscheinenden Band *Der Briefwechsel von Jacob Bernoulli* berichten. Für das Kuratorium und den Redaktor bedeutete diese Zusage eine ungeheure Ermutigung, für die allein schon wir Herrn Weil stets dankbar sein werden.

Über die Kennerschaft und Kompetenz des grossen Mathematikers und Historikers der Mathematik braucht kein Wort verloren zu werden, und wir hoffen, dass dieser Band nicht nur Historikern, sondern auch vielen Wissenschaftern, besonders Mathematikern, einen Zugang zum Werk Jacob Bernoullis eröffnen wird. So ist es auch unsere Hoffnung, dass diese Bände gelegentlich als Grundlage für ein wissenschaftshistorisches Seminar Verwendung finden werden.

Kuratorium und Förderverein möchten Herrn Weil für seine Arbeit und Mitarbeit während dieser vielen Jahre und auch für seine Geduld, als verschiedene Umstände die Edition verzögerten, ihren herzlichen Dank aussprechen!

Dieser Dank gilt auch Frau P. Radelet und Herrn M. Mattmüller: wie immer war wiederum in der Edition viel Parallelarbeit zu leisten. Frau Radelet war um historische Querverbindungen besorgt, und Herrn Mattmüller verdanken wir die Überprüfung der Transkriptionen aus den Manuskripten sowie die Vervollständigung der bibliographischen Dokumentation.

Der Stand der Ausgabe

- Im Jahr 1992 erschien Band 3 des Briefwechsels von Johann I Bernoulli: *Der Briefwechsel mit Pierre Varignon*, Zweiter Teil (1702–1714), ediert von P. Costabel † und Frau J. Peiffer.
- Im Augenblick ist beim Verlag nebst dem vorliegenden Band 4 der Werke von Jacob Bernoulli und dem parallel erscheinenden Briefband (ediert ebenfalls von A.Weil, mit Beiträgen von C.A. Truesdell und F. Nagel) eingereicht: *Die Werke von Daniel Bernoulli*, Band 7 (*Magnetismus*, ed. P. Radelet; *Technologische Arbeiten I*, ed. A. Englebert).
- Ein grosser Teil von Band 1 der *Werke von Daniel Bernoulli* (*Medizinische Schriften*; *Jugendwerke*) ist bei der Edition deponiert und wir hoffen, den Band in der ersten Hälfte 1993 dem Verlag übergeben zu können.
- Während der Drucklegung des vorliegenden Bandes ist die Einleitung von Herrn Weil zu Band 5 der *Werke von Jacob Bernoulli* (*Differentialgeometrie*), sein dritter Beitrag zu dieser Edition, bei der Redaktion eingetroffen.

In seiner letzten Sitzung hat der wissenschaftliche Beirat der Edition den von Frau P. Radelet bereinigten Vorschlag für die zweite Etappe gutgeheissen; diese umfasst die Werke von Johann I Bernoulli, von Jacob Hermann und der fünf «kleineren» Bernoulli. Zugleich wurden einige Bände an verschiedene Editoren übertragen. Über diese zweite Etappe, die damit definitiv unterwegs ist, wird (wie schon 1982 über die erste) eine Broschüre die Öffentlichkeit unterrichten.

Dank

Nächst dem Herausgeber und seinen Mitarbeitern gilt unser Dank vor allem Herrn Dr. F. Nagel für seine Mithilfe. Kuratorium und Förderverein danken ihm herzlich dafür.

Dem Schweizerischen Nationalfonds zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung danken wir für die finanzielle Unterstützung und insbesondere Herrn R. Nussbaumer für die Betreuung auch dieses Bandes.

Herrn Dr. H. Stähelin, dem Präsidenten des Vereins zur Förderung der Bernoulli-Edition und ständigen Delegierten der Naturforschenden Gesellschaft in Basel, Herrn Prof. Dr. G.A. Tammann, dem Präsidenten des wissenschaftlichen Beirats, Herrn Dr. G. Teleki, dem Schatzmeister des Fördervereins, und den Herren Dr. J.-L. von Planta und B. Marzetta vom Kuratorium der Otto Spiess-Stiftung sind wir zu dauerndem Dank verpflichtet.

Vor allem gilt unser Dank auch Leitung und Mitarbeitern der Universitätsbibliothek Basel sowie des Birkhäuser Verlags.

Basel, den 30. Dezember 1992 David Speiser

In dem Vergangnen lebt das Tüchtige,
verewigt sich in schöner Tat.

GOETHE

Die Herausgabe des vorliegenden Bandes wurde durch Spenden folgender Institutionen ermöglicht:

SCHWEIZERISCHER NATIONALFONDS ZUR FÖRDERUNG DER WISSENSCHAFTLICHEN FORSCHUNG

BÂLOISE JUBILÄUMSSTIFTUNG, BASEL

LOTTERIEFONDS DES KANTONS BASEL-STADT

MAX GELDNER-STIFTUNG, BASEL

FREIWILLIGE AKADEMISCHE GESELLSCHAFT, BASEL

Zur Wiedergabe der Texte

Das Hauptziel dieser Edition ist es, die wissenschaftlichen Schriften der Mathematiker und Physiker der Familie Bernoulli dem modernen Leser zugänglich zu machen. Im folgenden seien die Kriterien vorgestellt, denen wir bei der Wiedergabe dieser Texte gefolgt sind.

Die Quellen

Als Grundlage wurde bei den zu Lebzeiten Jacob Bernoullis gedruckten Texten jeweils der Text der ersten veröffentlichten Fassung verwendet; es handelt sich dabei um Separatdrucke von sechs Basler Dissertationen unter der Leitung Bernoullis sowie um vier Abhandlungen, welche in den Zeitschriften *Acta Eruditorum* und *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences* erschienen.

Wo der Text der *Opera*-Ausgabe von 1744 von dieser Erstausgabe abweicht, wurde dies in den Fussnoten der Redaktion erwähnt. Die zahlreichen Fussnoten des Herausgebers der *Opera*, Gabriel Cramer, wurden nur ausnahmsweise wiedergegeben.

Als Vorlage für die dreissig hier erstmals veröffentlichten Artikel aus Jacob Bernoullis wissenschaftlichem Journal, den *Meditationes*, diente das autographe Manuskript (Ms UB Basel L I a 3). Ein Verzeichnis der in diesem Band abgedruckten *Meditationes* findet sich auf S. 181–183.

Einer dieser Artikel (Med. CCLXV) wurde von Bernoulli selber für einen posthumen Abdruck vorgesehen, wie aus dem Manuskript der *Varia Posthuma* hervorgeht; er ist als Op. CIII, Art. I, unverändert in Jacobs *Opera* aufgenommen worden und wird hier separat abgedruckt.

Ebenfalls nach dem in der Universitätsbibliothek Basel aufbewahrten Manuskript wurde der Text von Bernoullis Dekanatsrede «De Historia Cycloïdis» von 1701 wiedergegeben.

Die Textfassung

Mit wenigen Ausnahmen, die wir im folgenden genauer ausführen, wurde in der vorliegenden Ausgabe der Text der zugrundeliegenden Fassung (Erstveröffentlichung bzw. Manuskript) originalgetreu wiedergegeben. Insbesondere haben wir Terminologie und Formelsprache der Zeit um 1700 streng beibehalten, um die zahlreichen Fehlerquellen auszuschliessen, die sich aus einer modernen «Umschreibung» von Formeln oder der Ersetzung von Begriffen durch moderne «Äquivalente» ergeben können. Um dem modernen Leser die Lektüre zu erleichtern, wurden jedoch folgende Änderungen vorgenommen:

- Der in Texten des 16. bis 18. Jahrhunderts verwendete Buchstabe «ſ» wurde durch «s» ersetzt; «u» und «v» wurden entsprechend dem modernen Gebrauch unterschieden; griechische Buchstaben wurden mit modernen Typen wiedergegeben.
- Die vor allem in Jacob Bernoullis Handschriften zahlreich benutzten Abbreviaturen wurden aufgelöst. Der Leser findet eine Liste der häufigsten dieser Kürzel in *Werke* 1, S. 515.
- Akzente wurden im lateinischen Text weggelassen, im französischen dagegen originalgetreu wiedergegeben.
- Offensichtliche Druckfehler wurden behoben und werden nur dann in den Anmerkungen angezeigt, wenn sie für das Verständnis des Textes von Belang sind.
- Gruppen von Zahlen sind in den Vorlagen gelegentlich durch Punkte abgetrennt (etwa «Act. Maj. 1699. pag. 214.l.21.»). Der Übersichtlichkeit zuliebe haben wir diese Punkte öfters weggelassen oder durch Kommata ersetzt.
- In vielen Fällen haben wir die Anordnung des Textes auf der gedruckten Seite verändert. Insbesondere wurden Formeln, die im Original im fortlaufenden Text standen, im Interesse der Klarheit herausgestellt, zentriert, in Spalten oder in Tabellen angeordnet. Zwischen den einzelnen Sätzen, Beweisen, Folgerungen usw. wurden Leerzeilen und Absätze eingefügt. Klammerbemerkungen oder Schlussfloskeln wie «Q.E.D.» wurden neben oder unter dem Text angebracht.

Die Formeln

Die mathematischen Notationen Jacob Bernoullis wurden möglichst genau so wiedergegeben, wie sie in der Textvorlage erscheinen – dies im Gegensatz zum Vorgehen von Gabriel Cramer in der *Opera*-Ausgabe von 1744. Zur Herkunft dieser Bezeichnungen und zu ihren Abweichungen vom modernen Gebrauch vergleiche man die folgenden Ausführungen des Kommentators dieses Bandes *Les notations de Jacob Bernoulli* (pp. XVII–XXI).

Die Abbildungen

Die Titelblätter und zum Teil auch die Widmungen der separat gedruckten Dissertationen, die in diesem Band enthalten sind, wurden photographisch wiedergegeben; ebenso einige Schriftproben aus Jacob Bernoullis Manuskripten. Die Figuren wurden aus der als Vorlage verwendeten Textfassung photographisch reproduziert; zur leichteren Orientierung wurden sie auch dann verteilt in den Text eingebaut, wenn sie ursprünglich auf separaten Tafeln gedruckt waren. Aus demselben Grund haben wir einige der Figuren aus den *Positiones de Seriebus infinitis*, auf welche der Autor an mehreren weit voneinander entfernten Stellen Bezug nimmt, wiederholt.

Anstelle der Figuren, die der Erstveröffentlichung von Op. XXXVII in den *Acta Eruditorum* beigegeben waren, haben wir (pp. 152–158) die klareren Zeichnungen von Cramers Werkausgabe reproduziert.

Abkürzungsverzeichnis

In der Einführung, den Fussnoten und den Registern dieses Bandes werden folgende Abkürzungen benutzt:

Ms	Manuskript
h. v.	*hoc volumine* (im vorliegenden Band)
TA	*Terminus ante quem*
TP	*Terminus post quem*
UB Basel	Öffentliche Bibliothek der Universität Basel
Jac. B.	Jacob (I) Bernoulli
Joh. I B.	Johann I Bernoulli
Op. I–CII	Numerierung der Werke von Jacob Bernoulli nach den *Opera*
VP I–XXXII	*Varia Posthuma* (= Op. CIII)
Med. I–CCLXXXVI	*Meditationes*
Na. 001–059	Numerierung der Werke von Jacob Hermann nach F. Nagel, *A Catalog of the Works of Jacob Hermann*: Historia Mathematica 18 (1991), pp. 36–54
AE	Acta Eruditorum, Lipsiae 1682–1776
JS	Journal des Sçavans, Paris 1665 –
Mém. Paris	Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, Paris 1666 (1703) –
Phil. Trans.	Philosophical Transactions, London 1665 –
[Jac. B.] *Opera*	*Jacobi Bernoulli Basileensis Opera*, Cramer & Philibert, Genevae 1744 (2 Bände, fortlaufend paginiert; zu den Titeln von Op. I–CII und VP I–XXXII vgl. das Werkverzeichnis p. 287 h.v.)
Joh. I B. *Opera*	*Johannis Bernoulli ... Opera Omnia*, Bousquet, Lausannae & Genevae 1742, t. I–IV
[Jac. B.] *Werke*	*Die Werke von Jakob Bernoulli*, Birkhäuser, Basel 1969 –
Streitschriften	*Die Streitschriften von Jacob und Johann Bernoulli*, Birkhäuser, Basel 1991
Jac. B. *Briefe*	*Der Briefwechsel von Jacob Bernoulli*, Birkhäuser, Basel 1993
Joh. I B. *Briefe*	*Der Briefwechsel von Johann I Bernoulli*, Birkhäuser, Basel 1955 –
Euler, *Op. Omnia*	*Leonhardi Euleri Opera Omnia*, Turici (etc.) 1911 –
Huygens, *Œuvres*	*Œuvres complètes de Christiaan Huygens*, publiées par la Société Hollandaise des Sciences, La Haye 1888–1950
Leibniz, *Math. Schriften*	*Leibnizens mathematische Schriften*, herausgegeben von C.I. Gerhardt, Halle 1850–1863

Les notations de Jacob Bernoulli

La liste qui suit a été établie principalement d'après les *Positiones de Seriebus infinitis* (pp. 45–147 h.v.), dont l'impression s'est faite à Bâle, donc certainement sur les instructions de Jacob Bernoulli[1].

1	(Egalité)	ꝏ $=$
2	(Proportions)	$::$ ∺
3	(Inégalité)	$>$ $<$
4	(Inégalité de rapports)	⌊ ⌋
5	(Addition, soustraction)	$+$ $-$ $\pm$ $=$ 8 ♉
6	(Multiplication)	$\times$ $\cdot$ in $\square$ $+$
7	(Carré)	xq Q:x $\square x$
8	(Puissances)	x3 C:x x4 QQ:x $n\overset{m}{\nabla}$
9	(Infini)	∞
10	(Racine, carrée et autres)	$\surd$: $\surd$C $\surd$S $\surd$BS
11	(Séparation et réunion)	: $\overline{\qquad\qquad}$
12	(Intégrale)	**S** omnia

Commentaire

Comme il est naturel, les notations de Bernoulli proviennent des ouvrages où il a dû faire son éducation mathématique; ce sont peut-être William Oughtred, *Clavis mathematicae*[2] et sans doute la *Géométrie* de Descartes dans l'édition latine, commentée, de F. van Schooten (Amsterdam 1659–1661) ainsi que les écrits de I. Barrow (son *Euclide* de 1655, ses *Lectiones opticae* de 1669 et ses *Lectiones geometricae* de 1674) et ceux de J. Wallis (en particulier son *Arithmetica infinitorum* de 1655). On notera qu'à ses débuts Jacob a conservé, dans ses notations tout au moins, la distinction traditionnelle, remontant à Euclide, entre *rapports* de grandeurs de même espèce («magnitudines» ou «quantitates»: cf. Op. XXXIV) et *nombres*; cette distinction avait progressive-

1 Cf. aussi F. Cajori, *A History of Mathematical Notations*, vol. I, Chicago 1928.
2 1[e] éd. Londini 1631, et de nombreuses éditions au XVII[e] siècle.

ment tendu à s'effacer au cours du XVI^e et du XVII^e siècle, par identification des *rapports de grandeurs* avec les nombres *réels* (rationnels ou irrationnels).

(1) Dans ses publications, Bernoulli note constamment l'égalité par le signe $\propto$, qu'il a dû emprunter à Descartes. Dans ses manuscrits il emploie le signe moderne $=$, popularisé entre autres par Wallis.

(2) Pour les rapports et les proportions (dans la mesure où il continue à observer la distinction entre rapports et nombres), Bernoulli emploie les symboles de Oughtred (conservés par Barrow), p. ex. $A.B :: C.D$ pour $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$, et de même $A.B :: B.C :: C.D$ etc. pour la «proportion continue» $\frac{A}{B} = \frac{B}{C} = \frac{C}{D}$ etc. qu'il note aussi $A, B, C, D \div\!\!:$.

(3) Les signes $>$ et $<$ pour l'inégalité sont ceux introduits par T. Harriot, dont l'ouvrage posthume *Artis analyticae praxis* (Londini 1631) a pu être utilisé par Bernoulli; mais il avait aussi pu les prendre p. ex. chez Wallis.

(4) Oughtred écrivait $A.B \sqsubset C.D$ pour $\frac{A}{B} > \frac{C}{D}$, et $A.B \sqsupset C.D$ pour $\frac{A}{B} < \frac{C}{D}$, et cette notation se retrouve chez Bernoulli p. ex. dans Med. CXXXVI, mais jamais, semble-t-il, dans ses publications.

(5) En plus des signes $+$ et $-$, déjà classiques à l'époque de Bernoulli, celui-ci emploie $=$ pour noter la valeur absolue de la différence, p. ex. $A = B$ pour $|A-B|$; c'est le signe de Viète, adopté par van Schooten[3]. A l'exemple de ce dernier, il emploie aussi[4] 8 pour $\pm$ (v. Op. LIV, Prop. XXVI, p. 76 h.v.; mais $\pm$ au passage correspondant de Med. CXLVII, p. 197 h.v.), et il écrit 8 pour $\mp$.

(6) Le plus souvent, Bernoulli note la multiplication, soit par simple juxtaposition des facteurs, soit par un point qui les sépare, p. ex. $1 \cdot 2 \cdot 3$ pour $1 \times 2 \times 3$ et $n \cdot n+1 \cdot n+2$ pour $n(n+1)(n+2)$ (cf. Op. LIV, Prop. XIX, p. 66 h.v.). Il emploie aussi «in» comme signe de multiplication quand il y a lieu d'être plus explicite (usage introduit par Viète, semble-t-il, et adopté par Oughtred); il n'emploie $\times$ à cet effet que dans ses manuscrits. En de rares occasions, dans des contextes géométriques, il emploie le traditionnel $\square$ pour *rectangulum*, c'est-à-dire le produit de deux segments (v. Op. LXXIV,

3 V. p. ex. *Geometria* (1659), p. 330.
4 V. p. ex. *Geometria* (1659), pp. 340–341.

Prop. XLIII, p. 96 h.v.). Enfin il lui arrive, à l'exemple de Barrow[5], d'écrire + (qui dans ce volume sera imprimé **+** en caractère gras) pour noter le *composé* (au sens euclidien) de deux rapports, c'est-à-dire en fait leur produit[6].

(7) Le carré de a est noté le plus souvent soit aa (notation qui s'est conservée au XVIII^{e} siècle, p. ex. chez Euler), soit $\square\ a$; p. ex. $\square$ 1, $\square$ 3, $\square$ 6 pour $1^2=1$, $3^2=9$, $6^2=36$ (Op. LIV, Prop. XXII, p. 70 h.v.); mais on trouve aussi Aq pour A^2 (Op. XXXV, Prop. VIII, p. 49 h.v.), Q:26 pour $26^2=676$ (Op. XXXV, Prop. XVI, p. 57 h.v.), et b in Q:$d-1$ pour $b(d-1)^2$; ici, bien entendu, le traditionnel q ou Q représente l'initiale de *quadratum*.

(8) Naturellement Bernoulli est familier avec la notation exponentielle de Descartes, adoptée par Wallis; il écrit p. ex. 1^m, 2^m, 3^m etc. (Op. LIV, Prop. XXIV, p. 74 h.v.). S'il écrit généralement $x3$, $x4$, etc. au lieu de x^3, x^4, etc. lorsqu'aucune confusion n'est possible avec la multiplication, c'est sans doute pour des raisons typographiques; de même p. ex. pour $bd3$ au lieu de bd^3, etc. Mais, à côté de cette notation «moderne», Bernoulli emploie aussi assez souvent les notations traditionnelles, C pour le cube et QQ pour le *bicarré* c'est-à-dire la quatrième puissance; c'est ainsi qu'il écrit b in C:d–1, b in QQ:d–1 pour $b(d-1)^3, b(d-1)^4$ (Op. XXXV, Prop. XIV, pp. 53–54 h.v.).

(9) Le signe ∞, pour *infini*, est naturellement celui de Wallis, introduit dans son *Arithmetica infinitorum*.

(10) Pour la racine carrée, Bernoulli emploie naturellement la notation traditionnelle $\surd$, et de même $\surd$C pour la racine cubique, qui souvent, comme chez Wallis, deviennent (avec le signe : de séparation et réunion, cf. ci-dessous) $\surd$: , $\surd$C: ; avec le «vinculum» (v. ci-dessous), on obtient la notation *moderne* $\sqrt{\quad}$, p. ex. $\sqrt{1-xx}$ (Op. XC, Prop. XLVIII, p. 111 h.v.). On notera (dans Op. LIV, Prop. XXX–XXXI, p. 79 h.v.) en plus de la notation traditionnelle $\surd$C: pour la racine cubique, les notations $\surd$S. et $\surd$BS. pour les racines cinquième et septième (où S désigne la cinquième puissance, *surdesolidum*, et BS la septième puissance, *2^{dum} surdesolidum*[7]).

(11) Bernoulli ignore l'usage des parenthèses, qui ne s'est bien établi qu'au XVIII^{e} siècle[8]. En leur lieu, il emploie, soit : , comme dans $m-b$: in c pour

5 Cf. Cajori, *op. cit.*, pp. 248–249.
6 V. Op. XXXV, Prop. XI, p. 50 h.v., et Nr. 173 = Med. LXXXIX, *Werke* 3, p. 78 (avec l'explication p. 380).
7 Cf. Cajori, *op. cit.*, p. 215.
8 Cf. Cajori, *op. cit.*, pp. 390–394.

$(m-b)c$ (c'était la notation de Oughtred, reprise par Wallis), soit le «vinculum» c'est-à-dire le trait supérieur surmontant le groupe de termes que depuis le XVIII^e siècle on mettrait entre parenthèses; c'est ainsi qu'il écrit Log. $\overline{1+y}$ pour $\log(1+y)$.

(12) Bernoulli écrit naturellement l'intégrale comme Leibniz, et comme nous, mais, faute d'un signe spécial à son imprimerie bâloise, la désigne par S (qui dans ce volume sera imprimé **S** en caractère gras); à l'occasion il emploie aussi le terme traditionnel *omnia* (Op. XC, Prop. XLIX, p. 112 h.v.: «omnia dy seu y»).

Table des notations

On n'a inclus dans la table que les notations d'un usage plus ou moins fréquent qui pourraient faire difficulté au lecteur moderne.

Bernoulli	Moderne
∞	$=$
$A.B :: C.D$	$\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$
$\mathrm{A.B} + C.D$	$\frac{A}{B} \times \frac{C}{D}$
ꝭ	$\pm$
ȣ	$\mp$
in	$\times$
▭	$\times$
$\square x$	x^2
$A\mathrm{q}$	A^2
$\mathrm{Q}{:}x$	x^2
$\mathrm{C}{:}x$	x^3
$\surd x$	$\sqrt{x}$
$\surd \mathrm{C}{:}x$	$\sqrt[3]{x}$

Einleitung

Introduction

Introduction générale

Dans le présent volume, dont la présentation et l'annotation m'ont été confiées par les éditeurs, ceux-ci ont regroupé principalement ceux des écrits de Jacob Bernoulli qui ont trait à la théorie des séries. Mais il ne sera pas inutile en cette occasion de récapituler d'abord rapidement les diverses composantes dont la réunion forme l'œuvre de Jacob Bernoulli telle qu'elle nous est parvenue[1].

1°. Ce sont d'abord les écrits qu'il a publiés lui-même; ils se trouvent réunis dans les deux volumes des *Opera* publiés à Genève en 1744 par Gabriel Cramer, et abondamment annotés par celui-ci sur les instances du neveu de Jacob, Nicolas I Bernoulli (cf. la préface du vol. I, p. vii). Ces écrits (auxquels Cramer a joint quelques articles d'autres auteurs, nécessaires à l'intelligence d'articles de Jacob où ils se trouvent discutés) sont numérotés de I à CII, et seront cités par Op. I, ..., Op. CII dans le présent volume.

2°. Le volume *Ars Conjectandi* et un article annexe (*Lettre à un Amy...*) sur la théorie des probabilités; ils ont été publiés à Bâle en 1713 par Nicolas I Bernoulli; dans le cadre de la présente publication des œuvres de Jacob, ils sont reproduits dans le volume *Die Werke von Jacob Bernoulli*, Bd. 3, Basel 1975, pp. 107–286, et seront cités par *Werke* 3, p. ... . Dans le volume de 1713, Nicolas y avait ajouté le *Tractatus de Seriebus Infinitis*, déjà publié par morceaux par Jacob lui-même (v. plus loin); ceux-ci furent repris ensuite par Cramer dans les *Opera* (Op. XXXV, LIV, LXXIV, XC, CI).

3°. Le volume manuscrit des *Meditationes*, qui constitue le journal scientifique de Jacob, commencé en 1677 à Genève et continué jusqu'à la veille de sa mort. Les articles en sont numérotés de I à CCLXXXVI et seront cités par Med. I, ..., Med. CCLXXXVI. La plupart ne sont pas datés; on adoptera ici la datation approximative établie par P. Radelet et C.S. Roero en vue de la présente édition.

4°. Une mention spéciale est due aux *Varia Posthuma*, collection d'articles (numérotés de I à XXXII) insérés sous le n° CIII à la fin du vol. II des *Opera* (pp. 993–1139). Le manuscrit s'en conserve à Bâle. Les trois premiers articles (y compris le titre *Varia Posthuma Jac. Bernoulli*, évidemment écrit par Jacob dans l'attente de sa mort

1 Cf. l'introduction de O. Spiess à Joh. I B. *Briefe* 1, pp. 21–23; 70–71.

prochaine) sont de la main de Jacob, ainsi que le titre de l'article IV; les suivants, jusqu'à l'article XIII, sont de la main de son élève J. Hermann, mais écrits sous la dictée de Jacob[2]. Le reste, rédigé longtemps après la mort de Jacob d'après quelques articles des *Meditationes*, est de la main de Nicolas I Bernoulli et annoté par celui-ci. Il sera référé aux *Varia Posthuma* par VP I, ..., VP XXXII.

5°. Aux *Varia Posthuma* il convient de joindre un manuscrit de la main de J. Hermann (avec une note de Nicolas I), *Viri Cl. Jacobi Bernoulli Typus Locorum Hypersolidorum*; c'est une énumeration des types de cubiques planes qui date de la fin de la vie de Jacob et dont il fait mention dans sa lettre à Leibniz[3] du 28 février 1705.

6°. On conserve de Jacob deux discours académiques, dont l'un, *De Arte Combinatoria*, a paru dans *Werke* 3, pp. 98–106, et l'autre, *De Historia Cycloïdis*, sera reproduit dans ce volume, pp. 257–266.

7°. Contrairement à beaucoup de ses contemporains, et en particulier à son frère Johann, Jacob Bernoulli n'était pas grand epistolier; d'ailleurs une partie de sa correspondance semble définitivement perdue[4]. De ce qui en reste, la correspondance avec Leibniz, y compris un projet de lettre à D. Clüver, a paru dans Leibniz, *Math. Schriften* III, pp. 10–110. La correspondance avec Johann I Bernoulli, ou plutôt ce qui en reste (il ne s'est conservé que quatre lettres de Johann à Jacob) a paru dans Joh. I B. *Briefe* 1, pp. 102–117. Le reste est inédit et sera publié dans un volume *Der Briefwechsel von Jacob Bernoulli*, qui va paraître en même temps que le présent volume 4 des *Werke*. Il est à noter que, suivant l'usage du temps, les communications destinées à un journal scientifique étaient souvent rédigées sous forme de lettres personnelles à l'éditeur (p. ex. à Otto Mencke, s'il s'agissait des *Acta Eruditorum* de Leipzig; cf. Op. XXIII, Op. XXIV, et de même Op. XVI, Op. LXXXVII, Op. XCVII). Quand donc Jacob, dans ses *Meditationes*, se réfère à «litterae meae», «epistola mea», il est incertain si la référence se rapporte à une lettre proprement dite (à son frère, par exemple) ou bien à un article envoyé à Otto Mencke pour les *Acta Eruditorum*, comme c'est apparemment le cas dans Med. CCII, où la référence ne peut guère renvoyer qu'à Op. LVI.

2 Cf. la préface des *Opera*, p. vii.
3 Voir Jac. B. *Briefe*, pp. 141–142, et Leibniz, *Math. Schriften* III, p. 98. Le *Typus Locorum* va être reproduit dans Jac. B. *Werke* 5.
4 Cf. Joh. I B. *Briefe* 1, pp. 57–61.

Conformément au plan établi par les éditeurs, tout ce qui est sorti de la plume de Jacob Bernoulli (ou bien, en ce qui concerne VP IV–XXXII, de celles de J. Hermann et de Nicolas I) doit trouver sa place dans la présente édition. En revanche, il n'a pas paru nécessaire de s'astreindre à reproduire la plupart des annotations de G. Cramer aux textes des *Opera*; le cas échéant, celles-ci seront introduites par une note de l'éditeur.

Les débuts mathématiques de Jacob et la théorie des séries

A en croire son collègue et biographe J.J. Battier[5], Jacob avait pris goût aux mathématiques dès son jeune âge, mais ce n'est guère qu'au cours de son séjour en Hollande en 1681 qu'il commença à s'y intéresser sérieusement. Il apprit les *Eléments* d'Euclide à Leyde en les enseignant[6], et au contact de mathématiciens qui continuaient la tradition cartésienne, il étudia la *Géométrie* de Descartes, certainement dans la seconde édition latine de Fr. van Schooten[7], où elle se trouve enrichie des commentaires de celui-ci et d'importants articles dus surtout à ses compatriotes hollandais; Jacob devait plus tard y ajouter ses propres observations, qui parurent dans l'édition de Francfort de la même *Géométrie*[8] en 1695. En Angleterre, où il se rendit ensuite, il ne rencontra guère que des physiciens, semble-t-il; mais un mathématicien allemand, D. Clüver, pour qui Leibniz a eu quelque estime, lui fit connaître, dans le cahier de février 1682 des *Acta Eruditorum* nouvellement créés à Leipzig, l'article de Leibniz sur la «quadrature arithmétique» par lequel celui-ci inaugurait la série de ses publications mathématiques. Il en fut assez frappé pour s'en souvenir encore treize ans plus tard[9].

En octobre 1682 il rentra à Bâle, où son frère Johann, tout juste âgé de 15 ans, s'apprêtait à quitter la carrière commerciale à laquelle le destinait son père pour se faire immatriculer à l'Université. En 1684 Jacob se marie, bien entendu avec une demoiselle de la meilleure société bâloise («cum lectissima virgine», nous dit Battier); il ne quittera plus Bâle jusqu'à sa mort en 1705. Ce furent là des années studieuses, malgré les interruptions dues à la mauvaise santé. Dès 1683 il inaugura, non sans succès semble-t-il, un enseignement de physique expérimentale à l'Université; en même temps, et avec un zèle croissant, il reprit ses études

5 Cf. Jac. B. *Opera*, pp. 7–34.
6 *loc. cit.*, p. 15.
7 2 vol., Amsterdam 1659–1661.
8 Cf. Op. LXVII, *Notae et Animadversiones tumultuariae* ...: *Werke* 2, pp. 547–602, et le commentaire de T. Viola et C.S. Roero, *op. cit.*, en particulier pp. 253–260.
9 V. sa lettre à Leibniz du 9 octobre 1695 et la réponse de Leibniz du 2 décembre dans Jac. B. *Briefe*, pp. 67–76.

mathématiques, auxquelles bientôt il associa Johann de plus en plus étroitement. A la lumière de ses *Meditationes* et de ses publications ultérieures, il apparaît qu'il porta d'abord principalement son attention sur le calcul des probabilités[10]. C'est à la même époque aussi sans doute, et peut-être en liaison avec ses réflexions sur les probabilités, qu'il étudia l'*Arithmetica Infinitorum* de Wallis[11].

Le 15 février 1687, Jacob fut nommé à la chaire de mathématique de l'Université, après la formalité de la soutenance d'une thèse d'habilitation[12] qui consistait seulement en trois exercices élémentaires d'arithmétique, de géométrie et de cosmographie. Sans doute, comme il était encore d'usage à cette époque, une bonne partie de son enseignement, dans les premières années tout au moins, dut-elle être consacrée aux *Eléments* d'Euclide; c'est ce dont témoignent les «thèses» qu'il rédigea en 1688 pour l'examen de maîtrise de Paul Euler (auquel devait naître en 1707 un fils prénommé Leonhard qui rendrait son nom célèbre). Ces thèses, imprimées sous le titre *Positiones Mathematicae de Rationibus & Proportionibus*[13] ne vont guère au delà d'un exposé commenté du livre V d'Euclide; on y trouve néanmoins la formule de sommation d'une progression géométrique, soit finie (Thèse 33), soit infinie (Thèses 34–35); sur la fin (Thèses 49–50), il est même question, sous une forme à vrai dire plus métaphysique que mathématique, de rapports *infinis* et *infiniment petits*.

D'un tout autre niveau sont les *Positiones de Seriebus Infinitis*, destinées, elles aussi, à être «défendues» publiquement (*aux lieu et heure accoutumés*, «horis locoque consuetis») par des élèves de Jacob, J. Fritz en 1689 (Op.XXXV), H. Beck en 1692 (Op. LIV), J. Hermann en 1696 (Op. LXXIV), N. Harscher en 1698 (Op. XC) et enfin le neveu de Jacob, Nicolas I Bernoulli, en 1704 (Op. CI).

Sans doute faut-il voir dans ces *Positiones* un reflet de l'enseignement de Jacob tout au long de sa carrière; assurément les tout jeunes gens en question, si doués qu'ils fussent, n'auraient pu se hausser jusqu'aux sommets de la mathématique contemporaine s'ils n'y avaient pas été menés pas à pas. L'ensemble des *Positiones* finit par constituer un véritable traité sur le sujet des séries infinies; c'est sous ce titre (*Tractatus de Seriebus Infinitis*) que Nicolas Bernoulli les rassembla pour les réimprimer («à la demande générale», dit-il, les éditions originales étant devenues introuvables) à la suite de l'*Ars Conjectandi* posthume de 1713. Que

10 Cf. Med. LXIII–LXX, Jac. B. *Werke* 3, pp. 21–40; cf. Op. XIV, *ibid.*, p. 91, et n° 20–21 des «Theses Miscellaneae» dans Op. XVII: Jac. B. *Werke* 1, pp. 270–271; on notera que ce dernier travail fut rédigé par Jacob à l'usage de Johann pour être défendu par celui-ci en vue de l'obtention du grade de maître ès arts en 1685.

11 Cf. Op. XXIV, p. 149 h.v. et Med. LXIV, Jac. B. *Werke* 3, p. 24.

12 Op. XXVII, Jac. B. *Werke* 2, pp. 92–120.

13 Op. XXXIV, pp. 35–44 h.v.

cela ait été conforme aux intentions de Jacob résulte du fait qu'il en avait numéroté consécutivement à la fois les figures (de 1 à 5 en 1696, 6 en 1698, 7 en 1704) et les *positions* ou *propositions* (de I à XVII en 1689, de XVIII à XXV en 1692, etc., jusqu'à LIII–LX en 1704). Le succès en fut considérable, s'il faut en croire G. Cramer[14] qui cite à cet égard les témoignages de P.R. de Montmort, B. Taylor, A. de Moivre, etc. Même en 1765 d'Alembert, dans l'*Encyclopédie* (article «series») en recommendait encore la lecture.

Le traité *De Seriebus*

Le traité de Bernoulli, s'il est permis de continuer à l'appeler ainsi, a donc été publié en cinq sections; mais en réalité il se divise en deux parties, chacune avec son titre et sa préface. La première, intitulée *Positiones Arithmeticae de Seriebus infinitis earumque Summa finita*, qui se compose des sections publiées en 1689 et 1692, ne fait appel qu'à des raisonnements et artifices élémentaires. La seconde, qui porte le titre de *Positiones de Seriebus infinitis earumque Usu in Quadraturis Spatiorum et Rectificationibus Curvarum*, met en jeu, au contraire, toutes les ressources de l'analyse leibnizienne.

A vrai dire, dans l'une et l'autre partie de son travail, Bernoulli avait été largement devancé. D'une part le livre de P. Mengoli, *Novae Quadraturae Arithmeticae* (Bologna 1650), consacré à une étude élémentaire des séries, était assez semblable, dans le fond, aux *Positiones Arithmeticae*; mais cet ouvrage n'avait eu que peu de retentissement, en raison peut-être de l'obscurité de son langage et de l'absence d'une notation adéquate; Leibniz ne l'a jamais eu entre les mains, et il n'a été tiré de l'oubli que par quelques historiens modernes[15]; Bernoulli n'a jamais dû même en connaître l'existence. D'autre part, une étude des développements en série, orientée vers la théorie des fonctions et en même temps vers le calcul numérique, avait été inaugurée, dès la décade 1660–1670, par Mercator et Brouncker, puis largement développée par Newton et J. Gregory, pour être bientôt reprise (indépendamment de ceux-ci, au début tout au moins) par Leibniz. Mais, jusqu'à 1696, c'est seulement des articles de ce dernier dans les *Acta Eruditorum* que Jacob a pu prendre connaissance; c'est du moins ce qu'il indique dans la préface des *Positiones* de 1696, et assurément on peut l'en croire.

14 Cf. Jac. B. *Opera*, p. 387.
15 Cf. G. Eneström, *Bibl. Math.* III/12 (1912), pp. 135–148.

Que trouvait-il dans ces articles de Leibniz? En février 1682 celui-ci avait publié[16], sans démonstration il est vrai, sa «quadrature arithmétique», c'est-à-dire la série

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \text{etc.} = \frac{2}{1\times 3} + \frac{2}{5\times 7} + \frac{2}{9\times 11} + \text{etc.};$$

il y avait joint les séries

$$\frac{1}{1\times 3} + \frac{1}{2\times 4} + \frac{1}{3\times 5} + \text{etc.}, \qquad \frac{1}{1\times 3} + \frac{1}{3\times 5} + \frac{1}{5\times 7} + \text{etc.},$$

$$\frac{1}{2\times 4} + \frac{1}{4\times 6} + \frac{1}{6\times 8} + \text{etc.}, \qquad \frac{1}{2\times 4} + \frac{1}{6\times 8} + \frac{1}{10\times 12} + \text{etc.}$$

avec leurs sommes respectives $\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$, et $\frac{1}{2}\log 2$; dans le dernier cas il s'agit, dans le langage du temps, de la «quadrature de l'hyperbole», et le résultat était celui qui avait été obtenu dès 1668 par Mercator et par Brouncker.

L'article[17] d'octobre 1683 auquel Bernoulli se réfère également dans sa préface de 1689 est consacré en fait, sous prétexte d'intérêts composés et d'escompte, au développement en série de $(1+x)^{-n}$ pour n entier positif. Plus tard, en avril 1691, Leibniz publia[18] les séries pour les fonctions logarithmique, exponentielle et trigonométriques directes et inverses, puis[19] en 1693 la manière de retrouver ces mêmes résultats par la méthode des coefficients indéterminés. Newton, d'ailleurs, savait tout cela depuis longtemps; mais il n'en avait rien publié.

C'est seulement vers 1687 ou 1688 («non ita pridem», *il n'y a guère*, écrit-il en 1689) que Jacob (peut-être à l'occasion de ses recherches sur les probabilités)[20] commença à faire porter ses réflexions sur les séries, réflexions auxquelles il associa son frère Johann et qu'il nota, suivant son habitude, dans ses *Meditationes* avant de les regrouper et mettre en ordre dans les *Positiones* qu'il allait donner à «défendre» à ses élèves. C'est ainsi que les *Positiones Arithmeticae* (celles de 1689 et celles de 1692) reproduisent, en les complétant, la plupart des *Meditationes* depuis Med. CXXXIV jusqu'à Med. CLVI; le contenu de cette dernière, ainsi que celui des deux précédentes, avait déjà été publié dans les *Acta*

16 Cf. Leibniz, *Math. Schriften* V, pp. 118–122.
17 Leibniz, *Math. Schriften* VII, pp. 125–132.
18 Leibniz, *Math. Schriften* V, pp. 128–132.
19 Leibniz, *Math. Schriften* V, pp. 285–288.
20 Cf. Op. XIV et Op. XL, Jac. B. *Werke* 3, pp. 91–93 (et pp. 160–163 h.v.).

Eruditorum[21] de Septembre 1689 avant d'être repris à la fin des *Positiones* de 1692. On notera qu'en 1689 Jacob prend un plaisir visible à mettre en valeur les mérites de Johann, attribuant même à celui-ci la première découverte (après Oresme et Mengoli, il est vrai; mais les deux frères n'en savaient rien) de la divergence de la «série harmonique» $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+$ etc.; c'est bien plus tard seulement que les relations entre Jacob et Johann devaient s'aigrir au point de tourner en brouille irrémédiable.

Il n'y a pas lieu, bien entendu, de s'étonner si la rigueur est quelque peu absente de ces essais. Même le mot de «convergence», qui, depuis longtemps déjà, faisait partie du vocabulaire de Newton et de Wallis, sans d'ailleurs y être défini avec précision, n'apparaît chez Bernoulli qu'en 1704 (v. Prop. LVIII et LIX). En une occasion même, il croit devoir mettre en garde contre un usage «imprudent» («sine cautela») de ses méthodes; il s'agit là (Prop. XV) de l'un de ses procédés favoris, qui consiste, étant donnée une série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, à en mettre le terme général sous la forme $a_n = b_n - b_{n+p}$, après quoi la série s'écrit formellement

$$(1) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+p}) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n - \sum_{n=p+1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + \dots + b_p$$

sans égard à la convergence ou divergence des séries en question. Encore faut-il, dit Bernoulli, que b_n tende vers 0 («in nihilum desinat»), pour n augmentant indéfiniment; en effet on vérifie facilement que cette condition assure la convergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ et l'exactitude du résultat ci-dessus. D'une manière générale, Bernoulli n'étudie guère que des séries, soit à termes positifs, soit alternées à termes décroissants, grâce à quoi tous ses calculs, même «imprudents», peuvent aisément être justifiés *a posteriori*.

Nous pouvons maintenant procéder à une analyse plus détaillée du contenu des cinq *Positiones*[22].

21 Op. XXXVII, pp. 151–159 h.v.

22 Cette analyse ne tiendra pas compte des *Epimetra* ou propositions supplémentaires, ajoutées à la fin de chacune des *Positiones*, et qui touchent à des sujets très variés sans rapport avec celui des *Positiones*.

Les *Positiones Arithmeticae*

Le plan des *Positiones* de 1689–1692 est indiqué dès la préface de 1689: après quelques lemmes, il s'agit pour Bernoulli de développer les conséquences de deux méthodes, dont la première consiste à exprimer une série donnée (à termes positifs) comme somme d'une infinité d'autres, et la seconde à former la différence de deux séries au moyen de l'identité (1) ci-dessus. A titre d'exemples typiques, on peut citer, pour l'une, la formule (Prop. XIV):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x^n} = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{v=m}^{\infty} \frac{1}{x^v} \right) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{x^{m-1}(x-1)} = \frac{x}{(x-1)^2},$$

où il est implicitement supposé que $x > 1$. Pour l'autre, l'exemple le plus simple (Prop. XV) est le suivant:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} = 1,$$

ce qui en apparence fait intervenir la série divergente $\sum \frac{1}{n}$, mais que Bernoulli considère avec raison comme justifié par le fait que $\frac{1}{n}$ tend vers 0 pour $n \to \infty$.

On notera d'ailleurs, aussi bien dans les premières *Meditationes* de Bernoulli sur le sujet des séries (Med. CXXXIV–CXXXIX) qu'au début des *Positiones* de 1689, l'usage constant des proportions, et même les renvois (Prop. IV, VII, IX) au livre V d'Euclide, le tout devant être bientôt abandonné en faveur des notations de l'algèbre moderne.

Voici maintenant, en substance, le contenu des principales *Positiones* de 1689 et 1692.

(Prop. IV) C'est le lemme $(1+x)^n > 1+nx$, cité encore dans les ouvrages scolaires sous le nom de Bernoulli. Celui-ci en donne une démonstration basée sur le livre V d'Euclide; mais bien entendu ce lemme dit simplement que pour un taux d'intérêt donné il est plus coûteux d'emprunter à intérêts composés qu'à intérêt simple, et Bernoulli, qui à l'exemple de Leibniz[23] avait dû se poser déjà des problèmes d'intérêts composés[24], avait probablement conscience de ce fait.

23 Cf. Leibniz, *Math. Schriften* VII, pp. 125–132.
24 Cf. Med. CL, pp. 202–205 h.v., et Op. XL, Jac. B. *Werke* 3, pp. 91–97, et pp. 160–163 h.v.

(Prop. VI) Cf. Med. CXXXIV; celle-ci est citée[25] dans Med. CLIa au cours de la démonstration du *théorème fondamental* du calcul des probabilités, et Prop. VI est citée de même au passage correspondant de l'*Ars Conjectandi*[26]. Déjà ici on notera le lien étroit, dans l'esprit de Bernoulli, entre ses recherches sur les probabilités et ses travaux sur les séries.

(Prop. X) Cf. Med. CXXXV. Il s'agit du fait que le *dernier terme* («ultimus terminus») c'est-à-dire la limite de $\frac{a+nc}{b+nd}$, pour n infini, est $\frac{c}{d}$. Le mot de limite n'apparaît nulle part chez Bernoulli, mais le symbole ∞, emprunté à l'*Arithmetica Infinitorum* de Wallis, est utilisé pour noter un *dernier terme* infini (Prop. XIII = Med. CXXXVI).

(Prop. XIV) Cf. Med. CXXXIX. Ici il s'agit des séries $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}$ où les coefficients a_n sont, soit les «nombres figurés» $a_n = \binom{n+\nu}{\nu}$, soit $a_n = n^\nu$ avec ν entier ≥ 1; on suppose implicitement $z > 1$. Les «nombres figurés» (en langage moderne, les coefficients du binôme) et leurs rapports avec les puissances de n étaient familiers à Bernoulli depuis les recherches d'analyse combinatoire qu'il avait entreprises à propos de probabilités[27]. La sommation des séries formées avec les «nombres figurés» se fait de proche en proche au moyen de la *première méthode* de Bernoulli[28] grâce à l'identité

$$\binom{n+\nu+1}{\nu+1} = \binom{\nu}{\nu} + \binom{1+\nu}{\nu} + \ldots + \binom{n+\nu}{\nu}.$$

La valeur des séries en question se déduit de là immédiatement; en notations modernes le résultat revient à écrire

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+\nu}{\nu} x^n = (1-x)^{-\nu-1}.$$

Bernoulli l'énonce pour $\nu = 1$, pour $\nu = 2$ (série à coefficients *triangulaires*, «trigonales») et pour $\nu = 3$ (série à coefficients *pyramidaux*), tout en observant

25 Jac. B. *Werke* 3, p. 78.
26 Jac. B. *Werke* 3, p. 254.
27 Cf. Med. LXIV (Jac. B. *Werke* 3, pp. 23–24), reprise dans l'*Ars Conjectandi*, Pars Secunda, Cap. III (Jac. B. *Werke* 3, pp. 157–168).
28 Cf. ci-dessus.

que la méthode s'applique par récurrence à tout entier positif v. Bien entendu ce résultat n'est autre qu'un cas particulier de la formule dite *du binôme*, ou *du binôme de Newton*, qui donne le développement en série de $(1+x)^\alpha$ pour tout α réel; mais il ne semble pas qu'il ait eu connaissance de celle-ci en 1689, ni même plusieurs années plus tard[29].

Quant aux séries $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^v}{z^n}$, Bernoulli se contente d'examiner les cas $v = 2$ et $v = 3$, de nouveau au moyen de sa *première méthode*, en s'appuyant sur les identités

$$n^2 = \sum_{m=1}^{n} (2m-1), \qquad n^3 = \sum_{m=1}^{n} \left(6\binom{m}{2}+1\right)$$

et sur les résultats précédemment obtenus. Comme l'observe G. Cramer dans sa note à ce passage[30], la même méthode s'applique à toute série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(n)}{z^n}$ quand $f(n)$ est telle que les différences v-ièmes $(\Delta^v f)(n)$ s'annulent; ici on a défini Δ par la formule

$$(\Delta f)(n) = f(n+1) - f(n).$$

En effet, une telle fonction n'est autre qu'une combinaison linéaire des «nombres figurés» $\binom{n+\mu}{\mu}$ pour $0 \leq \mu \leq v$. C'est en poursuivant ces mêmes idées, et en examinant de plus près les relations entre «nombres figurés» et puissances, que Bernoulli allait arriver, quelques années plus tard sans doute, à ses célèbres formules pour les sommes $\sum_{n=1}^{N} n^v$ et à la découverte des «nombres de Bernoulli»[31].

(Prop. XV) Cf. Med. CXLI. C'est la sommation de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ par la *seconde méthode*[32], avec la mise en garde dont il a été fait mention p. 9 (quant à celle-ci, cf. Med. CXLIVa).

(Prop. XVI) Cf. Med. CXL et CXLIII. C'est le célèbre résultat sur la divergence de la «série harmonique» $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, dont les historiens ont longtemps attribué

29 Cf. ci-dessous, à propos de Prop. LIV.
30 Jac. B. *Opera*, pp. 387–388.
31 Cf. *Ars Conjectandi*, Pars Secunda, Cap. III: Jac. B. *Werke* 3, pp. 164–168.
32 Cf. plus haut, p. 10.

la priorité à Bernoulli. En fait Mengoli en avait donné, dès 1650, une démonstration par regroupement des termes de la série, qui ne diffère guère de la deuxième qu'en donne Jacob (cf. Med. CXL); bien entendu le mérite de celui-ci n'en est pas diminué. La première démonstration qu'il en donne, et qu'il attribue à son frère Johann, procède par l'absurde au moyen de la *première méthode* (cf. Med. CXLIII). Encore en 1696 Johann, écrivant à Leibniz[33], allait rappeler cet épisode, taxant de *longue et pénible* la démonstration de Jacob qu'à son avis la sienne avait rendu superflue.

(Prop. XVII) Cf. Med. CXLII. Il s'agit des «séries de Leibniz»[34] et des séries plus générales

$$\sum_{n=a+1}^{\infty} \frac{1}{n^2-a^2}, \qquad \sum_{n=a+1}^{\infty} \frac{1}{\binom{n}{2}-\binom{a}{2}}.$$

Voici tout le mystère («En totum mysterium»), annonce Bernoulli avec une satisfaction visible au moment de sommer ces séries par sa *seconde méthode*. En fait, comme l'observe Cramer dans une longue note de bas de page à ce passage des *Opera*[35], la méthode s'adapte aisément au cas des séries dont le terme général est de la forme

$$\frac{P(n)}{(n-a_1)\,\ldots\,(n-a_p)} = \frac{A_1}{n-a_1} + \ldots + \frac{A_p}{n-a_p}$$

où les a_i sont des entiers distincts, où P est un polynôme et où $\sum_{i=1}^{p} A_i = 0$ (ce qui revient à supposer que P est de degré $\leq p-2$). La série qui va être sommée dans Prop. XVIII en est un cas particulier.

En revanche, Bernoulli constate avec quelque étonnement que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, bien que *finie* c'est-à-dire convergente (comme le montre la comparaison avec les résultats précédents) résiste à tous ses efforts; il conclut en promettant sa reconnaissance à quiconque lui en communiquera la somme. En fait, non seulement Leibniz mais déjà Mengoli avaient posé ce problème, qui ne devait être résolu que par Euler en 1735.

33 Leibniz, *Math. Schriften* III, p. 339.
34 Celles de la note de 1682 aux *Acta Eruditorum*, v. ci-dessus p. 8.
35 Jac. B. *Opera*, pp. 389–392.

Les *Positiones* suivantes sont celles de 1692; mais la plupart de leurs résultats étaient déjà connus de Bernoulli dès 1689, comme le montrent les Med. CXLVII, CXLVIII, CXLIX, CLIII, CLIV, et la publication[36] de l'essentiel du contenu de ces deux dernières dans les *Acta Eruditorum* de septembre 1689.

(Prop. XVIII–XX) Cf. Med. CXLIV, CXLVIII, CXLIX. Il s'agit ici de la série $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+\nu}{\nu}^{-1}$ et de ses sommes partielles; Bernoulli en effectue la sommation de proche en proche au moyen de sa *seconde méthode* et de l'identité

$$\binom{n+\nu}{\nu}^{-1} = \frac{\nu}{\nu-1}\left[\binom{n+\nu-1}{\nu-1}^{-1} - \binom{n+\nu}{\nu-1}^{-1}\right]$$

dont il promet (Prop. XIX) de donner la démonstration ailleurs: allusion, sans doute, au futur *Ars Conjectandi*, Secunda Pars, Cap. III[37], où se trouve développée la théorie des «nombres figurés» c'est-à-dire des coefficients binomiaux; cf. aussi Med. LXIV[38].

(Prop. XXI–XXIII) Applications variées de la *seconde méthode*.

(Prop. XXIV) Ici apparaît, pour la première fois peut-être dans l'histoire, la série aujourd'hui notée $\zeta(m)$:

$$\zeta(m) = \frac{1}{1^m} + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \text{etc.}$$

avec m non nécessairement entier et non nécessairement > 1. Bien entendu Bernoulli sait déjà que la série est *infinie*, c'est-à-dire divergente, pour $m = 1$ (Prop. XVI), donc pour $m < 1$, et *finie* pour $m = 2$ (Prop. XVII), donc pour $m < 2$; il semble même admettre qu'elle est encore *finie* pour $m = \frac{3}{2}$. Ici il se contente d'établir le rapport entre la série $\zeta(m)$ et les séries partielles $\zeta_0(m)$, $\zeta_1(m)$ formées, l'une par les termes pairs, l'autre par les termes impairs de $\zeta(m)$:

$$\zeta_0(m) = \frac{1}{2^m} + \frac{1}{4^m} + \frac{1}{6^m} + \text{etc.},$$
$$\zeta_1(m) = \frac{1}{1^m} + \frac{1}{3^m} + \frac{1}{5^m} + \text{etc.},$$

36 Op. XXXVII (pp. 151–159 h.v.).
37 Jac. B. *Werke* 3, pp. 157–168.
38 Jac. B. *Werke* 3, pp. 23–24.

rapport qui est donné par les formules évidentes:

$$\zeta(m) = \zeta_0(m)+\zeta_1(m), \qquad \zeta_0(m) = 2^{-m}\zeta_1(m)$$

Si simple que soit ce résultat, il devait jouer son rôle dans les recherches d'Euler sur la fonction zêta. Mais il est à noter que Bernoulli en déduit la formule

$$\frac{\zeta_1(m)}{\zeta_0(m)} = 2^m-1,$$

d'où, pour $m = \frac{1}{2}$, $\zeta_1\left(\frac{1}{2}\right) < \zeta_0\left(\frac{1}{2}\right)$, résultat qu'il juge paradoxal, puisque la comparaison des deux séries terme à terme donnerait l'inégalité opposée. Preuve, dit-il, que par sa nature l'infini ne peut être compris par une intelligence finie! Plus raisonnablement, Johann, se référant à ces mêmes recherches dans une lettre à Leibniz[39] de 1696, note de même que l'on a

$$\frac{1}{1^m}-\frac{1}{2^m}+\frac{1}{3^m}-\frac{1}{4^m}+\text{etc.} = \zeta_1(m)-\zeta_0(m) = (1-2^{1-m})\zeta(m),$$

mais pour en conclure seulement, en faisant $m = 1$ dans cette formule, que $\zeta(1)$ est infini, puisque la série alternée du premier membre est convergente. Cinquante ans plus tard, en revanche, Cramer, dans son annotation à Prop. XXIV[40], croit expliquer le soi-disant *paradoxe* de Bernoulli par le fait que la série $\zeta(m)$ a «deux fois plus de termes» que la série $\zeta_0(m)$, et finit par conclure que $\zeta_0(m)$ et $\zeta_1(m)$ ont même somme (infinie!) pour $m < 1$.

(Prop. XXV–XXVI) La première de ces *positions* se réduit à une remarque banale sur une généralisation de la série harmonique. Pour l'autre, cf. Med. CXLVII.

(Prop. XXVII–XXXV) Cf. Med. CLIII–CLVI, dont les principaux résultats, traduits dans le langage de la géométrie élémentaire, avaient été publiés[41] dans les *Acta Eruditorum* de septembre 1689. Bernoulli y présente avec beaucoup de fanfare[42] une méthode pour résoudre, uniquement au moyen de racines carrées (ou, géométriquement parlant, par la règle et le compas), et avec une approximation aussi bonne qu'on voudra, une série de problèmes célèbres, non susceptibles (il vaudrait mieux dire, en ce qui concerne Bernoulli et ses contemporains, présumés non susceptibles) d'une solution exacte par ces mêmes moyens: dupli-

39 Cf. Leibniz, *Math. Schriften* III, p. 339.
40 Jac. B. *Opera*, pp. 531–532 – p. 74 h.v.
41 Op. XXXVII, pp. 151–159 h.v.
42 Op. XXXVII, et le *Scholie* qui termine les *Positiones* de 1692.

cation du cube, ou plus généralement construction de deux, ou plus de deux, moyennes proportionnelles entre des nombres donnés, trisection de l'angle, équations du 3[e] et du 4[e] degrés. Dans chaque cas Bernoulli construit une suite appropriée, dont il admet sans discussion qu'elle est convergente, et dont le *dernier terme* (c'est-à-dire la limite) est alors la solution du problème posé. Dans Prop. XXIX, par exemple[43], Bernoulli définit une telle suite par des formules qui reviennent à poser:

$$x_0 = 1, \quad x_{2n+1} = \sqrt{ax_{2n}}, \quad x_{2n+2} = \sqrt{bx_{2n+1}} \qquad (n \geqslant 0);$$

en fait, la suite est bien convergente, et l'on a $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt[3]{a^2b}$, de sorte qu'on a résolu le problème d'insérer deux moyennes proportionnelles entre a et b. De même, dans Prop. XXXII, Bernoulli pose[44] la suite donnée par

$$x_0 > 0, \quad x_{n+1} = \sqrt{-p+\sqrt{p^2+qx_n}}$$

qui effectivement est convergente, et dont on vérifie aisément, une fois la convergence admise, qu'elle a pour limite la racine positive de l'équation $x^3 = -2px + q$. «Ce sont là», dit Bernoulli dans le *Scholie* qui suit, «des résultats dont personne n'a peut-être eu l'idée avant moi», et il conclut en les dédiant à la gloire de Dieu, ou, comme il dit, «ad majorem infiniti Numinis gloriam». Cet enthousiasme, pour des résultats dépourvus à nos yeux de toute portée, peut bien nous faire sourire; mais, à une époque où toute la mathématique était en mouvement, comment aurait-on distingué entre ce qui avait de l'avenir et ce qui n'en avait pas?

Les *Positiones de Usu Serierum*

Les *Positiones* de 1689 débutaient par des références aux *Eléments* d'Euclide, suggérant que ceux-ci avaient dû fournir une part notable de l'enseignement de Jacob à cette date. En revanche, les *Positiones* de 1696, dès leur préface, supposent connus les principes du calcul différentiel de Leibniz; il est vrai qu'elles avaient été rédigées en vue de l'examen de maîtrise d'un des élèves les plus doués qu'ait eus Jacob pendant toute la durée de son professorat, le jeune Jacob Hermann de Bâle, alors âgé de 18 ans. Bernoulli juge même inutile de revenir sur ce sujet, se contentant de renvoyer au livre tout récent du marquis de l'Hôpital, *Analyse des infiniment petits* (Paris 1696), qui d'ailleurs reproduisait, pour l'essentiel, les leçons données au marquis par Johann Bernoulli[45].

43 Cf. Med. CLIII, pp. 206–207 h.v., et Op. XXXVII, pp. 156–157 h.v.
44 Cf. Med. CLIV, pp. 209–210 h.v., et Op. XXXVII, pp. 152–153 h.v.
45 Joh. I B. *Briefe* 1, pp. 130–147.

(Prop. XXXVI–XL) Ici Bernoulli retrouve par d'autres moyens ses résultats antérieurs (v. Prop. XIV), c'est-à-dire en substance les développements en série pour $(1+x)^{-n}$ avec n entier positif. On notera (Prop. XXXVI) ce qui est en fait une démonstration explicite de convergence pour la série $(1-x)^{-1}$ quand $0 < x < 1$, et aussi (Prop. XXXVII, Cor. 2) le *paradoxe* de la série pour $(1+x)^{-1}$ lorsqu'on y fait $x = 1$, ce qui donne

$$1-1+1-1+\text{etc.} = \frac{1}{2},$$

paradoxe pour lequel Bernoulli offre une explication aussi embarrassée que peu plausible.

(Prop. XLI) Ici est posé, naturellement sans essai de justification, le principe de l'intégration terme à terme de tout développement en série suivant les puissances de x, fondement de presque tout ce qui va suivre.

(Prop. XLII–XLVI) Ces *Positiones* traitent de diverses applications de l'intégration des séries de puissances terme à terme, et principalement de résultats déjà publiés par Leibniz, sans démonstration il est vrai, dans ses notes[46] de 1682 et de 1691; certains de ceux-ci remontaient même à Mercator. Dans Prop. XLII (cf. Med. CLXXIII) il s'agit de la «quadrature de l'hyperbole», ou en langage moderne du développement en série de log $(1 \pm x)$; Bernoulli l'obtient par l'intégration terme à terme de la série pour $(1 \pm x)^{-1}$ («par le calcul différentiel de Leibniz», dit-il), après avoir indiqué une première méthode reposant sur ce que nous appellerions les sommes de Riemann pour l'intégrale

$$\int_0^x \frac{dt}{1 \pm t}.$$

Ecrivant en effet ces sommes sous la forme

$$\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{1 \pm (px/n)} = \sum_{p=1}^{n} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\mp \frac{px}{n}\right)^{\nu} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (\mp x)^{\nu} \left(\frac{1}{n^{\nu}} \sum_{p=1}^{n} p^{\nu}\right),$$

il applique aux coefficients de cette dernière série un résultat de l'*Arithmetica Infinitorum* de Wallis («que nous démontrerons ailleurs», dit-il: allusion évidente au futur *Ars Conjectandi*; cf. aussi Op. XXIV); d'après ce résultat, les coefficients en question tendent respectivement vers $\frac{1}{\nu}$ pour n infini.

46 *op. cit.* notes 16 et 18.

Dans les Prop. XLIII et XLIV, Bernoulli obtient de même les développements en série de

$$\int_0^x \log(1 \pm t)\, dt, \qquad \int_0^x \log(1 \pm t)\, \frac{dt}{t},$$

ce qui lui donne une interprétation des séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\pm 1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (\pm 1)^{n+1} \frac{x^n}{n^2},$$

dont la première lui donne un exemple d'une série (ou d'une intégrale) qui peut être sommée élémentairement pour $x = 1$ mais non pour x quelconque, tandis que la seconde, à la date où il écrit, ne peut être sommée même pour $x = 1$.

Dans Prop. XLV et XLVI, Bernoulli applique la même méthode au célèbre résultat de Leibniz sur la *quadrature arithmétique* du cercle, c'est-à-dire à la série pour $\frac{\pi}{4}$, et aux résultats plus généraux publiés en 1690 par Huygens[47] et en 1691 par Leibniz[48] sur les secteurs de cercle et d'hyperbole. Pour le cercle, écrivant $y = \sqrt{2x - x^2}$ pour l'équation du demi-cercle, il obtient, pour la longueur de l'arc de cercle:

$$L = \int_0^x \frac{dz}{\sqrt{2z - z^2}},$$

donc $\frac{L}{2}$ pour l'aire du secteur de cercle correspondant, puis il transforme cette intégrale par la substitution *diophantienne*[49]

$$\sqrt{2z - z^2} = \frac{z}{t}.$$

Cela donne:

$$\frac{L}{2} = \int_0^t \frac{dt}{1 + t^2},$$

d'où le résultat cherché par intégration terme à terme de la série

$$1 - t^2 + t^4 \text{ etc.}$$

47 Huygens, *Œuvres*, t. XXI, p. 483.
48 *op. cit.* note 18.
49 Sur cet artifice, cf. Joh. I B. *Briefe* 1, p. 105, où Johann paraît en revendiquer la première invention.

On retrouve ainsi la série de Leibniz pour arc tan t, et ce résultat s'étend aisément, dans Prop. XLVI, aux «secteurs d'ellipse» et aux «secteurs d'hyperbole», les équations de ces coniques étant mises sous la forme $y=\sqrt{2ax \pm x^2}$. Dans ce dernier calcul, il est seulement à noter, du point de vue géométrique, l'expression $\frac{1}{2}(x\,dy - y\,dx)$ pour l'élément d'aire d'un secteur. Ces mêmes problèmes, et ces mêmes séries, avaient, dès 1691, fait l'objet d'une correspondance entre Jacob et Johann[50], au cours de laquelle, du reste, Johann, préludant à ses futures querelles avec son aîné, revendiquait assez aigrement[51] la priorité au sujet des séries en question.

On notera aussi, dans les *Epimetra* qui terminent les *Positiones* de 1696 (celles que J. Hermann, alors âgé de 18 ans seulement, était chargé de défendre), le n° XIV, consacré à un problème d'intérêts composés, dont Bernoulli fait ressortir l'identité avec un problème rédigé dans un tout autre langage qui avait fait l'objet du n° X des *Epimetra* de 1692, puis[52] de Med. CCXII.

Avec les *Positiones* de 1698, Jacob, au sommet de sa réputation, fait résolument pénétrer ses élèves au cœur des mathématiques *modernes* en abordant la théorie des courbes que nous dirions transcendantes: courbe *logarithmique* (ou exponentielle), chaînette («catenaria»), loxodromie, courbes qu'il étudiait depuis 1690 (cf. Op. XXXIX et XLII).

(Prop. XLVII) Déjà en 1696 (Prop. XLII), Bernoulli, traitant de la «quadrature de l'hyperbole», avait donné en substance le développement en série de $\log(1 \pm x)$; mais il n'avait pas encore cru devoir spécifier qu'il s'agissait là de logarithmes. En 1698 il n'hésite plus à parler de «courbe logarithmique» pour la courbe que Leibniz avait ainsi baptisée en 1684 et avait correctement identifiée avec la solution du célèbre «problème de de Beaune», c'est-à-dire, en notation leibnizienne[53], de l'équation différentielle $y\,dx = a\,dy$; la courbe est donc donnée, à une translation près, par $x = a \log y$, ou $y = e^{x/a}$. Dans les notations de Jacob, il s'agit d'intégrer l'équation $dy = \frac{b\,dx}{1 \pm x}$; substituant à $(1 \pm x)^{-1}$ son développement en série (cf. Prop. XXXVI–XXXVII) et intégrant terme à terme, on obtient bien ainsi, pour $\log(1 \pm x)$, la série déjà trouvée dans Prop. XLII, «ce qui montre», dit Bernoulli, «l'affinité entre l'hyperbole et le logarithme» (*affinité* que d'ailleurs les géomètres avaient reconnue depuis longtemps).

50 Cf. Joh. I B. *Briefe* 1, pp. 105 et 112.
51 Cf. Joh. I B. *Briefe* 1, p. 112.
52 Cf. Jac. B. *Werke* 3, pp. 97–98.
53 Leibniz, *Math. Schriften* V, p. 226, 1.7–17.

(Prop. XLVIII) Ici Bernoulli obtient de même le développement de $\log\sin\varphi$ suivant les puissances de $x = \cos\varphi$ («le logarithme du sinus, exprimé au moyen du sinus du complément»), en intégrant terme à terme le développement de $\dfrac{-x\,dx}{1-x^2}$.

(Prop. XLIX) Le problème de la *chaînette* ou *caténaire*, courbe décrite par une corde librement suspendue entre deux points fixes, avait été posé[54] par Jacob dès 1690, puis bientôt résolu par Leibniz, Huygens et Johann Bernoulli; c'est aux articles de ceux-ci dans les *Acta Eruditorum* de 1691 que se réfère Jacob dans Prop. XLIX pour indiquer que la chaînette satisfait à l'équation différentielle

$$dy = \frac{dz}{\sqrt{z^2-1}};$$

après le changement de variable «diophantien» $\sqrt{z^2-1} = t-z$ pour «lever l'irrationalité» («ad tollendam surditatem»), cela donne $dy = \dfrac{dt}{t}$, puis enfin, en posant $t = 1+x$ et développant en série suivant les puissances de x:

$$y = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \text{etc.}$$

Bien entendu, ce résultat, qui (d'après Prop. XLVII) revient à écrire $y = \log(1+x)$, équivaut à l'équation de la chaînette, qui, en notation moderne, s'écrirait $z = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^y + \mathrm{e}^{-y})$ (cf. Prop. XLIX, *Corollarium*, et la référence à l'article de Leibniz de 1691).

(Prop. L) Ici les mêmes méthodes sont appliquées à la *loxodromie*, c'est-à-dire à la courbe tracée sur la sphère qui coupe les méridiens sous un angle constant; autrement dit (cf. Op. XLII de 1691) elle est définie par l'équation différentielle

$$dx = \frac{-t\,dz}{z\sqrt{1-z^2}},$$

où t est la tangente de l'angle constant, x est la longitude, et z est le cosinus de la latitude.

(Prop. LI–LII) Les mêmes méthodes sont appliquées, d'abord à la rectification de la parabole (Prop. LI; cf. Med. CLXIX), puis à celle de la *logarithmique*.

54 Cf. Op. XXXIX, Jac. B. *Opera*, p. 421, à publier dans *Werke* 6; et Op. XLII, Jac. B. *Opera*, p. 449, à publier dans *Werke* 5.

Le calcul, plus compliqué que ceux rencontrés jusqu'ici, permet d'apprécier, non seulement la facilité que Jacob avait acquise à appliquer le calcul de Leibniz à des problèmes géométriques concrets, mais aussi celle qu'il avait fait acquérir à ses élèves; ici il s'agit de Nicolas Harscher, qui ne semble pas s'être autrement illustré en mathématique. On notera aussi, en guise d'introduction aux Prop. LI-LII, l'avertissement au lecteur par lequel Jacob met en garde contre la confusion entre ce que nous appellerions *intégrale indéfinie* et *intégrale définie*.

Il semble qu'après les *Positiones* de 1698 Jacob ait presque perdu l'espoir de mener à terme son *traité des séries*; encore en 1703, annonçant à Leibniz (sur la demande de celui-ci)[55] l'envoi de la quatrième section (celle de 1698), il ajoute qu'il «mourra avant d'achever ce travail, vu l'abondance des matériaux et l'absence de répondants», c'est-à-dire d'élèves capables de les comprendre[56]. Mais il allait bientôt trouver un tel élève; ce fut son propre neveu Nicolas, âgé de 16 ans seulement; dès l'année suivante Jacob eut la satisfaction de pouvoir envoyer à Leibniz, avec les *Positiones* de 1698, celles de 1704, que venait de défendre Nicolas[57]; elles sont d'un niveau sensiblement plus élevé que les précédentes, et Jacob en possédait la substance depuis longtemps. Dès la courte introduction qui les précède, Jacob annonce qu'il va introduire des procédés nouveaux, dont, «après quelques généralités», il se propose de donner des spécimens.

(Prop. LIII) Cf. Med. CLXXIV, reproduite en 1696 par Jacob en annexe à une lettre à Leibniz[58]. Il s'agit ici, en vue des applications qui vont suivre (Prop. LVI–LVIII), de quelques cas particuliers de la célèbre formule du binôme, ou autrement dit du développement en série de $(1+x)^p$ pour p entier ou fractionnaire, positif ou négatif; car rien ne semble indiquer que Jacob, non plus que Newton avant lui, ait songé au cas où p est irrationnel. Newton avait découvert la formule vers 1665, et d'abord, semble-t-il, pour $p=\frac{1}{2}$, à partir du cas de p entier positif, par application de la méthode d'interpolation de Wallis exposée par celui-ci dans son *Arithmetica Infinitorum* de 1656. Il l'avait communiquée à Leibniz en 1676 par l'intermédiaire d'Oldenbourg, dans une lettre que Wallis devait publier en 1699 au vol. III de ses *Opera Mathematica*, pp. 622–623, après avoir publié la formule elle-même, d'abord en 1685 dans *A Treatise of Algebra*[59], puis de nouveau dans sa grande *Algèbre* latine[60].

55 Jac. B. *Briefe*, p. 109.
56 Jac. B. *Briefe*, p. 118.
57 Jac. B. *Briefe*, p. 129.
58 Cf. Jac. B. *Briefe*, p. 83.
59 Chap. XCI, *The doctrine of infinite series, further prosecuted by Mr. Newton*, pp. 368–371.
60 *De Algebra Tractatus ...: Operum Mathematicorum volumen alterum*, Oxoniae 1693, pp. 368–371.

Pour p entier négatif, Bernoulli connaissait la formule, en substance, depuis ses premières recherches sur les séries (Prop. XIV; cf. Prop. XXXVI–XL). C'est à partir de là, semble-t-il[61], et, tout comme Newton, par *interpolation wallisienne*, qu'en 1692 il obtint la formule pour $p = -\frac{1}{2}$, $p = -\frac{3}{2}$, etc. (Med. CLXXXIV), apparemment en vue de son application aux problèmes de l'Elastica (cf. Med. CLXXV et ci-dessous, Prop. LVI et LVII).

(Prop. LIV) Dans Prop. LIII, Jacob n'avait tenté de justifier ses formules que par un appel assez vague à l'*Arithmetica Infinitorum* de Wallis, donc en définitive à l'*induction*, c'est-à-dire à l'analogie et à ce qu'on devait appeler plus tard *la généralité de l'analyse*. Il avait pourtant, dès 1686, critiqué de tels procédés comme «peu scientifiques»[62]. Avait-il changé d'avis en 1704? C'est peu probable. Toujours est-il que dans Prop. LIV il pose la formule du binôme dans toute sa généralité en la présentant simplement comme *assez connue parmi les Géomètres* («passim inter Geometras notum»). Cette expression, peut-être volontairement ambiguë (pour éviter de se prononcer sur la priorité de la découverte) faisait sans doute allusion principalement à l'article de Leibniz[63] dans les *Acta Eruditorum* de 1694 où Leibniz, en réponse justement à l'article de Jacob sur l'Elastica (Op. LVIII), avait énoncé la formule en question avec une référence, ambiguë elle aussi, à Newton («post Newtonum», c'est-à-dire après ou d'après Newton). Quant à la justification de la formule, Jacob note seulement que, dans les cas particuliers qui l'intéressent, elle donne le même résultat que l'interpolation, et que «l'une et l'autre reposent sur le même fondement, à savoir une propriété des nombres figurés effleurée déjà dans Prop. XIX et dont la démonstration est réservée pour une autre occasion». Etait-ce là une référence voilée à l'*Ars Conjectandi*? Mais dans celui-ci, tout comme dans Prop. XIX, il n'est question des *nombres figurés* $\binom{p}{m}$ que pour p entier positif. On aurait souhaité plus de détails; mais même Cramer, si prolixe parfois dans ses annotations aux *Opera*, est muet sur ce point. Encore en 1774, Euler cherche à donner une démonstration de la formule du binôme[64] en la qualifiant de «fondement de toute l'analyse», tout en reconnaissant que la démonstration qu'il en avait proposée dans son *Introductio in Analysin Infinitorum* de 1748 n'était qu'une pétition de principe. La question, comme on sait, n'a été définitivement résolue que par Abel en 1826, au tome I du *Journal de Crelle*.

61 Cf. Op. LXVI, Jac. B. *Opera*, p. 647, à publier dans *Werke* 6.
62 Cf. Op. XXIV, p. 149 h.v.
63 Leibniz, *Math. Schriften* V, p. 313; reproduit dans les *Opera* de Jacob comme Op. 64, p. 632, à publier dans *Werke* 5.
64 Cf. Euler, *Op. Omnia* I/15, p. 207.

(Prop. LV) Ici Jacob pose, d'après Leibniz[65], le principe de la méthode dite des coefficients indéterminés: dans une relation entre x et y, on cherche à substituer à y, «suivant les circonstances», une série de puissances de x, ou bien de x^2 ou de x^4, etc., dont on détermine les coefficients par identification des deux membres.

(Prop. LVI–LVII) Cf. Med. CLXXV, reproduite elle aussi en annexe à la lettre[66] de Jacob à Leibniz en 1696. Ici, et dans Prop. LVIII et LX, il s'agit de l'Elastica ou courbe élastique, que Jacob avait introduite[67] dès 1691 comme solution d'un problème sur la flexion des poutres. Là il l'avait définie au moyen d'une équation différentielle qu'il avait énoncée sous forme d'un *logogriphe*, c'est-à-dire en langage chiffré; suivant l'explication qu'il en donna[68] en 1694, cela revenait à dire que l'Elastica peut être caractérisée comme solution de l'équation différentielle

$$dy = \frac{x^2dx}{\sqrt{a^4-x^4}},$$

d'où résulte entre autre que l'arc de la courbe est donné par

$$ds = \frac{a^2dx}{\sqrt{a^4-x^4}}.$$

Dans Prop. LVI, il en déduit le développement de y (et, dans Prop. LVII, celui de s) suivant les puissances de x, par application de la formule du binôme à

$$\left(1-\frac{x^4}{a^4}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

et intégration terme à terme; cela lui donne en particulier, pour $x = a = 1$:

$$y(1)-y(0) = \frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{11}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{15}+\text{ etc.},$$
$$s(1)-s(0) = 1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{9}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{13}+\text{ etc.},$$

séries qu'il avait déjà données dans son article[69] de 1694 et auxquelles Leibniz s'était référé dans son article[70] de la même année.

65 Leibniz, *Math. Schriften* V, pp. 285–288.
66 Leibniz, *Math. Schriften* III, pp. 36–37; cf. Jac. B. *Briefe*, p. 83.
67 Op. XLII, Addit. 3, pp. 451–452 des *Opera*, à publier dans Jac. B. *Werke* 5; cf. Med. CLXX, pp. 223–227 h.v.
68 Op. LVII, Jac. B. *Opera*, p. 592, à publier dans *Werke* 6; cf. aussi Op. LXVI, *Opera*, pp. 640–647, à publier dans *Werke* 6.
69 Op. LVIII, Jac. B. *Opera*, p. 596.
70 Celui-là même où il avait énoncé la formule générale du binôme: Jac. B. Op. 64, *Opera*, p. 632.

Dans Prop. LVI, on notera l'avertissement de Bernoulli de ne pas chercher à «lever l'irrationalité» de $\sqrt{a^4-x^4}$ par la *méthode de Diophante* précédemment appliquée avec succès, en particulier aux expressions $\sqrt{2x-x^2}$ (Pos. XLV), $\sqrt{z^2-1}$ (Prop. XLIX), $\sqrt{a^2+4y^2}$ (Prop. LI)[71]. On y perdrait son temps, dit-il, car «les Géomètres savent que la somme ou la différence de deux bicarrés ne peut jamais donner un carré». Sans doute était-ce là une allusion à la célèbre *Observatio* XLV de Fermat, dans le Diophante de 1670, où Jacob et Johann avaient dû apprendre la méthode en question. L'argument n'était pas entièrement convaincant, du reste, puisque le théorème de Fermat portait sur les solutions de $x^4 \pm y^4 = z^2$ en nombres rationnels, alors qu'ici il s'agit de fonctions rationnelles, à coefficients rationnels ou non. En fait, comme il devait apparaître au XIX^e siècle, l'impossibilité de *rationaliser* $\sqrt{a^4-x^4}$ tient au fait que la courbe $z^2 = a^4-x^4$ est de genre 1, et que les intégrales que considérait Bernoulli étaient des intégrales elliptiques, de 2^e espèce et de 1^e espèce respectivement; il en était autrement, comme on le verra dans Prop. LX, de l'intégrale

$$\int \sqrt{a^4-x^4}\,\frac{dx}{x},$$

qui, comme Bernoulli le savait depuis longtemps (cf. Med. CLXX), s'intègre par un logarithme. Il n'y en a pas moins lieu d'admirer la sûreté de son intuition au sujet d'une question qui embarrassera longtemps Euler.

(Prop. LVIII) Cf. Med. CCXVII et Op. LVIII[72]. Comme le note Jacob, et comme il va résulter du calcul qui suit, les séries obtenues dans Prop. LVI et LVII convergent, mais trop lentement pour se prêter au calcul numérique de leurs sommes. Ici il donne un procédé, assez grossier il est vrai mais néanmois ingénieux, pour une évaluation des sommes en question, et implicitement pour la démonstration de leur convergence, par comparation avec la série analogue pour la fonction w donnée par

$$dw = \frac{x^3dx}{\sqrt{a^4-x^4}},$$

c'est-à-dire $w = \frac{1}{2}(a^2-\sqrt{a^4-x^4})$.

71 Cf. aussi la lettre de Johann à Jacob, Joh. I B. *Briefe* 1, p. 105.
72 Jac. B. *Opera*, p. 596, à publier dans *Werke* 6.

(Prop. LIX) Jacob avait rencontré la série exponentielle dès 1690, à propos d'intérêts composés (Op. XL; cf. Med. CL). Ici il indique d'abord, d'après Leibniz[73], comment obtenir la série en question par la méthode des coefficients indéterminés (cf. Prop. LV) à partir de l'équation différentielle $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{t}$, où t désigne une constante. La seconde méthode qu'il donne pour parvenir au même résultat (cf. Med. CLXXVII) consiste à obtenir $e^{x/t}$ comme limite de $\left(1+\frac{x}{nt}\right)^n$ pour n infini. C'est cette propriété qu'Euler devait adopter plus tard comme définition de la fonction exponentielle.

(Prop. LX) Revenant à l'Elastica, Jacob démontre ici l'une des propriétés qu'il avait énoncées[74] en 1694 dans Op. LVIII, III^e partie au sujet de la développée («curva genitrix») de la courbe en question, c'est-à-dire de l'enveloppe de ses normales. La démonstration se base sur la détermination du rayon de courbure de l'Elastica dans Op. LVIII; une fois celui-ci connu, tout revient à intégrer la différentielle $\sqrt{a^4-x^4}\,\frac{dx}{4x}$. En fait, il suffirait pour cela de poser $w = \sqrt{a^4-x^4}$, d'où $x^4 = a^4 - w^2$; la différentielle s'écrirait alors

$$-\frac{1}{8}\frac{w^2dw}{a^4-w^2} = -\frac{a^2}{16}\left(\frac{1}{a^2+w}+\frac{1}{a^2-w}-\frac{2}{a^2}\right)dw;$$

elle s'intègre donc par les logarithmes, ou, dans le langage dont se servait Bernoulli, par la quadrature de l'hyperbole. C'est bien le résultat qu'il obtient, après un calcul assez maladroit où il «lève l'irrationalité»[75] au moyen de la substitution «*diophantienne*»

$$\sqrt{a^4-x^4} = t\frac{x^2}{a} - a^2.$$

Il est visible que Jacob, encore peu avant sa mort, n'avait pas atteint à une parfaite maîtrise du calcul intégral.

73 *Math. Schriften* V, p. 286.
74 n° 11: Jac. B. *Opera*, p. 594.
75 Cf. plus haut, Prop. LVI.

Formules trigonométriques

Ce sujet, qui a pris sa forme définitive avec Euler et son *Introductio in Analysin Infinitorum* de 1748, mérite une mention spéciale, encore qu'il ne tienne que peu de place dans l'œuvre de Jacob Bernoulli. Celui-ci semble y préluder, dès 1689 ou 1690, par Med. CLVII, CLVIII et CLIX, peut-être rédigées seulement à titre d'exercices en vue de son enseignement; déjà dans Med. CXLVI il avait donné, assez maladroitement du reste, une démonstration de formules d'addition pour le sinus et le cosinus. Dans Med. CLVII et Med. CLVIII il calcule à la manière classique, c'est-à-dire par triangles semblables, des formules de multiplication par 5 et par 7; désignant par z la corde d'un arc α dans un cercle de rayon 1, donc $z = 2 \sin \frac{\alpha}{2}$, et par q celle de l'arc 5α resp. 7α, il y exprime q par un polynôme $F(z)$. Dans Med. CLIX, il procède par bisections successives pour mettre sous la forme

$$2^n\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{\ldots+\sqrt{2}}}}$$

le périmètre d'un polygone régulier de 2^n côtés, d'où, pour $n = \infty$, une formule de quadrature du cercle, analogue à celles qu'il venait d'obtenir dans Med. CLIII–CLVI (cf. Op. XXXVII, et Op. LIV, Prop. XXIX–XXXV) pour les racines de diverses équations algébriques. En rédigeant ces Méditations, a-t-il eu connaissance, directement ou indirectement, des écrits trigonométriques de Viète, *Ad angulares sectiones ... theoremata* et *Ad problema, quod... proposuit Adrianus Romanus, responsum*[76], où se trouvent traitées, d'une manière déjà presque définitive à certains égards, les questions d'addition, soustraction, multiplication et division des fonctions trigonométriques? Cela est douteux, mais la question reste ouverte. Wallis, traitant du même sujet en 1684 dans son *Treatise of Angular Sections*[77], semble ignorer Viète; il y discute fort amplement des formules de multiplication et division par $n \leq 6$ sans aller au delà, et ne cite d'autres auteurs que ses compatriotes Oughtred et Harriot.

C'est, semble-t-il, à la suite de la publication[78] par Leibniz, dans les *Acta Eruditorum* d'avril 1691, des séries pour $\sin x$ et $\cos x$, que Bernoulli rédigea Med. CLXXVIII, où il cherche à les vérifier par passage à la limite à partir des formules de multiplication par n pour $n = \infty$; en 1692 ou 1693 il communiqua sa méthode à Johann, qui en fit part à Varignon et au marquis de l'Hôpital[79].

76 *Francisci Vietae Opera Mathematica* ..., Lugduni Batavorum 1646, pp. 287–324.
77 London 1685; réédité en latin dans son *Operum Mathematicorum Volumen alterum,* Oxonii 1693, pp. 531–601.
78 Leibniz, *Math. Schriften* V, pp. 128–132.
79 Cf. Joh. I B. *Briefe* 1, p. 167, note 3.

Leibniz lui-même ne publia[80] sa démonstration, basée sur la méthode des coefficients indéterminés appliquée à l'équation différentielle $\frac{d^2y}{dx^2} = -y$, qu'en 1693; les mêmes séries, d'ailleurs, avaient été communiquées par Newton[81] à Leibniz dès 1676, et Newton les avait sûrement démontrées de même.

Quant à Bernoulli, dans Med. CLXXVIII, et plus tard dans Op. XCVII, il s'appuie sur les formules exprimant $x = 2 \sin \frac{n\alpha}{2}$ (la corde de l'arc $n\alpha$ dans un cercle de rayon 1) au moyen de la corde $d = 2 \sin \frac{\alpha}{2}$ de l'arc α; plus exactement, il cherche d'abord à exprimer $2-x^2 = 2 \cos n\alpha$ en fonction de d, c'est-à-dire (en posant $\theta = \frac{\pi-\alpha}{2}$), $(-1)^n 2 \cos 2n\theta$ en fonction de $d = 2 \cos \theta$. Dès 1595, dans son *Responsum*[82], Viète avait donné le résultat

$$2 \cos m\theta = P_m\,(2 \cos \theta),$$

où P_m est un polynôme de degré m dont la loi de formation, par récurrence sur m, est décrite explicitement. Sans doute ne basait-il cette conclusion que sur une «induction» (incomplète), c'est-à-dire sur le calcul des P_m pour les petites valeurs de m; sa table en donne les coefficients pour $m \leq 21$. Il est à croire que Bernoulli, même s'il n'a pas connu Viète, aura procédé de même; en fait, dans Med. CLXXVIII (et plus tard dans Op. XCVII), il ne calcule explicitement (par duplications successives: cf. Med. CLIX) que les P_{2n} pour $n = 1, 2, 4, 8$; puis il donne une table où l'on peut reconnaître tous les coefficients des P_{2n} pour $n \leq 8$ dans les colonnes paires, ainsi que ceux des P_{2n+1} pour $n \leq 8$ dans les colonnes impaires; d'ailleurs Med. CLVII et Med. CLVIII lui donnaient P_5 et P_7, puisqu'on a, pour $n = 2p+1$, et d, x, α et θ étant comme ci-dessus:

$$d = 2\sin\frac{\alpha}{2} = 2\cos\theta, \quad x = 2\sin(2p+1)\frac{\alpha}{2} = (-1)^p\, 2\cos(2p+1)\theta,$$

donc $x = (-1)^p P_{2p+1}(d)$. Quoi qu'il en soit, il n'est guère croyable que la seule inspection des P_{2n} pour $n = 1, 2, 4, 8$ lui ait permis de deviner la loi de formation des P_m; d'ailleurs il mentionnera en 1699 que «pour $m = 2, 3, 4$, etc.», $\cos m\theta$ s'exprime en fonction de $\cos\theta$ par un calcul *connu de tout le monde*[83]. En tout

80 Leibniz, *Math. Schriften* V, p. 287.
81 *The Correspondence of Isaac Newton*, edited by H.W. Turnbull, vol. II, Cambridge 1960, p. 25.
82 *loc. cit.* note 76, pp. 317–318, Theor. IV; cf. ibid., pp. 294–295.
83 «pervulgata analysi»: Op. XCII, Jac. B. *Opera*, p. 872 – *Streitschriften*, p. 401.

cas, une fois calculés par exemple les P_{2n} pour $n \leq 8$, le calcul des différences lui permettait de conjecturer aisément leur loi générale de formation («par induction», comme le supposait le marquis de l'Hôpital[84]). Pour une démonstration, il a fallu attendre Euler et son *Introductio in Analysin Infinitorum* (Chap. XIV, *De multiplicatione et divisione angulorum*), où celui-ci se base sur la relation «récurrente»

$$P_{m+1}(z)+P_{m-1}(z) = zP_m(z)$$

que déjà Viète avait prise pour point de départ de son calcul[85] des P_m. Puisque $P_0 = 1$ et $P_1 = z$, il s'ensuit qu'on a entre séries formelles l'identité

$$\sum_{m=0}^{\infty} P_m(z)t^m = \frac{2-zt}{1-zt+t^2} = 1+\frac{1-t^2}{(1+t^2)-zt}$$
$$= 1+(1-t^2)\sum_{p=0}^{\infty}(1+t^2)^{-p-1}z^p t^p,$$

d'où, après identification des deux membres:

$$P_m(z) = \sum_{q=0}^{m}\left[\binom{m-q}{q}+\binom{m-q-1}{q-1}\right]z^{m-2q},$$

ce qui, pour $m = 2n$, s'écrit aussi

$$(-1)^n P_{2n}(z) = 2+\sum_{r=1}^{n}(-1)^r n^2\cdot\frac{n^2-1^2}{3\cdot 4}\cdot\frac{n^2-2^2}{5\cdot 6}\cdots\frac{n^2-(r-1)^2}{(2r-1)\cdot 2r}\cdot z^{2r};$$

c'est bien là le résultat indiqué par Bernoulli. Comme le montre Euler, un calcul analogue, mais encore plus simple, donne la formule

$$\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta} = Q_n(2\cos\theta), \qquad Q_n(z) = \sum_{q=0}^{n}(-1)^q\binom{n-q}{q}z^{n-2q},$$

résultat énoncé déjà, en substance, par Viète[86], puis de nouveau en 1701 par Johann Bernoulli[87].

Quant à l'expression générale de la corde de l'arc $n\alpha$ en fonction de celle de α, elle est donnée par un développement en série qui figure sans autre explication dans la lettre de Newton de 1676 déjà citée[88], et dont Newton observe seulement

84 Joh. I B. *Briefe* 1, p. 167.
85 *loc. cit.* note 76, pp. 291–293, Theor. V et VI.
86 *loc. cit.* note 76, p. 296, Theor. VII.
87 Op. LXIX, Joh. I B. *Opera* I, p. 387 – *Streitschriften*, p. 465.
88 *loc. cit.* note 81.

qu'elle se réduit, pour n entier impair, à un polynôme «qu'on obtient par l'algèbre ordinaire» au moyen des formules de multiplication des angles; c'est celui qui a été noté plus haut $(-1)^p P_n$, avec $p = \frac{n-1}{2}$. La série de Newton (avec celles pour sin x et cos x) fut publiée par Wallis, d'abord en 1685 dans son *Treatise of Algebra*, puis en 1693 dans ses *Opera Mathematica*[89].

Ayant donc obtenu (par «induction», il est vrai) la formule qui, pour $x = 2 \sin \frac{n\alpha}{2}$, $d = 2 \sin \frac{\alpha}{2}$, s'écrit

$$2 - x^2 = 2 \cos n\alpha = (-1)^n P_{2n}(d) = 2 - n^2 d^2 + \frac{n^2(n^2-1)}{3 \cdot 4} d^4 - \text{etc.},$$

Bernoulli pose $nd = a$; puis, laissant a constant, il fait $n = \infty$ (ce que le lecteur moderne n'a pas de peine à traduire en un passage à la limite pour $n \to \infty$). Il en conclut, puisque l'arc α et sa corde d sont «infiniment petits», $\alpha = d = \frac{a}{n}$, $x = 2 \sin \frac{\alpha}{2}$; quant à $(-1)^n P_{2n}(d)$, ses termes successifs, pour $n = \infty$, prennent les valeurs 2, $-a^2$, $\frac{a^4}{3 \cdot 4}$, etc., d'où (bien que Bernoulli ne le spécifie pas) le développement en série de cos α.

Mais il s'était proposé d'obtenir la série pour le sinus. Pour cela il réécrit le résultat ci-dessus sous la forme

$$x^2 = 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = a^2 - \frac{a^4}{3 \cdot 4} + \frac{a^6}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} - \text{etc.}$$

et élève cette formule aux puissances successives 2, 3, 4, 5. En fait on peut écrire

$$x^{2n} = a^{2n} \left[1 - \left(\frac{a^2}{3 \cdot 4} - \frac{a^4}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \dots \right) \right]^n$$

et développer le second membre par la formule du binôme, ce qui donne

$$x^{2n} = a^{2n} + \sum_{p=1}^{\infty} F_p(n) a^{2n+2p},$$

89 *Volumen Alterum*, p. 384.
Sur l'histore de cette formule et autres analogues, cf. aussi *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, Bd. II/3, Leipzig 1909–21, II C 1: *Algebraische Analysis* (von Alfred Pringsheim und Georg Faber), p. 35, note 119.

où $F_p(n)$ est une combinaison linéaire des coefficients du binôme $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{2}$,..., $\binom{n}{p}$, donc un polynôme en n. Bernoulli, qui ne devait prendre connaissance de la formule générale du binôme que bien plus tard[90], préfère procéder ici comme dans Med. CLXXIV et CLXXV et obtenir les cinq premiers termes de x^{2n} pour $n = 2, 3, 4, 5$ par calcul direct, après quoi il se croit en droit d'en tirer $(x^2)^{1/2}$ par le calcul des différences et l'interpolation «wallisienne», donc par induction. La forme inattendue sous laquelle il écrit les séries en question indique qu'il a cru que le dénominateur du coefficient $F_p(n)$, pour n entier, divise $(p/2)\cdot(2p+2)!$; cela n'est pas exact, comme le montre le cas $n = 3$, $p = 5$.

C'est seulement dix ans plus tard que Jacob revient à ces questions, à la suite d'une polémique entre lui et son frère dans les *Acta Eruditorum* à propos des «segments quarrables» de la cycloide: un article de Johann de juillet 1699 (Joh. I B. Op. LVIII), une réplique de Jacob en septembre 1699 (Op. XCII), de nouveau Johann en juin 1700 (Joh. I B. Op. LX), Jacob en décembre 1700 (Op. XCV) et Johann en avril 1701 (Joh. I B. Op. LXIX), le tout réuni dans les *Opera Omnia* de Johann[91]. Dans son Op. LVIII, Johann avait lié ce problème des «segments quarrables» aux formules qui relient entre elles les valeurs des fonctions trigonométriques pour des arcs dans un rapport rationnel («numeri ad numerum») l'un à l'autre. Jacob, dans Op. XCII, se contente de noter qu'en effet les formules de multiplication «par 2, 3, 4, etc.» s'obtiennent par un calcul *connu de tout le monde* («pervulgata analysi») et peuvent servir à construire des «segments quarrables». A quoi Johann réplique dans son Op. LX qu'on peut bien, *pervulgata analysi*, écrire les formules de multiplication par 2, 3, 4; mais il met son frère au défi de trouver les formules générales de multiplication par n, alors qu'il les possède, lui, et si générales qu'elles restent valables même pour n irrationnel; il avait oublié apparemment qu'en 1693 il avait transmis à Varignon le contenu de Med. CLXXVIII, où se trouvaient implicitement de telles formules. Le défi n'ayant pas été relevé par Jacob dans Op. XCV, Johann ne manqua pas de crier victoire dans son Op. LXIX, en termes fort aigres à l'égard de *quelqu'un* («nonneminem»), et en se donnant le mérite de deux formules (toutes deux connues de Viète[92]); la première exprime $\sin n\alpha/\sin\alpha$ par un polynôme en $\cos\alpha$ pour n entier, et a été indiquée plus haut; la seconde, qui

90 Cf. Op. CI, Prop. LIV, et ci-dessus, p. 22.

91 Joh. I B. *Opera* I, pp. 322–336 et 386–392 – *Streitschriften*, pp. 393–403, 420–424, 455–457 et 464–470.

92 Cf. *op. cit.* note 76, p. 296, Theor. VII et p. 289–290, Theor. III.

donne cos $n\alpha$ et sin $n\alpha$ en fonction de $\cos\alpha$ et sin α, est celle qu'on déduirait de la formule dite de Moivre

$$\cos n\alpha + \mathrm{i}\sin n\alpha = (\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha)^n$$

en développant le second membre par la formule du binôme et séparant la partie réelle et la partie imaginaire. Comme le fait valoir Johann, ces formules restent valables même pour n fractionnaire ou irrationnel, auquel cas elles déterminent des séries sur la convergence desquelles il ne dit rien, mais qui convergent effectivement dès que la suite de leurs termes tend vers 0, donc dès que $|\tan\alpha| < 1$. Johann devait d'ailleurs revenir sur ces questions[93] en 1712.

Est-ce Jacob qui a suggéré alors à son élève J. Hermann de reprendre l'examen de la question? Ce n'est pas impossible. Le travail de Hermann, qui ne parut[94] qu'en août 1703 dans les *Acta Eruditorum*, ne contient d'ailleurs guère de nouveauté; même l'idée d'appliquer à la recherche des formules de multiplication le «lemme de Ptolémée» sur le produit des diagonales d'un quadrilatère inscriptible avait déjà été utilisée par Wallis[95]. Mais Jacob trouva aussi, dans ce travail de Hermann, l'occasion de revenir à Med. CLXXVIII et d'en tirer l'article qu'il communiqua en juillet 1702 à l'Académie des Sciences de Paris[96]. Là, procédant exactement comme dans son ancienne *Méditation*, il écrit le polynôme, désigné plus haut par P_{2n}, au moyen duquel s'expriment

$$a^2 = \left(2 \sin \frac{n\alpha}{2}\right)^2 \quad \text{et} \quad b^2 = \left(2 \cos \frac{n\alpha}{2}\right)^2 = 4 - a^2$$

en fonction de $x = 2 \sin \frac{\alpha}{2}$; puis il indique, sans plus d'explications, qu'on tire de là les développements en série de a et de b suivant les puissances de x, soit *par le moyen des interpolations de M. Wallis* (donc en élevant à la puissance $\frac{1}{2}$ les polynômes précédents), soit par la méthode des coefficients indéterminés. Bien entendu, par l'un de ces procédés ou par l'autre, il ne pouvait guère obtenir que quelques termes des développements cherchés, après quoi il lui fallait en deviner la loi par induction; cela ne l'empêche pas de formuler cette loi correctement, retrouvant ainsi, comme il le note, une série déjà publiée par Wallis[97] d'après Newton, puis de tirer de là, par passage à la limite pour $n = \infty$, les séries (dues aussi à Newton[98]) pour sin x et cos x en fonction de x.

93 Joh. I B. Op. LXXXIX, *Opera* I, pp. 511–514.
94 Na. 005, *Demonstratio geminae formulae ... pro multisectione anguli vel arcus circularis ...*: AE Augusti 1703, pp. 345–352.
95 Cf. *op. cit.* note 77, p. 534, n° 19.
96 Op. XCVII (pp. 164–172 h.v.)
97 Cf. *op. cit.* note 77, p. 384.
98 Cf. Wallis, *loc. cit.*

Gedruckte Werke

Travaux imprimés

Op. XXXIV

Positiones Mathematicae de Rationibus et Proportionibus

Basileae, Typis Joh. Rodolphi Genathii 1688 [UB Basel Kd III 17,5] – Jac. B. Opera, pp. 361–373

THESIS I.

Id quod hac vice tractandum suscipimus, Euclidi *Λόγος*, Latine *Ratio* dicitur, vel quod in percipiendis rerum rationibus praecipua Rationis vis appareat, vel quod in rebus ipsis Ratio vix quicquam aliud cognoscat, quam rationes & relationes quasdam, quas inter se habent.

2. Hoc ipsum prae caeteris in Mathesi perspicuum est; ubi nullius rei quantitatem absolutam, seu quanta sit in se, cognoscimus, sed solummodo quam magna vel quam parva sit relative ad alias, investigamus: unde non sine ratione quis a nobis factum judicabit, quod Doctrinam Rationum, quae relationes istas magnitudinum explicat, & utramque in hac scientia paginam facit, nonnullis positionibus enucleatam demus.
3. Definimus itaque *Rationem*, quod sit affectio rerum, qua secum invicem comparari possunt secundum quantitatem.
4. Comparari dicuntur duae res secundum quantitatem, cum[1] consideratur, quoties una major minorve sit altera, seu quoties una alteram contineat, vel in eadem contineatur.
5. Illa vero, quae hoc pacto inter se comparantur, sunt tum *Numeri*, tum *Res numeratae*, interque has primario *Magnitudines*, secundario etiam alia, quae ex magnitudinibus cognitis, quibuscum relationem quandam habent, aestimantur; ut: *Pondera, Tempora, Celeritates, Vires, Soni, Divitiae, Sortes Aleatorum*[2], &c.
6. Unus enim motus altero tanto celerior tardiorve dicitur, ut & sonus unus alio sono tanto gravior vel acutior, quanto linearum eodem tempore decursarum, vel chordarum sonos hos edentium una altera longior, breviorque existit.
7. Caetera, quae vel cum nullis vel cum incognitis magnitudinibus relationem habent, accurate comparari, ac proinde cognosci non possunt, qualia sunt: *Eruditio, Prudentia, Facundia, Pulchritudo, Agilitas, Colores, Sapores, Odores*, &c.

1 Dans les *Opera*, on trouve «dum» (N.D.L.R.)
2 On notera cette inclusion de la probabilité parmi les grandeurs mesurables.

8. Quanquam enim sciamus, Hominem homine doctiorem vel pulcriorem, rosam rosa fragrantiorem, & cibum cibo suaviorem esse, si quidem sat magna inter utrumque disparitas intercedat, attamen quanto unum altero his qualitatibus antecellat, ignoramus. Idem fere dicendum de qualitatibus tactilibus, *Calore, Frigore, Humiditate, Siccitate*, ut maxime earum gradus ope Thermometri & Hygrometri quodammodo metiri didicerimus.
9. Numeri quamcunque rationem exprimentes ejus *Termini* vocantur, quorum is qui ad alium refertur, *Antecedens 'Ηγούμενος*; & is ad quem refertur, *Consequens 'Επόμενος* dicitur[3].
10. Si Termini sunt aequales, *Ratio* est *Aequalitatis*[4], *Λόγος 'Ισότητος*; si inaequales, *Inaequalitatis*: *Majoris* quidem, *Πρόλογος*, cum major Terminus minoris est antecedens; at *Minoris*, *'Υπόλογος*, cum ejusdem est consequens: Sic 5 ad 5, 6 ad 6, rationem habet aequalitatis, 3 ad 2 inaequalitatis majoris, 5 ad 6 minoris.
11. Si duarum Rationum iisdem terminis constantium una est majoris, altera minoris inaequalitatis, altera alterius *Reciproca* dicitur: Sic Ratio 3 ad 2 Reciproca est rationis 2 ad 3, & haec illius.
12. Ratio Aequalitatis est singularis & individua. Inaequalitatis Ratio est *Simplex*, vel *Multiplex*, & haec vel praecise, vel non praecise talis.
13. Si major terminus minorem semel tantum continet, & praeterea unam ejus partem aliquotam, Ratio est *Simplex Superparticularis*, *Λόγος 'Επιμόριος*: sin plures partes aliquotas, Ratio *Simplex Superpartiens*, *Λόγος 'Επιμερής*.
14. Si major terminus minorem aliquoties exacte continet, Ratio est *Multiplex*, *Πολλαπλάσιος*: si vero insuper unam ejus partem, est *Multiplex Superparticularis*, *Πολλαπλασιεπιμόριος*: si plures, *Multiplex Superpartiens*, *Πολλαπλασιεπιμερής*.
15. Omnes Rationes numero quidem explicabiles ad unam harum specierum referri possunt; ad quam autem quaelibet referri debeat, palam facit ejus *Exponens*, qui est quotus resultans ex divisione majoris termini per minorem.
16. Numerus integer hujus Exponentis, si est unitas, indigitat Rationem simplicem; si quis multitudinis numerus, multiplicem, puta *duplam*, si binarius; *triplam*, si ternarius, *decuplam*, si denarius; & si qua exponenti fractio adhaeret, ea denotat Rationem esse vel Superparticularem, vel Superpartientem: Superparticularem, cum fractionis numerator est unitas; Superpartientem, cum est numerus aliquis multitudinis.

3 Les termes grecs cités ici par Bernoulli sont pris dans Euclide; la plupart des suivants viennent de l'*Arithmétique* de Nicomaque.

4 Dans les *Opera*, on trouve «*Ratio aequalitatis*» (N.D.L.R.)

POSITIONES MATHEMATICÆ

De

RATIONIBUS ET PROPORTIONIBUS,

Quas

DEO VOLENTE

&

JUBENTE SAPIENTISSIMO PHILOSOPHORUM ORDINE

SUB PRÆSIDIO

JACOBI BERNOULLI,

Mathematum Profeſs: Publ:

in conſueto Auditorio Philoſophico

Ad diem 9. Octobris M DC . L X X X V I I I.

pro virili tuebitur

PAULUS EULERUS, BASIL.

BASILEÆ, Typis JOH. RODOLPHI GENATHII.

Titre de l'édition originale de Op. XXXIV

VIRIS

Conſiliorum prudentia & Dexteritate agendi
Spectatiſſimis, Graviſſimis,

DN. LEONHARDO RESPINGERO,
Suo è S. Baptiſmatis fonte Suſceptori Venerando.
DN. JOH. JACOBO SOCINO.
Inclytæ REIP. Patriæ Senatoribus Prudentiſſimis.

Nec non

DN. JOH. RVDOL. BATTIERIO
Patri ſuo Luſtrico Honorando.
DN. JACOBO EPISCOPIO.
DN. LVCÆ JVSTO.
Mercatoribus Integerrimis, Famigeratiſſimis.

Fautoribus, Patronis, Evergetis, Studiorum Promotoribus ætatem colendis

Haſce Studiorum primitias cum Voto omnigenæ proſperitatis

humillimè

offert & ſacras facit, ſeque ac ſtudia ſua porrò de meliore nota commendat

PAVLVS EVLERVS.

Dédicace de l'édition originale de Op. XXXIV

17. Superparticularis Ratio specialem suam nomenclationem accipit a denominatore fractionis, praefixa vocula *sesqui*, ut: *sesqui-altera*, *sesqui-tertia*, *sesqui-quarta*, &c. Superpartiens ab utroque fractionis termino, ut *superpartiens duas tertias, tres quartas*, &c. quae & ita efferuntur, *Superbipartiens tertias, Supertripartiens quartas*, &c.
18. Exemplis res fiet clarior: Ratio 6 ad 3 vocatur *dupla*, quia[5] 3) 6 (2. Ratio 12 ad 4, *tripla*, quia 4) 12 (3. Ratio 3 ad 2 *sesquialtera*, quia 2) 3 ($1\frac{1}{2}$. Ratio 5 ad 4 *sesquiquarta*, quia 4) 5 ($1\frac{1}{4}$. Ratio 19 ad 7 *dupla superquintupartiens septimas*, quia 7) 19 ($2\frac{5}{7}$.
19. Si fractio exponenti adhaerens numeris compositis constet, quod fit quotiescunque ipsi rationum termini inter se compositi fuerint, tunc prius reducenda est ad terminos simplicissimos; alias ratio videri posset superpartiens, quae non nisi est superparticularis: sic ratio 6 ad 4 non dicenda est superbipartiens quartas, ut maxime 4) 6 ($1\frac{2}{4}$, sed sesquialtera, quia $\frac{2}{4}$ aequipollent $\frac{1}{2}$.
20. Rationes minoris inaequalitatis eodem pacto exprimuntur, quo earum reciprocae, praemissa discriminis ergo syllaba *Sub*: ut Ratio 3 ad 6 est *subdupla*: 4 ad 12 *subtripla*: 2 ad 3 *subsesquialtera*: 4 ad 5 *subsesquiquarta*: 7 ad 19 *subdupla subsuperquintupartiens septimas*.
21. Sciendum tamen, barbara ista Veterum vocabula obsoleta fere nunc esse, & modernos Mathematicos rationem quamlibet frequentius ipsis terminis innuere: Malunt enim E.G. dicere, circumferentiam Circuli ad diametrum se habere in ratione 22 ad 7, aut 223 ad 71, quam in ratione tripla sesquiseptima, vel tripla superdecupartiente septuagesimas primas.
22. Si duae Rationes inaequales comparantur invicem, illa dicitur *Major*, cujus antecedens saepius continet suum consequentem, vel majorem consequentis partem: Idcirco Ratio majoris inaequalitatis major est quavis Ratione minoris inaequalitatis; duarum vero Rationum majoris inaequalitatis, illa major est, quae majorem sortitur exponentem; at duarum minoris inaequalitatis illa major, quae minorem.
23. Hinc inaequalium magnitudinum major ad eandem majorem habet rationem, quam minor; sed eadem ad minorem majorem rationem habet, quam ad majorem. E.G. 8 ad 3 majorem habet rationem, quam 7 ad 3. Contra 3 ad 7 majorem habet rationem, quam 3 ad 8.

5 Dans les *Opera*, on trouve «quia 6 : 3 = 2», et les exemples suivants sont écrits de manière analogue (N.D.L.R.)

24. Si Rationes aequales invicem comparantur, existit *Proportio*, quae proinde nihil aliud est quam Rationum aequalitas, & denotatur ita ::, ut $A.B::C.D$, quo significatur, A ad B eandem habere Rationem, quam habet C ad D; seu quantitates A, B, C, D proportionales esse.
25. De Proportionalibus haec capiantur Theoremata: Si termini Rationis cujuscunque per communem aliquem numerum seu multiplicentur seu dividantur, habebunt producti vel quoti eandem cum illis rationem: sic 6 ad 4 eandem habet rationem, quam bis 6 ad bis 4, ter 6 ad ter 4, dimidium 6 ad dimidium 4, &c.
26. Quatuor proportionalium prima ducta in ultimam, idem efficit, atque secunda in tertiam, quae proprietas Regulae Aureae fundamentum existit.
27. Si totum ad totum, ut ablatum ad ablatum, erit etiam reliquum ad reliquum, ut totum ad totum: hoc est, si $A.B::C.D$, erit etiam $A-C.B-D::A.B$.
28. Si quotcunque magnitudines proportionales fuerint, $A.B::C.D::E.F::G.H$, &c. erit ut una antecedentium ad unam consequentium, ita omnes antecedentes simul ad omnes consequentes, i.e. erit
$$A.B::A+C+E+G.B+D+F+H.$$
29. Si $A.B::C.D$, erit *invertendo* $B.A::D.C$, *permutando* $A.C::B.D$, *componendo* $A+B.B::C+D.D$, *dividendo* $A-B.B::C-D.D$, *convertendo* $A.A-B::C.C-D$, *sumendo antecedentium dupla* $2A.B::2C.D$.
30. Si quotcunque magnitudines $A.B.C.D$. fuerint ab una parte, totidemque ab altera $E.F.\dot{G}.H$; sitque $A.B::E.F$, & $B.C::F.G$, & $C.D::G.H$, erit ex *aequo ordinate* $A.D::E.H$: sin vero $A.B::G.H$, & $B.C::F.G$, & $C.D::E.F$, erit ex *aequalitate perturbata* $A.D::E.H$. Atque hi praeter nonnullos alios sunt modi illi argumentandi, quos Geometrae in Propositionum maxime perplexarum demonstrationibus ingeniose admodum, & magno legentium emolumento adhibent.
31. Si duae Rationes sint aequales, & consequens primae conveniat cum antecedente secundae, *Proportio continua* dicitur. Haec, si per terminos plures continuetur, *Progressio* vocatur, quae vel *Ascendens* est, si ratio per quam progreditur, est minoris inaequalitatis, ut 1.3.9.27. &c. vel *Descendens*, si majoris, ut 8.4.2.1.
32. Omnis Progressio continuari potest per infinitos terminos; descendendo tamen nulla potest per terminos integros continuari; ascendendo potest, si Ratio per quam continuatur, sit exacte multiplex.
33. Dato primo, secundo & ultimo progressionis cujuscunque termino Summa omnium ita invenitur: Primus terminus ducatur in differentiam primi & ultimi, Productum dividatur per differentiam primi & secundi, Quoto addatur ultimus, & habebitur progressionis Summa.

34. Quoniam in progressione descendente infinitorum terminorum, postremus terminus perpetuo 0 est, idcirco duntaxat Quadratum primi per differentiam primi & secundi dividendum; Quae insuper differentia si sit unitas, ipsum statim Quadratum primi Summam prodit.
35. Patet hinc, qua ratione infinitae numero magnitudines finitam summam constituere possunt, quod ignaris forte mirum videbitur, quanquam sit verissimum. Ita si quis facturus iter 100 milliarium primo die conficeret milliaria 10, secundo 9, tertio $8\frac{1}{10}$, & sic quolibet sequentium dierum itineris praecedentis diei $\frac{9}{10}$ partes, ac per totam aeternitatem iter faceret, nunquam 100 milliaria absolveret.
36. Si quotcunque Rationes proponantur, productum omnium antecedentium ad productum omnium consequentium habere dicitur *Rationem Compositam* ex rationibus propositis.
37. Hinc datis quotcunque magnitudinibus Ratio primae ad ultimam *Composita* censetur ex Ratione primae ad secundam, secundae ad tertiam, tertiae ad quartam, & sic porro usque ad ultimam.
38. Omnia Triangula, Parallelogramma, Pyramides, Primata, Coni, Cylindri, rationem habent ex rationibus basium & altitudinum compositam.
39. Si duae Rationes aequales componantur, Composita alterutrius componentium *Duplicata* dicitur, si tres *Triplicata*, si quatuor *Quadruplicata*; & vicissim una componentium compositae *subduplicata*, *subtriplicata*, *subquadruplicata*: E quibus patet, immane discrimen esse inter Rationem *duplam & duplicatam Λόγον διπλάσιον καὶ διπλασίονα* , adeoque perperam a nonnullis, quos inter Meibomius in Dial. de Proportionibus[6], confundi.
40. Infertur hinc, Quadrata habere Rationem duplicatam, Cubos triplicatam laterum suorum: & si quantitates aliquot continue proportionales sint, Rationem primae ad tertiam esse duplicatam, primae ad quartam triplicatam, primae ad quintam quadruplicatam rationis ejus, quam prima habet ad secundam.
41. Similes superficies duplicatam, similia solida triplicatam habent rationem laterum homologorum. Intellige haec etiam de Circulis ac Sphaeris.

6 Il s'agit de l'ouvrage: M. Meibom, *De Proportionibus Dialogus*, publié en 1655 à Copenhague; Wallis en avait publié une critique, ou plutôt une réfutation, dès 1657, sous le titre *Adversus Marci Meibomii De Proportionibus Dialogum* (reproduit dans ses *Opera*, vol. I, pp. 257–288). Il se peut que Bernoulli n'ait connu que ce dernier ouvrage.

42. Caeterum animadvertimus, Archimedem lib. 2 de Sphaera & Cyl.[7] prop. 9 ipsas rationes compositas denuo inter se comparare, dum Rationem triplicatam rationis alicujus ejusdem duplicatae *sesquialteram* vocat, unde Ratio quasi *decomposita* exsurgit.
43. Si Ratio quaecunque addita Rationi aequalitatis componat aliquam, Composita non differt a componente. Hinc est, quod Triangula, Parallelogramma, Pyramides, Prismata, Coni, Cylindri, & quaecunque Figurae ex rationibus basium & altitudinum componuntur, in basibus aequalibus se habeant ut altitudines, & in altitudinibus aequalibus, ut bases; Item quod momenta ponderum aequalium se habeant ut distantiae ab axe motus, & vice versa momenta aequaliter distantium ut pondera.
44. Si duae Rationes reciprocae componantur, exurgit Ratio aequalitatis: Hinc recensitae figurae sunt aequales, quotiescunque ipsarum bases & altitudines reciprocantur; & momenta sunt aequalia, quotiescunque pondera se habent in ratione reciproca distantiarum.
45. Explicata Rationum doctrina, verbo adhuc indicandum est, quaenam sint illa quae inter se Rationem habere possunt vel non possunt: Rationem non suscipiunt heterogenea, sic pondus ad tempus, sonus ad colorem, linea ad superficiem, rationem nullam habet: Nihilominus quia in Arithmetica Infinitorum linea, ut pars infinitesima corporis concipitur, potest ejus ad superficiem Ratio dici infinite exigua.
46. Finitum quoque ad infinitum licet homogeneum, linea finita ad infinitam rationem nullam, vel, si dicere mavis, infinite exiguam habet.
47. Magnitudines homogeneae finitae sunt vel *Rationales*, *ῥηταὶ*, quae numero integro, fracto aut misto exprimi possunt, vel *Irrationales*, *ἄλογοι*, quae non possunt: (Obiter notamus Urstisium[8], qui cap. 3. Arith. mistos numeros absurde surdis accenset). Omnes magnitudines Rationales, quia sunt commensurabiles, h.e. quia mensuram aliquam communem admittunt, Rationem habent numero explicabilem. Inter Rationalem & Irrationalem contra quamvis Ratio sit, haec tamen ob asymmetriam earum numero explicari nequit: Sic Ratio inter latus quadrati & diagonium ejus, vel inter 1 & $\sqrt{2}$ nullo numero exprimi potest. Inter duas Irrationales Ratio plerunque quidem numero est inexplicabilis, velut inter $\sqrt{2}$ & $\sqrt{7}$. Quandoque tamen numero comprehendi potest, sic $\sqrt{2}$ ad $\sqrt{8}$ rationem habet exacte subduplam, eam videlicet, quam habet 1 ad 2.

7 Dans les éditions modernes d'Archimède, c'est de la proposition 8 du livre II qu'il s'agit.

8 Il s'agit de Christian Wurstisen (Urstisius), *Elementa Arithmeticae, logicis legibus deducta*, Basileae 1579, dont l'exemplaire conservé à UB Basel porte d'amples notes marginales de la main de Jacob Bernoulli. La phrase critiquée ici se trouve à la p. 22: «Supersunt numeri misti ... *In rebus Geometricis pro numeris non habentur: sed cum mensura rei, misto tantum numero exprimi potest, ἄρρητος dicitur, quasi vero numero inexplicabilis. Hinc numeri Surdi appellatio.*» (N.D.L.R.)

48. Quin etiam nulla datur earum, quae numero exprimi possunt, quae non etiam in Irrationalibus locum inveniat: & hoc omnium forte in Geometria admirabilissimum, quod dentur tales quantitates, quae seorsim quidem acceptae nullo numero intelligibili exprimuntur, inter se tamen collatae rationem habent exacte cognitam & numero determinatam.

49. Imo, ipsi quoque infinito haec quodammodo accommodari possunt: Quemadmodum enim rationale ad irrationale nullam habere potest rationem numero determinabilem, potest tamen unum irrationale ad aliud irrationale: Sic quamvis finitum inter & infinitum nulla ratio sit, ea tamen inter duo infinita obtinere potest, quandoquidem unum infinitum alterius infiniti concipere possum duplum, triplum, decuplum, centuplum, millecuplum, infinitecuplum, infinities infinitecuplum. Finge Cubo ad latus meridionale apponi alium aequalem cubum, huic alium, huic iterum alium & alium sine fine; qua ratione nascetur Parallelepipedum oblongum, quod bis, ter, quater, & tandem infinities majus fiet cubo proposito; Huic a plaga meridionali interminato versus orientem adjice secundum, tertium, quartum, usque in infinitum; quod inde conflabitur ab ortu & meridie interminatum corpus, infinities superabit Parallelepipedum; adeoque infinities infinitis vicibus Cubum. Idem praesta versus Occidentem, & producetur corpus bis infinities infinitecuplo majus Cubo; cui si ex parte Septentrionali simile adjeceris, habebis discum versus omnes Horizontis plagas infinite extensum, qui Cubum quater infinities infinitis vicibus superabit: huic disco si infinitos alios aeque crassos substernas, totidemque superstruas, Corpus habebis, quod omne conceptibile spatium replebit, eritque octies inf. inf. infinities majus Cubo. Deinde quia hedra est pars infinitesima Cubi; & Cubi latus pars infinitesima hedrae, & punctum lateris: Idcirco immensa illa moles, quae cubum octies inf. inf. infinitis vicibus superat, superabit punctum 8. inf. inf. inf. inf. inf. infinitis vicibus: sic ut secundum hunc conceptum dicendum, quod Corpus in omnes mundi plagas conceptibiles infinite extensum habeat ad atomum rationem octies inf. inf. inf. inf. infinities infinitecuplam.

50. Quanquam vero isthaec insanientium deliriis non absimilia plerisque videbuntur, nihilominus vix aliter se exprimere poterit sana mens, quae secundum conceptus a Deo sibi inditos loqui volet. Fateor multis contradictionibus involuta esse, forte propterea, quia finito intellectui infiniti comprehensio impossibilis: forte etiam, quia nihil est nec esse potest extra mentem nostram, quod his conceptibus respondeat. Deus solus est is, quem scimus & actu esse, & infinitum esse, ad quem caetera omnia, quantacunque sunt, ne umbram quidem rationis habent. In hujus cognitione summa Sapientia, in fruitione summa Salus. Hoc qui potitur habet omnia, etiamsi nihil haberet; qui caret, nihil habet, tametsi infinitorum mundorum opes possideret.

Ad uberiorem disputandi materiam illa Corollaria, quae Disputationi Mathem. m. Febr. sup. anni habitae annexa leguntur, denuo ventilanda sistimus, praesertim vero ea quae de *Perpetuo quodam Mobili* in Nov. Reip. lit. & in Actis Lips. alibique passim in varias partes disputantur, quorum summam ad haec capita referimus: 1. Machina controversa nunquam obtineri posse motum perpetuum, cujuscunque sit figurae, & quocunque situ erigatur, contra ejus Auctorem. 2. Vires Machinae non recte aestimari a Cl. Papino. 3. Si Papini calculus obtineret, fore, ut levi machinae immutatione motus perpetuus salvaretur[9].

FINIS.

9 Conformément aux usages, il fallait, pour l'examen du candidat (Paul Euler en la circonstance) quelques propositions supplémentaires qu'il était censé *défendre* en dehors du sujet principal de l'examen. Par la suite Bernoulli prit l'habitude d'intituler «ΕΠΙΜΕΤΡΑ» les propositions en question. Ici il se contente de renvoyer, d'une part aux propositions supplémentaires («Corollaria») qu'il s'était lui-même chargé de soutenir pour sa propre candidature à la chaire de mathématique de l'Université (Op. XXVII, *Opera*, pp. 311–313 – *Werke* 2, pp. 118–120), et de l'autre à ses récents articles sur la machine de Papin et le mouvement perpétuel (Op. XXVI, *Opera*, pp. 286–290 – *Werke* 1, pp. 468–471; Op. XXVIII, *Opera*, pp. 314–327 – *Werke* 1, pp. 472–482; Op. XXXIII, *Opera*, pp. 355–360 – *Werke* 1, pp. 487–490). Parmi les premières, on remarquera le «Corollarium» n° 11, qui porte sur les probabilités.

Op. XXXV

Positiones Arithmeticae de Seriebus Infinitis

Basileae, Typis Johann. Conradi a Mechel 1689 [UB Basel Kd III 17,6] – Jac. B. Opera, pp. 375–402

Viris *Amplissimis, Prudentissimis, Nobilissimis, Gravissimis,*

Dn. EMANUELI SOCINO, Inclytae Reipub. Patriae Consuli, Patriae Patri.
Dn. JOH. CONRADO HARDERO, Archigrammateo & Scholarchae.
Dn. EMANUELI SCHERBIO, Senatori.

Nec non Plur. Reverendis, Spectatissimis Viris,

Dn. JOH. JACOBO MUSPACHIO, Ecclesiastae in aede Franciscanorum & Ptochotrophio meritissimo.
Dn. CHRISTOPHORO STUPANO, Mercatori Integerrimo.

Fautoribus, Patronis, suis e Sacro Fonte Susceptoribus honoratissimis, Disputationem hanc, qua par est observantia ac submissione,

D. D. O.

JOH. JACOBUS FRITZIUS, Bas.
Mag. Cand.

PRAEFATIO.[1]

Cum non ita pridem in Serierum Infinitarum speculationem incidissem, prima, cujus summa post Geometricam Progressionem ab aliis jam tractatam mihi sese offerebat, erat series fractionum, quarum denominatores Geometrica, numeratores Arithmetica progressione crescunt: quod cum Fratri indicassem, non tantum mox idem adinvenit ille, sed & praeterea novae cujusdam fractionum seriei, cujus denominatores Trigonalium, ut vocantur, numerorum dupli erant, summam pervestigavit; quam vero & ipse, cum significasset, postridie detexi, propositis ei vicissim aliis nonnullis, quae interea, ut clavus clavum trudere solet, occasione hac repereram: Quibus inventis certatim alter alterum sic exercuimus, ut paucorum dierum spatio non tantum serierum illarum, quas Cel. Leibnitius in Actis Erud.

1 Ici commence le texte reproduit dans les *Opera* (N.D.L.R.)

Lips. anno 1682 M. Febr. & 1683 M. Octob. recenset, nosque paulo antea mirati fuimus, summas dare possemus, sed & plura alia eaque non contemnenda ex gemino duntaxat fundamento invenerimus, quorum unum consistit in resolutione seriei in alias infinitas series, alterum in subductione seriei uno alterove termino mutilatae a seipsa integra. Horum vero praecipua (cum eorum nihil apud hos quos legi hactenus, publicatum viderim) una (& forte altera) Disputatione enucleanda proponam, praemissis nonnullis, quae passim apud alios quoque vulgatae prostant, Propositionibus, ne illas aliunde petere opus esset. Caeterum quantae sit necessitatis pariter & utilitatis haec serierum contemplatio, ei sane ignotum esse non poterit, qui perspectum habuerit, ejusmodi series sacram quasi esse anchoram, ad quam in maxime arduis & desperatae solutionis Problematibus, ubi omnes alias humani ingenii vires naufragium passae, velut ultimi remedii loco confugiendum est.

Axiomata seu Postulata.

1. Omne quantum est divisibile in partes se minores.
2. Omni quantitate finita potest accipi major.
3. Si quantitas quaepiam multata parte sui aliqua subtrahitur a seipsa integra, relinquitur illa pars.

Propositiones:

I. *Quod data quavis quantitate minus est, illud est non-quantum seu nihil.*

Dem. Nam si quantum esset, dividi posset in partes se minores, per Ax. 1; non igitur esset data quavis quantitate minus, contra hyp.

II. *Quod data quavis quantitate majus est, infinitum est.*

Nam si finitum esset, illo posset accipi quantitas major, per Ax. 2; non igitur quavis data quantitate foret majus, contra hyp.

III. *Omnis Progressio Geometrica continuari potest per terminos infinitos.*

Semper enim fieri potest: Ut primus terminus ad secundum, sic postremus ad sequentem, & sequens ad alium & alium sine fine in infinitum; quorum quidem terminorum nullus aequari potest vel nihilo vel infinito, cum secus ad illum praecedens eam rationem habere non posset, quam habet primus ad secundum, contr. defin. progr.

IV. *Si sit Progressio Geometrica quaecunque A, B, C, D, E; & alia Arithmetica totidem terminorum A, B, F, G, H, incipiens ab iisdem terminis A & B, erunt reliquorum singuli in Geometrica singulis ordine sibi respondentibus in Arithmetica majores, tertius tertio, quartus quarto, ultimus ultimo, adeoque omnes omnibus.*

POSITIONES ARITHMETICÆ

DE

SERIEBUS INFINITIS

Earumq;

SUMMA FINITA,

Quas

DEO BENEDICENTE

Ac

Jubente Philoſophorum Ordine

Auctore Præſide

JACOBO BERNOULLI,

Math. P. P.

Pro virili tueri conabitur

JOHANN. JACOBUS FRITZIUS Baſ.

Magiſt. Cand.

Ad diem 7. Junii M DC LXXXIX. horis locoq; ſolitis.

BASILEÆ,

Typis JOHANN. CONRADI à MECHEL.

Titre de l'édition originale de Op. XXXV

Quia enim $A.B::B.C::C.D::D.E$, erit per 25.5. Eucl. tum $A+C>2B \propto$ (ex nat. Progr. Arith.) $A+F$; unde $C>F$: tum $A+D>B+C>B+F \propto A+G$; unde $D>G$: tum $A+E>B+D>B+G \propto A+H$; unde $E>H$.

Quae erant demonstr.

V. *In Progressione Geometrica crescente A, B, C, D, E perveniri tandem potest ad terminum E quovis dato Z majorem.*

Incipiat ab iisdem terminis Progressio Arithm. A, B, F, G, H, continuata quousque ultimus H superet Z (id enim fieri posse claret), tum vero continuetur Geometrica per terminos totidem, eritque per praeced. postremus $E>H>Z$.

Q.E.D.

Coroll. Hinc in Progr. Geom. crescente infinitorum terminorum postremus terminus[2] est ∞, per Prop. II (∞ est Nota Infiniti).

VI. *In Progress. Geometr. decrescente A, B, C, D, E pervenitur tandem ad terminum E quovis dato Z minorem*[3].

Constituatur Progressio ascendens Z, Y, X, V, T, in ratione B ad A, quousque ultimus terminus T superet A (quod fieri posse per praeced. constat); tum continuetur altera descendendo per totidem terminos A, B, C, D, E; eritque ultimus $E<$ dato Z. Quia enim Progressiones A, B, C, D, E, & T, V, X, Y, Z, per eandem rationem A ad B progrediuntur, & terminos numero aequales habent, erit ex aequo $A.E::T.Z$; sed $A<T$, per constr. Ergo & $E<Z$.

Q.E.D.

Coroll. Hinc in Progr. Geom. decrescente in infinitum continuata ultimus terminus est 0, per Prop. I.

2 Pour une suite infinie, les mots de «*postremus terminus*», ou bien «*ultimus terminus*», sont utilisés par Bernoulli pour désigner la limite de la suite; autrement dit, et pour employer le langage moderne, il conçoit une suite comme une fonction $f(n)$ de l'entier naturel n, et sa limite comme la *valeur* $f(\infty)$ de f pour $n=\infty$, valeur qui peut elle-même (comme ici) être infinie et est alors, elle aussi, désignée par ∞. Dans cette manière de voir, qui devait rester aussi, par exemple, celle d'Euler au cours du siècle suivant, le symbole ∞ désigne l'*infini actuel*, sans bien entendu que rien soit tenté pour en justifier l'emploi, sinon par la cohérence des résultats qu'on en déduit.

3 Cf. Med. CXXXIV (p. 185 h.v.); la démonstration donnée dans Prop. VI diffère légèrement dans la forme de celle de Med. CXXXIV, mais toutes deux s'appuyent sur un calcul de proportions, donc sur le livre V d'Euclide, dont Bernoulli allait bientôt s'affranchir en faveur des méthodes de l'algèbre *moderne*. On notera que les signes d'inégalité, $\sqsubset$ (pour *plus grand que*) et $\urcorner$ ou $\lrcorner$ (pour *plus petit que*) ont été remplacés, dans les *Positiones* imprimées de 1689, par les signes *modernes* > et < (cf. *Les notations de Jacob Bernoulli*, p. XVIII h.v.).

VII. *In omni Progr. Geom. A, B, C, D, E, primus terminus est ad secundum, sicut summa omnium excepto ultimo ad summam omnium excepto primo.*

$$(A\,.\,B::A+B+C+D\,.\,B+C+D+E)$$

Quia enim $A\,.\,B::B\,.\,C::C\,.\,D::D\,.\,E$, erit per 12.5. Eucl. $A\,.\,B::A+B+C+D\,.$ $B+C+D+E$. Q.E.D.

VIII. *Progressionis Geom. cujuscunque A, B, C, D, E, summam S invenire.*

Per praeced. est $A\,.\,B::S-E\,.\,S-A$; quare convertendo $A\,.\,A=B::S-E\,.\,A=E$; unde $S-E \propto \dfrac{A \text{ in } A=E}{A=B}$, & $S \propto \dfrac{A \text{ in } A=E}{A=B}+E$. ($=$ denotat differentiam duarum quantitatum, quibus interseritur, cum non definitur, penes utram sit excessus[4]).

Coroll. Si Progressio Geom. descendendo continuetur in infinitum, adeoque ultimus terminus per Coroll. VI evanescat, erit summa omnium $\dfrac{A\text{q}}{A-B}$: unde liquet, quo pacto infiniti etiam termini finitam summam constituere possunt.

IX. *Si Series infinita continue proportionalium A, B, C, D, E, &c. decrescat in ratione A ad B, erunt summae omnium terminorum, omnium demto primo, omnium demtis duobus primis, &c. etiam continue proportionales, & quidem in eadem ratione A ad B.*

Quoniam $A\,.\,B::B\,.\,C::C\,.\,D$, erit tum $A\text{q}\,.\,B\text{q}::B\text{q}\,.\,C\text{q}$: tum etiam
$$A\,.\,B::A-B\,.\,B-C::B-C\,.\,C-D,$$
quare dividendo rationes aequales per aequales,
$$\frac{A\text{q}}{A-B}\,.\,\frac{B\text{q}}{B-C}::\frac{B\text{q}}{B-C}\,.\,\frac{C\text{q}}{C-D},$$
hoc est per Cor. praec. Summa omnium ad omnes sequentes primum, ut hi ad omnes sequentes secundum. Q.E.D.

Et proinde per 19.5. Eucl. summa omnium ad omnes sequentes primum, ut primus ad secundum. Q.E.D.

4 Cette utilisation de «$A=B$» pour désigner la différence absolue (ce que nous noterions $|A-B|$) semble être particulière à Jacob Bernoulli, le signe habituel de l'époque étant celui d'Oughtred $A\sim B$ (N.D.L.R.)

X. *Seriei infinitae fractionum,* $\frac{a}{b}, \frac{a+c}{b+d}, \frac{a+2c}{b+2d}, \frac{a+3c}{b+3d}$, *&c. quarum numeratores & denominatores crescunt Progressione Arithm. ultimus terminus est fractio* $\frac{c}{d}$, *cujus numerator & denominator sunt communes progressionum differentiae*[5].
Ad hoc analytice investigandum consideretur quaesitus terminus ut cognitus, & vocetur t; numerus vero termini ut quaesitus, & dicatur n; eritque ex generatione progressionis terminus optatus $t \propto \frac{a+nc-c}{b+nd-d}$, ideoque $n \propto 1 + \frac{bt-a}{c-dt}$, quod aequari debet infinito: & quia numerator hujus fractionis est finitus (nam infinitus esse non potest, alias t deberet esse $\propto \infty$; ideoque esset $c-dt$, ipsaque adeo fractio negativa quantitas, quod absurdum), oportet ut denominator sit aequalis nihilo, ac proinde $c \propto dt$, & $t \propto \frac{c}{d}$. Q.E.D.

Brevius ita: Ex seriei genesi patet, terminum infinitesimum esse

$$\frac{a+\infty c}{b+\infty d} \propto \frac{\infty c}{\infty d} \propto \frac{c}{d}. \qquad \text{Q.E.D.}$$

Coroll. Summa omnium terminorum, sive ultimus primo major sit minorve, necessario infinita est; infiniti enim termini minori horum duorum aequales infinitam dant summam: Unde a fortiori, &c.

XI. *Fractionis ad aliam ratio composita est ex ratione directa numeratorum & reciproca denominatorum.*

Nam[6]
$$\frac{A}{B}.\frac{C}{D}::\frac{AD}{BD}.\frac{BC}{BD}::AD.BC::A.C\boldsymbol{+}D.B. \qquad \text{Q.E.D.}$$

XII. *In serie fractionum, quarum numeratores crescunt progressione Arithm., denominatores Geometrica, aut vice versa, ut*

$$\frac{A}{F}.\frac{A+C}{G}.\frac{A+2C}{H}.\frac{A+3C}{I}, \quad aut \quad \frac{F}{A}.\frac{G}{A+C}.\frac{H}{A+2C}.\frac{I}{A+3C}:$$

Si N nomen ordinis ultimi termini ad unitatem majorem rationem habeat, quam G ad G−F, erit ille terminus ibi sequenti major, hic minor.

5 Cf. Med. CXXXV (p. 186 h.v.).
6 Dans l'expression qui suit, le $\boldsymbol{+}$ (imprimé ici en caractère gras) désigne la *composition des rapports* selon Euclide, c'est-à-dire en langage moderne la multiplication. Il est à noter que cet usage a été conservé par Cramer dans les *Opera* de 1744. Cf. *Les notations de Jacob Bernoulli*, pp. XVIII–XIX h.v.

1. Hyp. Quia $N.1 > G.G-F$, erit convertendo $N.N-1 < G.F$, & $CN.CN-C < G.F$. Ergo $CN-C$: in $G > CN$ in F, ergo fortius (ob $AG > AF$) $A+NC-C$: in $G > A+CN$: in F, hoc est, Numerator termini N in $G >$ Numeratore termini sequentis in F: Sed ita se habet terminus N ad terminum sequentem, per praeced.: Quare terminus N major sequenti, & ita deinceps ab illo omnes. Q.E.D.

2. Hyp. Inversis invertendis eodem modo demonstratur.

XIII. *Si infinitae sint fractiones* $\frac{A}{B}.\frac{C}{D}.\frac{E}{F}.\frac{G}{H}.\frac{I}{L}.\frac{M}{N}.\frac{O}{P}$, *&c. quarum numeratores crescant progr. Arithm. & denominatores Geom.*[7] *erit ultimus terminus* 0; *sin illi crescant Geometr. hi Arithm. erit ultimus* ∞.

1. Hyp. Si primus terminus secundo non sit major, continuari saltem poterit Progressio, quousque praecedens superet sequentem, per praeced. Esto $\frac{G}{H} > \frac{I}{L}$, & sint infiniti continue proportionales G, I, Q, R, &c. unde propter H, L, N, P ∺ erunt & ipsae fractiones $\frac{G}{H}.\frac{I}{L}.\frac{Q}{N}.\frac{R}{P}$, &c. ∺ quae ob $\frac{G}{H} > \frac{I}{L}$ in nihilum tandem abeunt per Cor. VI. Quare cum $Q > M$, $R > O$, &c. per IV. multo magis $\frac{G}{H}.\frac{I}{L}.\frac{M}{N}.\frac{O}{P}$, &c. in nihilum abibunt. Q.E.D.

2. Hyp. Nisi primus secundo minor sit, continuetur progressio, quousque praecedens sequenti minor fiat, per praec.: Esto $\frac{G}{H} < \frac{I}{L}$, & sint infiniti H, L, S, T, &c. ∺ unde propter G, I, M, O, &c. ∺, & ipsae fractiones $\frac{G}{H}, \frac{I}{L}, \frac{M}{S}, \frac{O}{T}$, &c. proportionales erunt, quae ob $\frac{G}{H} < \frac{I}{L}$ in infinitum desinunt per Cor. V. Quare cum $S > N$, $T > P$, &c. per IV. multo magis $\frac{G}{H}, \frac{I}{L}, \frac{M}{N}, \frac{O}{P}$, &c. in infinitum excrescent. Q.E.D.

7 Cf. Med. CXXXVI (p. 187 h.v.).

XIV. *Invenire summam seriei infinitae fractionum, quarum denominatores crescunt progressione Geometrica quacunque, numeratores vero progrediuntur vel juxta numeros naturales* 1, 2, 3, 4, *&c. vel trigonales* 1, 3, 6, 10, *&c. vel pyramidales* 1, 4, 10, 20, *&c. aut juxta quadratos* 1, 4, 9, 16, *&c. aut cubos* 1, 8, 27, 64, *&c. eorumve aequemultiplices*[8].

1. *Si Numeratores progrediuntur juxta numeros naturales:*

Summa invenitur, resolvendo seriem propositam A in alias infinitas series B, C, D, E, &c. quae singulae geometrice progrediuntur, quarumque summae (si primam hic excipias) novam Geometricam progressionem F constituunt per IX. cujus quidem, uti caeterarum, summa per Coroll. VIII reperitur. En operationem:

$$A \infty \frac{a}{b} + \frac{a+c}{bd} + \frac{a+2c}{bdd} + \frac{a+3c}{bd^3} \text{ \&c.} \infty B+C+D+E+ \text{ \&c.}$$

$$\begin{array}{l}
B \infty \frac{a}{b} + \frac{a}{bd} + \frac{a}{bdd} + \frac{a}{bd^3} \text{ \&c.} \infty \frac{ad}{bd-b} \\
\left.\begin{array}{l}
C \infty \;..+ \frac{c}{bd} + \frac{c}{bdd} + \frac{c}{bd^3} \text{ \&c.} \infty \frac{c}{bd-b} \\
D \infty \;........ + \frac{c}{bdd} + \frac{c}{bd^3} \text{ \&c.} \infty \frac{c}{bdd-bd} \\
E \infty \;...............+ \frac{c}{bd^3} \text{ \&c.} \infty \frac{c}{bd^3-bdd} \\
\text{\&c.} \infty \;...................... \text{ \&c.} \infty \text{ \&c.}
\end{array}\right\} F \infty \frac{cd}{b \text{ in } \mathrm{Q}:d-1}
\end{array}$$

cui additus primus terminus $\frac{ad}{bd-b}$ producit totius propositae seriei A

$$\frac{ad}{b \text{ in } d-1} + \frac{cd}{b \text{ in } \mathrm{Q}:d-1} \infty \text{ summam.}$$

2. *Si Numeratores sunt juxta Trigonales:*

Series proposita G resolvenda est in aliam H, cujus numeratores sint juxta praecedentem hypothesin, hoc modo:

8 Cf. Med. CXXXIX (pp. 188–190 h.v.).

$$G \infty \frac{c}{b} + \frac{3c}{bd} + \frac{6c}{bdd} + \frac{10c}{bd^3}\ \&c.$$

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{c}{b} + \dfrac{c}{bd} + \dfrac{c}{bdd} + \dfrac{c}{bd^3}\ \&c. \infty \dfrac{cd}{bd-b} \\
\quad + \dfrac{2c}{bd} + \dfrac{2c}{bdd} + \dfrac{2c}{bd^3}\ \&c. \infty \dfrac{2c}{bd-b} \\
\qquad + \dfrac{3c}{bdd} + \dfrac{3c}{bd^3}\ \&c. \infty \dfrac{3c}{bdd-bd} \\
\qquad\quad + \dfrac{4c}{bd^3}\ \&c. \infty \dfrac{4c}{bd^3-bdd} \\
\qquad\qquad \&c. \infty \&c.
\end{array}\right\} H \infty \frac{cd^3}{b \text{ in } C:d-1}$$

quandoquidem haec series ad praeced. $\dfrac{c}{bd} + \dfrac{2c}{bdd} + \dfrac{3c}{bd^3}\ \&c. \infty \dfrac{cd}{b \text{ in } Q:d-1}$ se habeat ut dd ad $d-1$.

3. *Si Numeratores sunt juxta Pyramidales:*

Series resolvitur in aliam, cujus numeratores progrediuntur juxta Trigonales, quaeque ad praecedentem seriem se habet, ut d ad $d-1$: unde summa ejus invenitur $\infty \dfrac{cd^4}{b \text{ in } QQ:d-1}$. Generaliter, si propositae seriei numeratores sint juxta figuratos cujuslibet gradus, ejus summa se habebit ad summam similis seriei gradus praecedentis, ut d ad $d-1$: unde reliquarum omnium summam invenire proclive admodum est.

4. *Si Numeratores sunt juxta Quadratos:*

Series L resolvitur in aliam M, cujus numeratores sunt Arithmetice progressionales, adeoque juxta primam hypothesin:

$$L \infty \frac{c}{b} + \frac{4c}{bd} + \frac{9c}{bdd} + \frac{16c}{bd^3}\ \&c.$$

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{c}{b} + \dfrac{c}{bd} + \dfrac{c}{bdd} + \dfrac{c}{bd^3}\ \&c. \infty \dfrac{cd}{bd-b} \\
\quad + \dfrac{3c}{bd} + \dfrac{3c}{bdd} + \dfrac{3c}{bd^3}\ \&c. \infty \dfrac{3c}{bd-b} \\
\qquad + \dfrac{5c}{bdd} + \dfrac{5c}{bd^3}\ \&c. \infty \dfrac{5c}{bdd-bd} \\
\qquad\quad + \dfrac{7c}{bd^3}\ \&c. \infty \dfrac{7c}{bd^3-bdd} \\
\qquad\qquad \&c. \infty \&c.
\end{array}\right\} \begin{array}{l} M \infty \dfrac{cdd}{b \text{ in } Q:d-1} + \dfrac{2cdd}{b \text{ in } C:d-1} \\ \quad \infty \dfrac{cd^3+cdd}{b \text{ in } C:d-1} \end{array}$$

5. *Si Numeratores sunt juxta Cubos:*

Series resolvitur in aliam, cujus numeratores sunt Trigonalium sextupli unitate aucti; unde ejus summa juxta secundam hypothesin invenitur

$$\frac{cdd}{b \text{ in Q}:d-1} + \frac{6cd^3}{b \text{ in QQ}:d-1} \propto \frac{cd^4+4cd^3+cdd}{b \text{ in QQ}:d-1}.$$

Exempli loco sint series sequentes, Numeratorum

Naturalium	$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}+\frac{5}{32}$ &c. $\propto$ 2
Trigonalium	$\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{6}{8}+\frac{10}{16}+\frac{15}{32}$ &c. $\propto$ 4
Pyramidalium	$\frac{1}{2}+\frac{4}{4}+\frac{10}{8}+\frac{20}{16}+\frac{35}{32}$ &c. $\propto$ 8
Quadratorum	$\frac{1}{2}+\frac{4}{4}+\frac{9}{8}+\frac{16}{16}+\frac{25}{32}$ &c. $\propto$ 6
Cuborum	$\frac{1}{2}+\frac{8}{4}+\frac{27}{8}+\frac{64}{16}+\frac{125}{32}$ &c. $\propto$ 26.

Coroll. Patet, in omnibus hujusmodi seriebus postremos terminos in nihilum desinere, & evanescere debere (quod ipsum jam praeced. Prop. de earum una ex abundanti ostendimus); cum alias illarum summae finitae esse non possent.

XV. *Invenire summam seriei infinitae fractionum R, quarum numeratores constituunt seriem aequalium, denominatores vero Trigonalium, eorumve aequemultiplicium*[9].

Si a serie harmonice proportionalium N, eademmet multata primo termino P subtrahatur, exoritur nova series Q, cujus denominatores Trigonalium dupli sunt, cujusque adeo summa aequalis erit ipsi primo termino seriei Harmonicae N, per Ax. 3. Operatio talis:

9 Cf. Med. CXLI (p. 192 h.v.).

$$\begin{array}{llcl}
\text{A serie} & N \propto \frac{a}{c} + \frac{a}{2c} + \frac{a}{3c} + \frac{a}{4c} + \frac{a}{5c} \ \&c. & & \\
\text{subtracta series} & P \propto \frac{a}{2c} + \frac{a}{3c} + \frac{a}{4c} + \frac{a}{5c} + \frac{a}{6c} \ \&c. & \propto & N - \frac{a}{c} \\
\hline
\text{relinquit seriem} & Q \propto \frac{a}{2c} + \frac{a}{6c} + \frac{a}{12c} + \frac{a}{20c} + \frac{a}{30c} \ \&c. & \propto & \frac{a}{c} \\
\text{cujus duplum} & R \propto \frac{a}{c} + \frac{a}{3c} + \frac{a}{6c} + \frac{a}{10c} + \frac{a}{15c} \ \&c. & \propto & \frac{2a}{c}
\end{array}$$

series scil. fractionum proposita, quarum denominatores sunt numeri Trigonales, eorumve aeque-multiplices.

Observandum tamen[10], non sine cautela hac utendum esse methodo: Nam si a sequente serie S eadem demto primo termino T subtrahatur, prodibit[11] series Q, quae antea; nec tamen inde sequitur, summam seriei Q aequalem esse primo termino seriei $S \propto \frac{2a}{c}$. Cujus rei ratio est, quod, si a serie S subtrahitur series terminorum totidem T, in qua singuli termini postremum praecedentes singulos primum consequentes in altera destruunt, residuum, hoc est resultans series Q, evidenter debet adaequari primo termino seriei S minus ultimo ipsius T; adeoque ipsi primo seriei S absolute aequalis esse nequit, nisi tum cum ultimus ipsius T in nihilum desinit, uti quidem desinere perspicuum est in serie P vel N: at non evanescit pariter in serie T vel S, verum est $\propto \frac{a}{c}$, per X. Quin itaque potius summa seriei $Q \propto \frac{2a}{c} - \frac{a}{c} \propto \frac{a}{c}$, ut supra.

$$\begin{array}{ll}
S & \propto \frac{2a}{c} + \frac{3a}{2c} + \frac{4a}{3c} + \frac{5a}{4c} + \frac{6a}{5c} \ \&c. \\
T & \propto \frac{3a}{2c} + \frac{4a}{3c} + \frac{5a}{4c} + \frac{6a}{5c} + \frac{7a}{6c} \ \&c. \\
\hline
Q & \propto \frac{a}{2c} + \frac{a}{6c} + \frac{a}{12c} + \frac{a}{20c} + \frac{a}{30c} \ \&c. \propto \frac{2a}{c} - \frac{a}{c} \propto \frac{a}{c}
\end{array}$$

10 Cf. Med. CXLI, «NB.» (p. 192 h.v.).

11 Dans les *Opera*, on trouve «prodibit eadem series Q» (N.D.L.R.)

XVI. *Summa seriei infinitae harmonice progressionalium* $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$ *&c. est infinita*[12].

Id primus deprehendit Frater: inventa namque per praeced. summa seriei $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}$, &c. visurus porro, quid emergeret ex ista serie, $\frac{1}{2}+\frac{2}{6}+\frac{3}{12}+\frac{4}{20}+\frac{5}{30}$, &c. si resolveretur methodo prop. XIV, collegit propositionis veritatem ex absurditate manifesta, quae sequeretur, si summa seriei harmonicae finita statueretur. Animadvertit enim,

$$\begin{array}{lll}
\text{Seriem} & A, & \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}, \ \&c. \propto \\
 & & \text{(fractionibus singulis in alias, quarum} \\
 & & \text{numeratores sunt 1, 2, 3, 4, \&c. transmutatis)} \\
\text{seriei} & B, & \frac{1}{2}+\frac{2}{6}+\frac{3}{12}+\frac{4}{20}+\frac{5}{30}+\frac{6}{42}, \ \&c. \propto C+D+E+F, \ \&c.
\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{ll}
C & \frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}, \ \&c. \propto \text{per praec.} \ \frac{1}{1} \\
D & \ldots+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}, \ \&c. \propto C-\frac{1}{2} \propto \frac{1}{2} \\
E & \ldots\ldots+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}, \ \&c. \propto D-\frac{1}{6} \propto \frac{1}{3} \\
F & \ldots\ldots\ldots+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}, \ \&c. \propto E-\frac{1}{12} \propto \frac{1}{4} \\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad \&c. \propto \&c.
\end{array}\right\} \propto G;$$

unde sequitur, seriem $G \propto A$, totum parti, si summa finita esset.

Ego postmodum, cum indicasset, idem ostensive hunc in modum: Summa seriei infinitae harmonicae $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$, &c. superat datum quemvis numerum. Ergo infinita est, per II. Esto datus numerus N quantumcunque magnus:

12 Sur ce résultat et ses démonstrations, cf. Med. CXL, p. 191 h.v. (où se trouve donnée la seconde démonstration de Prop. XVI, ainsi que le corollaire 1) et Med. CXLIII, p. 195 h.v. (où le calcul est en fait le même que celui de Johann dans la première démonstration de Prop. XVI, confirmant la manière dont Johann était parvenu à son résultat). Cf. aussi *Introduction*, pp. 12–13 h.v., et la lettre de Johann à Leibniz du 1[er] décembre 1696 (Leibniz, *Math. Schriften* III, p. 339), où il commente comme suit les deux démonstrations de Prop. XVI, tout en y ajoutant une troisième: ...*mon frère en donna autrefois une longue et pénible démonstration directe* («apodictice») *après que je l'eusse démontré par l'absurde* («apagogice»).

Abscinde a principio seriei aliquot terminos, quorum summa aequet vel superet unam unitatem numeri N, & a serie reliqua iterum aliquos abscinde, quorum summa aliam unitatem numeri N superet, idque si fieri possit repete toties, quot in numero N sunt unitates; sic termini abscissi omnes superabunt totum numerum, multo magis igitur tota series eundem superabit. Si neges, abscissis aliquot reliquos unitatem superare posse, esto primus reliquorum, qui post abscissionem ultimam remanserunt, $\frac{1}{a}$, & sequentes $\frac{1}{a+1}$, $\frac{1}{a+2}$, $\frac{1}{a+3}$, &c. Constituatur ad duos primos terminos $\frac{1}{a}$ & $\frac{1}{a+1}$ Progressio Geometrica, cujus ideo singuli post secundum termini singulis respondentibus in Progressione Harmonica minores sunt ob denominatores majores, per IV. & continuetur haec[13] usque ad $\frac{1}{aa}$ (quod quidem fiet in terminis numero finitis propter a numerum finitum) eritque haec series Geometrica finita ∞ 1, per VIII. Harmonica itaque terminorum totidem superabit unitatem. Q.E.D.

Coroll. 1. In proposita serie initio sumto a quolibet termino, erunt ab illo deinceps omnes, usque ad illum, cujus locus designatur per quadratum numeri ordinis primi termini, simul sumti unitate majores: sic termini a 2do ad 4tum usque unitatem superant, hinc a 5to ad 25tum, hinc a 26 ad 676 (Q:26) hinc a 677 ad 458329 (Q:677) &c. Nam in Geometrica progressione termini his limitibus intercepti unitatem aequant; ergo in Harmonica superant, ubi & plures intercipiuntur & majores; majores quidem uti vidimus; plures, quia denominatores terminorum, cum sint minores quam in Geometrica per IV, tardius illos limites assequuntur.

13 Bernoulli s'exprime ici comme si la progression géométrique de premier terme $\frac{1}{a}$ et de second terme $\frac{1}{a+1}$ contenait un terme $\frac{1}{a^2}$ lorsqu'on la prolonge assez loin; mais il savait sûrement qu'il n'en est pas ainsi en général; il ne peut même jamais en être ainsi quand a, comme ici, est un entier. En réalité il suffit, pour la validité du raisonnement, de savoir que cette progression contient un terme $< \frac{1}{a^2}$ (cf. Prop. VI), car alors sa somme est > 1, comme il est facile de le vérifier; compte tenu de Prop. IV, on a l'inégalité

$$\sum_{n=a}^{a^2} \frac{1}{n} > 1,$$

comme il est dit au corollaire 1.

2. Patet, omnem aliam seriem harmonicam infinitam, summam quoque exhibere infinitam; ut ex.gr. si loco $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$ &c. proponatur $\frac{1}{1000}+\frac{1}{2000}+\frac{1}{3000}+\frac{1}{4000}$ &c. ubi singuli termini singulorum sibi respondentium in altera, adeoque & omnes omnium, sunt submillecupli: nam infiniti pars millesima & ipsa infinita est.

3. Summa seriei infinitae, cujus postremus terminus evanescit, quandoque finita est, quandoque infinita.

4. Sequitur etiam, si modo in Geometriam saltum facere permissum est, spatium Curva Hyperbolica & Asymptotis comprehensum infinitum esse: Secta intelligatur Asymptotos linea a centro A in partes aequales infinitas in punctis B, C, D, E, &c. e quibus ad curvam educantur rectae totidem alteri Asymptoton parallelae BM, CN, DO, EP, &c. & compleantur parallelogramma AM, BN, CO, DP, &c. quae ob basium aequalitatem inter se erunt, ut altitudines, seu ut rectae BM, CN, DO, EP, &c. hoc est, ut $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ &c. ex natura Hyperbolae; cum igitur summa $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$ &c. infinita ostensa sit, erit & summa Parallelogrammorum AM, BN, CO, DP &c. infinita, multoque magis spatium Hyperbolicum, quod Parallelogrammis illis circumscriptum est.

XVII. *Invenire summam serierum Leibnitzianarum, D, H, I, aliarumque quarum denominatores sunt numeri Quadrati aut Trigonales, minuti aliis Quadratis vel Trigonalibus*[14].

Cel. Leibnitius occasione mirabilis suae Quadraturae Circuli in principio Actorum Lips. publicatae[15], mentionem injicit summae quarundam serierum infinitarum, quarum denominatores constituunt seriem quadratorum unitate minutorum, dissimulato quo eam repererat artificio. En breviter totum mysterium:

A serie	$A \propto \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$ &c.	subtrahatur ipsamet
demtis duobus primis terminis,	$B \propto \frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}$ &c.	$\propto A-\frac{1}{1}-\frac{1}{2}$
relinquitur	$C \propto \frac{2}{3}+\frac{2}{8}+\frac{2}{15}+\frac{2}{24}+\frac{2}{35}$ &c.	$\propto A-B \propto \frac{1}{1}+\frac{1}{2} \propto \frac{3}{2}$
& propterea	$D \propto \frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\frac{1}{24}+\frac{1}{35}$ &c.	$\propto \frac{1}{2}C \propto \frac{3}{4}$.

14 Cf. Med. CXLII (pp. 193–194 h.v.).
15 G.W. Leibniz, *De vera proportione Circuli ad Quadratum circumscriptum in Numeris rationalibus*: AE Februarii 1682, pp. 41–46, e.p. pp. 45–46 (N.D.L.R.)

A serie .... $E \propto \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9}$ &c. subtrahatur eadem
demto primo
termino, ... $F \propto \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11}$ &c. $\propto E - 1$

relinquitur $G \propto \frac{2}{3} + \frac{2}{15} + \frac{2}{35} + \frac{2}{63} + \frac{2}{99}$ &c. $\propto E - F \propto 1$

& propterea ... $H \propto \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{63} + \frac{1}{99}$ &c. $\propto \frac{1}{2}G \propto \frac{1}{2}$,

& proinde etiam $I \propto \frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \frac{1}{48} + \frac{1}{80} + \frac{1}{120}$ &c. $\propto D - H \propto \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \propto \frac{1}{4}$.

Quod ipsum quoque sic ostenditur:

A serie .... $L \propto \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10}$ &c. subtrahatur eadem
demto primo
termino,....... $M \propto \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12}$ &c. $\propto L - \frac{1}{2}$

relinquitur $N \propto \frac{2}{8} + \frac{2}{24} + \frac{2}{48} + \frac{2}{80} + \frac{2}{120}$ &c. $\propto L - M \propto \frac{1}{2}$

& proinde .... $I \propto \frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \frac{1}{48} + \frac{1}{80} + \frac{1}{120}$ &c. $\propto \frac{1}{2}N \propto \frac{1}{4}$,
ut antea.

Memorabile autem prorsus est, quod summa seriei D,

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} + \frac{1}{35} + \frac{1}{48} + \frac{1}{63} \text{ \&c.}$$

(cujus denominatores sunt numeri quadrati 4, 9, 16, 25, 36, &c. unitate minuti) invenitur $\frac{3}{4}$, quin & excerptis per saltum alternis terminis, summa seriei H, $\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{63}$ &c. $\propto \frac{1}{2}$; at si ex hac iterum simplici saltu terminos loco pari positos excerpas, ut relinquatur $\frac{1}{3} + \frac{1}{35} + \frac{1}{99}$ &c. ejus seriei infinitae summa est vera magnitudo circuli nullo numero exprimibilis, sumto vid. quadrato diametri $\propto \frac{1}{2}$.

Caeterum generaliter invenire possumus summam cujuslibet seriei, cujus numeratores constituunt seriem aequalium, & denominatores seriem quadratorum minutorum communi aliquo quadrato Q, aut etiam seriem Trigonalium minutorum communi aliquo numero Trigonali T: si observemus, ejusmodi series nasci per subductionem seriei harmonicae truncatae ab initio tot terminis (quod indicat ibi duplum radicis quadratae communis quadrati Q, hic duplum unitate auctum radicis trigonalis numeri trigonalis T) a seipsa integra:

Ex.gr. ad inveniendam summam seriei D	$\frac{1}{7}+\frac{1}{16}+\frac{1}{27}+\frac{1}{40}+\frac{1}{55}$ &c.
cujus denominatores sunt quadrati,	16 , 25 , 36 , 49 , 64 , 81, &c.
minuti communi Quadrato Q	9 , 9 , 9 , 9 , 9 , 9,
(cujus Radix Q. 3, & duplum 6)	
	7 , 16 , 27 , 40 , 55 , 72, &c.

A serie .... A ꝏ $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}$ &c. subtrahatur

eadem multata
sex primis terminis B ꝏ $\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}$ &c.

---

relinquitur ...... C ꝏ $\frac{6}{7}+\frac{6}{16}+\frac{6}{27}+\frac{6}{40}+\frac{6}{55}+\frac{6}{72}$ &c. ꝏ $A-B$ ꝏ

$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}$ ꝏ $2\frac{9}{20}$

adeoque .... D ꝏ $\frac{1}{7}+\frac{1}{16}+\frac{1}{27}+\frac{1}{40}+\frac{1}{55}+\frac{1}{72}$ &c. ꝏ $\frac{1}{6}C$ ꝏ $\frac{49}{120}$.

Rursus pro invenienda summa seriei E,	$\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{15}+\frac{1}{22}+\frac{1}{30}+\frac{1}{39}$ &c.
cujus denominatores sunt Trigonales	10 , 15 , 21 , 28 , 36 , 45, &c.
minuti communi Trigonali T	6 , 6 , 6 , 6 , 6 , 6,
(cujus Radix Trigon. 3 & duplum unitate auctum 7)	4 , 9 , 15 , 22 , 30 , 39, &c.

A serie ... A ꝏ $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}$ &c. subtrahatur eadem truncata septem primis terminis

F ꝏ $\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}$ &c.

---

relinquitur G ꝏ $\frac{7}{8}+\frac{7}{18}+\frac{7}{30}+\frac{7}{44}+\frac{7}{60}+\frac{7}{78}+\frac{7}{98}$ &c. ꝏ $A-F$ ꝏ

$\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}$ ꝏ $\frac{363}{140}$

adeoque .. E ꝏ $\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{15}+\frac{1}{22}+\frac{1}{30}+\frac{1}{39}+\frac{1}{49}$ &c. ꝏ $\frac{2}{7}G$ ꝏ $\frac{363}{490}$.

Atque ita per hanc Propositionem inveniri possunt summae serierum, cum denominatores sunt vel numeri Trigonales minuti alio Trigonali, vel Quadrati minuti alio Quadrato; ut & per XV, quando sunt puri Trigonales, ut in serie $\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}$ &c. at, quod notatu dignum, quando sunt puri Quadrati, ut in serie $\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}$ &c. difficilior est, quam quis expectaverit, summae pervestigatio, quam tamen finitam esse, ex altera, qua manifesto minor est, colligimus: Si quis inveniat nobisque communicet, quod industriam nostram elusit hactenus, magnas de nobis gratias feret[16].

Hoc saltem monere adhuc liceat, quod spatium Hyperboloide Cubicali (cujus natura exprimitur per aequationem $xxy \infty aab$, hoc est, in qua Quadrata abscissarum ex Asymptotis sunt in applicatarum ratione reciproca) & Asymptotis suis comprehensum, eodem modo ex finita hujus seriei summa finitum esse demonstrari possit, quo simile spatium in ipsa Hyperbola ex infinita seriei Harmonicae summa infinitum ostensum est.

16 Ici une note de G. Cramer, dans les *Opera* de 1744, pp. 398–399, fait état de la solution du problème *par Euler, Johann et Nicolaus Bernoulli.* En fait, comme Cramer ne pouvait manquer de le savoir, la priorité de la découverte (qui fit sensation à son époque) revenait sans conteste à Euler; celui-ci l'avait communiquée en décembre 1735 à l'Académie de Saint-Pétersbourg, et peu après, sans doute, à son ami Daniel Bernoulli à Bâle (N.D.L.R.: Euler – Dan. B., 26.4.1738; cf. Euler, *Opera Omnia* IV/1, p. 23), qui à son tour en avait fait part à son père Johann, à son cousin Nicolaus I, et peut-être à Cramer lui-même; mais il est vrai qu'au vu du résultat d'Euler, Johann, puis Nicolaus n'avaient guère tardé à en retrouver des démonstrations; sur tout ceci, cf. P.-H. Fuss, *Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres...*, t. II, St.-Pétersbourg 1843, pp. 15–16; 435; 445; 682–684.
Voici au surplus, en notation moderne, comment Cramer (loc. cit.) présente la démonstration d'Euler (*indirecte il est vrai*, dit-il, *mais admirable par sa brièveté*). Soit $f(x) = \frac{\sin x}{x}$; en vertu de la série connue pour le sinus, on a

$$f\left(z^{-\frac{1}{2}}\right) = 1 - \frac{1}{6z} + \frac{1}{120z^2} - \text{etc.}$$

Or, dit Cramer, *dans toute équation algébrique de la forme*

$$1 - \frac{a}{z} + \frac{b}{z^2} - \ldots = 0$$

ordonnée suivant les puissances descendantes de l'inconnue, la somme des racines est a; ce résultat, appliqué à l'équation $f\left(z^{-\frac{1}{2}}\right) = 0$ dont les racines sont $\frac{1}{\pi^2}, \frac{1}{4\pi^2}, \frac{1}{9\pi^2}$, etc., donne bien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Bien entendu, le point faible de ce raisonnement est que $f\left(z^{-\frac{1}{2}}\right) = 0$ n'est pas une équation algébrique; cf. A. Weil, *Number Theory. An approach through history*, Boston 1983, pp. 261–265.

ΕΠΙΜΕΤΡΑ.

I.

Sicut nec corpus infinitum, ita nec atomum dari posse credo, sed utrumque nudam mentis fictionem esse puto, quae, postquam corpus corpori aliquandiu addidit ademitve, pertaesa tandem operationis sine fine repetendae, omnes multiplicationes vel divisiones uno immani saltu transilit, ultimamque jam factam esse, quam tamen unquam fieri repugnat, προληπτικῶς supponit.

II.

Vacuum, eo modo quo concipi a nobis solet, necessario datur.

III.

Hinc vacui metus inepte naturae affingitur, nec ullius phaenomeni naturalis causa esse potest.

IV.

Fluviorum alvei non possunt esse perfecte horizontales, sed requiritur in illis ad minimum unius pedis declivitas in milliari: unde & fluminum ostia ipsorum scaturiginibus, Oceanus & loca maritima regionibus mediterraneis necessario depressiora sunt.

V.

Hinc vero non levis controversia, qua vi aquae ex Oceano in altissimorum montium cacumina revehantur: frustra saltem illi sunt, qui existimant, hoc ad eundem modum per angustos terrae meatus & canaliculos fieri posse, quo videmus, liquorem intra graciliores fistulas altius assurgere, quam consistit externi liquoris superficies.

VI.

Solutio quaestionum circa figuram & situm Iridis[17]*, quam antehac in rore prati conspexit* Christ. Menzelius, *ut refert in Ephem. Nat. Curios.*[18] *An. 1686 & qua in re omnium cujusque loci Mathematicorum opem implorat, facilis est nulloque Archimede indiget.*

Nam I. *si Solis altitudo* < 42 *gr. Iris apparebit Hyperbolica: si* ∞ 42 *gr. Parabolica: si* > 42, *Elliptica: si* 90, *Circularis.*

II. *Axis Iridis perpetuo est in linea umbrae intuentis hominis.*

III. *Elevatione oculi supra terrae planitiem sumta pro radio, distantia proximi verticis Coni sectionis a loco stationis, est Tangens differentiae inter* 48 *gr. & arcum elevat. Solis, numeranda a facie, ubi* 48 > *elev. solis; a tergo, ubi* <.

IV. *Latus rectum in omni casu est duplum Tangentis* 42 *graduum.*

V. *Transversum, in Hyperbola, Aggregatum ex Tangente summae & Tangente differentiae* 48 *gr. & elevationis solis: in Ellipsi, existente elevatione solis* > 48 *gr. Aggregatum ex Tangente summae & Tang. diff.* 42 *gr. & compl. altitudinis solis; existente vero elev. solis* < 48, *Differentia earundem.*

VII.

Lineam Spiralem Archimedeam dimidiam esse peripheriae sui circuli, male asserit Cl. Sturmius *in Mathesi sua Enucleata*[19].

VIII.

Agrimensoriam nisi Geometriae peritus rite exercere non potest; unde in Rebusp. non citra insigne praejudicium ejus cura illiteratis & plebejis committi solet.

17 Cette explication de l'«Iris», c'est-à-dire de l'arc-en-ciel, qui apparaît dans les gouttes de rosée, est basée, bien entendu, sur celle que Descartes avait donnée en 1637 de l'arc-en-ciel ordinaire (*Météores*, Discours VIII: *Œuvres* (A.T.), t. VI, pp. 325–344); c'est à Descartes, dont la théorie est ici supposée connue, que Bernoulli emprunte la valeur 42° du rayon angulaire de l'arc-en-ciel.

18 Christian Mentzel, *De Iride Solari in planitie terrae & Arachnio meteoro*: Miscellanea Curiosa sive Ephemeridum Medico-Physicarum Germanicarum Academiae Naturae Curiosorum Decuriae II Annus Quintus, Norimbergae 1687, Observatio CXXXIV, pp. 273–277 (N.D.L.R.)

19 Johann Christoph Sturm, *Mathesis Enucleata*, Norimbergae 1689. Dans la 2^e^ édition *multo emendatior* (Norimbergae 1695), la proposition critiquée par Bernoulli est le *Consectarium 2* de la *Proposition XVII*, p. 292 (N.D.L.R.)

ꓮD DN. RESPONDENTEM
PRÆSES.

UT non-finitam ſeriem finita coërcet
  Summula , & in nullo limite limes adeſt:
Sic modico immenſi veſtigia Numinis hærent
  Corpore, & anguſto limite limes abeſt.
Cernere in immenſo parvum, dic, quanta voluptas!
  In parvo immenſum cernere, quanta, Deum!

FINIS.

AD DN. RESPONDENTEM
PRAESES.[20]

Ut non-finitam seriem finita coërcet
  Summula, & in nullo limite limes adest:
Sic modico immensi vestigia Numinis haerent
  Corpore, & angusto limite limes abest.
Cernere in immenso parvum, dic, quanta voluptas!
  In parvo immensum cernere, quanta, Deum!

FINIS.

20 Voici une faible traduction de l'élégant poème de Bernoulli: *Comme une série infinie est enfermée dans une somme finie – comme dans l'illimité apparaît la limite – ainsi, dans un corps de petite taille, se retrouvent les traces de l'immense Divinité – et dans d'étroites limites la limite est absente. Dans l'immense voir le petit, oh, quelle volupté! Quelle volupté de voir, dans le petit, l'immensité de Dieu!* (Trad. A.W.)

Op. LIV

Positionum de Seriebus Infinitis
Pars Altera

Basileae, Typis Joh. Conradi a Mechel 1692 [UB Basel Kd III 17,7] – Jac. B. Opera, pp. 517–542

DEO
PATRIAE
PARENTIBUS
FAUTORIBUS
AMICIS
Sacrum.

Cum ea, quae de Seriebus Infinitis ante hoc triennium, & quod excurrit, speculati fuimus, uni etiamnum alterive paginae commaculandae sufficerent, placuit primae de illis Disputationi secundam hanc attexere, quam ex abrupto ordior, continuatis Propositionum numeris, ut eo commodius earum citatio peragatur.

XVIII. *Invenire summam seriei infinitae reciprocae numerorum Trigonalium, Pyramidalium, Trianguli-Pyramidalium, Pyramidi-Pyramidalium, & figuratorum altioris cujusvis gradus in infinitum: atque infinitarum summarum summam*[1].

1. Quemadmodum si a serie fractionum harmonice progressionalium, hoc est, serie reciproca numerorum naturalium A, eadem multata primo termino subtrahatur, nascitur series fractionum, quarum numeratores sunt *unitates*, denominatores *trigonalium dupli*; ut patet ex demonstr. XV. Ita si a serie reciproca trigonalium B, eadem truncata primo termino subducatur, exoritur series fractionum, quarum numeratores progrediuntur juxta numeros naturales 2, 3, 4, 5, &c. sed quae reducuntur ad fractiones, quarum omnium numeratores sunt *binarii*, denominatores vero *pyramidalium tripli*; unde ipsa series ad seriem reciprocam pyramidalium C, ut $\frac{2}{3}$ ad 1. Pariter si a serie hac reciproca pyramidalium, ipsamet mutilata primo termino subducatur, relinquitur series fractionum, quarum numeratores progrediuntur juxta numeros trigonales 3, 6, 10, 15, &c. sed quae reduci possunt ad alias, quarum numeratores omnes sunt *ternarii*, denominatores vero *trianguli-pyramidalium quadrupli*, unde ipsa series ad seriem reciprocam trianguli-pyramidalium D, ut $\frac{3}{4}$ ad 1: Et sic deinceps in infinitum. Quocirca cum singulae hae per subductionem genitae series, quarum numeratores sunt unitatum, denominatores figuratorum multipli, per Ax. 3

1 Cf. Med. CXLVIII (p. 199 h.v.).

aequipolleant unitati, ipsae figuratorum series reciprocae ordine dabunt summas, ut sequitur:

A. Natur:	$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}$ &c. $\infty\ \frac{1}{0}\ \infty\ 1\frac{1}{0}$,	per XVI.
B. Trigon:	$\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21}$ &c. $\infty\ \frac{2}{1}\ \infty\ 1\frac{1}{1}$,	per XV.
C. Pyramid:	$\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{10}+\frac{1}{20}+\frac{1}{35}+\frac{1}{56}$ &c. $\infty\ \frac{3}{2}\ \infty\ 1\frac{1}{2}$.	
D. Triang. Pyr:	$\frac{1}{1}+\frac{1}{5}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{70}+\frac{1}{126}$ &c. $\infty\ \frac{4}{3}\ \infty\ 1\frac{1}{3}$.	
E. Pyr. Pyr.	$\frac{1}{1}+\frac{1}{6}+\frac{1}{21}+\frac{1}{56}+\frac{1}{126}+\frac{1}{252}$ &c. $\infty\ \frac{5}{4}\ \infty\ 1\frac{1}{4}$.	

2. Summae hae a secunda serie ordine collectae sunt $1\frac{1}{1}$, $1\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{3}$, $1\frac{1}{4}$, &c.; unde summa summarum est $1\frac{1}{1}+1\frac{1}{2}+1\frac{1}{3}+1\frac{1}{4}+$ &c. quae infinita est: quin & demtis singularum serierum primis terminis seu unitatibus, summa fit $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+$ &c: quae itidem infinita existit, per XVI: at demtis insuper secundis terminis $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}$ &c. summa evadit finita & aequalis $1+\frac{1}{2}\ \infty\ \frac{3}{2}$ per Ax. 3.

XIX. *Invenire summam seriei finitae reciprocae Trigonalium, Pyramidalium, Trianguli-Pyramidalium, Pyram.-Pyramidalium, & figuratorum altioris cujusvis gradus in infinitum*[2].

Posito in qualibet serie numero terminorum n, postremi termini in seriebus directis numerorum naturalium, trigon., pyramid. (per ea quae demonstrabuntur alibi[3]) sunt ordine hi, qui sequuntur: (denotantibus hic & ubique punctulis continuam multiplicationem quantitatum, quibus interseruntur.)

$$n,\ \frac{n\cdot n+1}{1\cdot 2},\ \frac{n\cdot n+1\cdot n+2}{1\cdot 2\cdot 3},\ \frac{n\cdot n+1\cdot n+2\cdot n+3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4},\ \text{\&c.}$$

& qui hos immediate excipiunt, sunt isti:

$$n+1,\ \frac{n+1\cdot n+2}{1\cdot 2},\ \frac{n+1\cdot n+2\cdot n+3}{1\cdot 2\cdot 3},\ \frac{n+1\cdot n+2\cdot n+3\cdot n+4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4},\ \text{\&c.}$$

2 Cf. Med. CXLIX (pp. 200–201 h.v.).

3 C'est là, bien certainement, une allusion à l'*Ars Conjectandi*, qui, en 1692, était peut-être déjà en chantier, et du moins en projet. Cf. *Werke* 3, pp. 157–168 et 23–24; cf. aussi Op. XXIV, pp. 149–150 h.v.

ac propterea erunt ultimi termini in eorundem seriebus reciprocis isti:

$$\frac{1}{n},\ \frac{1\cdot 2}{n\cdot n{+}1},\ \frac{1\cdot 2\cdot 3}{n\cdot n{+}1\cdot n{+}2},\ \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{n\cdot n{+}1\cdot n{+}2\cdot n{+}3},\ \text{\&c.}$$

& qui hos immediate sequuntur,

$$\frac{1}{n{+}1},\ \frac{1\cdot 2}{n{+}1\cdot n{+}2},\ \frac{1\cdot 2\cdot 3}{n{+}1\cdot n{+}2\cdot n{+}3},\ \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{n{+}1\cdot n{+}2\cdot n{+}3\cdot n{+}4},\ \text{\&c.}$$

Jam si a qualibet serie reciproca eadem ipsa truncata ab initio & aucta in fine uno termino methodo Prop. XV subtrahatur, subducto sigillatim secundo termino a primo, tertio a secundo, sequente ultimum ab ultimo, nascitur series terminorum totidem, quae per ea quae in praeced. Prop. dicta sunt, seriei reciprocae figuratorum gradus sequentis aut subdupla est, aut subsesquialtera, aut subsesquitertia, &c. atque insuper per observata Prop. XV aequalis primo termino minus sequente ultimum ejus seriei, per cujus subductionem nata fuit: unde ipsa summa seriei finitae reciprocae figuratorum quorumcunque obtinetur facile, ut sequitur:

B. Trigon: $\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}$ &c. usque ad $\frac{1\cdot 2}{n\cdot n{+}1}$

$$\infty\ \frac{2}{1}-\frac{2}{1}\text{in}\frac{1}{n{+}1}\qquad \infty\ \frac{2}{1}-\frac{2}{n{+}1}$$

C. Pyram. $\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{10}+\frac{1}{20}$ &c. .... $\frac{1\cdot 2\cdot 3}{n\cdot n{+}1\cdot n{+}2}$

$$\infty\ \frac{3}{2}-\frac{3}{2}\text{in}\frac{1\cdot 2}{n{+}1\cdot n{+}2}\qquad \infty\ \frac{3}{2}-\frac{1\cdot 3}{n{+}1\cdot n{+}2}$$

D. $\triangle$.Pyr. $\frac{1}{1}+\frac{1}{5}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}$ &c. .... $\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{n\cdot n{+}1\cdot n{+}2\cdot n{+}3}$

$$\infty\ \frac{4}{3}-\frac{4}{3}\text{in}\frac{1\cdot 2\cdot 3}{n{+}1\cdot n{+}2\cdot n{+}3}\ \infty\ \frac{4}{3}-\frac{1\cdot 2\cdot 4}{n{+}1\cdot n{+}2\cdot n{+}3}$$

E. Py.Pyr. $\frac{1}{1}+\frac{1}{6}+\frac{1}{21}+\frac{1}{56}$ &c. .... $\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{n\cdot n{+}1\cdot\ldots\cdot n{+}4}$

$$\infty\ \frac{5}{4}-\frac{5}{4}\text{in}\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{n{+}1\cdot\ldots\cdot n{+}4}\qquad \infty\ \frac{5}{4}-\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 5}{n{+}1\cdot\ldots\cdot n{+}4}.$$

XX. *Invenire summam seriei infinitae reciprocae Trigonalium, Pyramidalium, Triang. Pyramidalium, &c. multatae terminis initialibus quotlibet: & infinitarum summarum summam.*

1. Summa seriei infinitae integrae Trigonalium, Pyramidalium, Triang. Pyramidalium, &c. est $\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}$, &c. per XVIII; si ex unaquaque serie ab initio abscindantur n termini, summa abscissorum est

$$\frac{2}{1}-\frac{2}{n+1},\ \frac{3}{2}-\frac{1\cdot 3}{n+1\cdot n+2},\ \frac{4}{3}-\frac{1\cdot 2\cdot 4}{n+1\cdot n+2\cdot n+3},$$

$$\frac{5}{4}-\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 5}{n+1\cdot n+2\cdot n+3\cdot n+4},\ \text{\&c.} \qquad \text{per XIX;}$$

subtracta ergo hac a summa omnium, erit summa reliquorum

$$\frac{2}{n+1},\ \frac{1\cdot 3}{n+1\cdot n+2},\ \frac{1\cdot 2\cdot 4}{n+1\cdot n+2\cdot n+3},\ \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 5}{n+1\cdot n+2\cdot n+3\cdot n+4},\ \text{\&c.}$$

2. Summa serierum omnium mutilatarum seu nullo seu uno termino est infinita, duobus terminis est $\frac{3}{2}$ per XVIII. Hinc si demas tertios terminos (qui constituunt seriem trigonalium B truncatam duobus terminis, cujus summa per eandem est $\frac{2}{3}$) erit reliquorum omnium summa $\frac{3}{2}-\frac{2}{3} \infty \frac{5}{6} \infty \frac{5}{2\cdot 3}$. Hinc denuo si quartos terminos auferas (qui formant seriem pyramidalium C itidem truncatam duobus terminis, summamque proin per praec. efficiunt $\frac{2}{8}$) relinquetur caeterorum omnium summa $\frac{5}{6}-\frac{2}{8} \infty \frac{7}{12} \infty \frac{7}{3\cdot 4}$. Hinc iterum si quintos terminos reseces, exibit caeterorum summa $\frac{9}{4\cdot 5}$; si sextos, $\frac{11}{5\cdot 6}$; septimos, $\frac{13}{6\cdot 7}$; &c: adeoque universaliter si ex unaquaque serie tollantur n termini, erit mutilatarum ita serierum omnium summa reliqua $\frac{2n-1}{n-1\cdot n}$.

Coroll. Series $\frac{2}{n+1}+\frac{1\cdot 3}{n+1\cdot n+2}+\frac{1\cdot 2\cdot 4}{n+1\cdot n+2\cdot n+3}+\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 5}{n+1\cdot n+2\cdot n+3\cdot n+4}+$ &c. sive,

$$\frac{2}{1}\text{in}\frac{1}{n+1}+\frac{3}{2}\text{in}\frac{1\cdot 2}{n+1\cdot n+2}+\frac{4}{3}\text{in}\frac{1\cdot 2\cdot 3}{n+1\cdot n+2\cdot n+3}+\frac{5}{4}\text{in}\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{n+1\cdot \ldots \cdot n+4}+\text{\&c.} \infty \frac{2n-1}{n-1\cdot n}:$$

singula enim seriei hujus membra singulas figuratarum serierum mutilatarum summas exprimunt, per 1. part. hujus; adeoque & omnia omnium.

POSITIONUM ARITHMETICARUM
DE
SERIEBUS
INFINITIS
Earumq;
SUMMA FINITA
PARS ALTERA,
Quam
DIVINI NUMINIS AUXILIO
Ac
Magn. & Sap. Philos. Ordinis indultu
PRÆSIDE
JACOBO BERNOULLI,
Math. P. P. & Fac. Art. p. t. Dec.
Pro viriIi defendendam suscipit
HIERONYMUS BECKIUS, Basil.
Magist. Candid.
Ad diem VI *Novembr. M DC XCII. horis locoq; consuetis.*

BASILEÆ,
Typis JOHANN. CONRADI à MECHEL.

Titre de l'édition originale de Op. LIV

XXI. *Seriei hujus,* $\frac{1a}{1\cdot 2}+\frac{2a}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{3a}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\frac{4a}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+$ &c: *hoc est,* $\frac{a}{2}+\frac{a}{1\cdot 3}+\frac{a}{1\cdot 2\cdot 4}+\frac{a}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 5}+$ &c: *summam invenire.*

Series haec nascitur subductione sequentis seriei,

$$\frac{a}{1}+\frac{a}{1\cdot 2}+\frac{a}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{a}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\text{\&c:}$$

multatae primo termino a seipsa integra, methodo Prop. XV, quare ejus summa ∞ a, primo sc. termino hujus, per Axioma 3.

Coroll: Hinc $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{4}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{9}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\frac{16}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+$ &c:

($\infty F+G+H+I+$&c:)

$\infty \frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+$ &c:

$$\begin{array}{lllll}
\text{Nam } F. & \frac{1}{1\cdot2}+\frac{2}{1\cdot2\cdot3}+\frac{3}{1\cdot2\cdot3\cdot4}+\frac{4}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}+\text{\&c: } \infty\ \frac{1}{1} & & & \text{per XXI.}\\
G. & +\frac{2}{1\cdot2\cdot3}+\frac{3}{1\cdot2\cdot3\cdot4}+\frac{4}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}+\text{\&c: } \infty\ F & -\frac{1}{1\cdot2} & \infty\ \frac{1}{1\cdot2} & \\
H. & +\frac{3}{1\cdot2\cdot3\cdot4}+\frac{4}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}+\text{\&c: } \infty\ G & -\frac{2}{1\cdot2\cdot3} & \infty\ \frac{1}{1\cdot2\cdot3} & \\
I. & +\frac{4}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}+\text{\&c: } \infty\ H & -\frac{3}{1\cdot2\cdot3\cdot4} & \infty\ \frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4} &
\end{array}$$

XXII. *Invenire summas serierum K, L, M, N, quarum numeratores sunt Arithmetice progressionales, denominatores Trigonalium integrorum aut Quadratorum unitate minutorum quadrata*[4].

$$K\ \infty\ \frac{3}{\square 1}+\frac{5}{\square 3}+\frac{7}{\square 6}+\frac{9}{\square 10}+\frac{11}{\square 15}+\frac{13}{\square 21}+\text{\&c.}$$
$$L\ \infty\ \frac{2}{\square 3}+\frac{3}{\square 8}+\frac{4}{\square 15}+\frac{5}{\square 24}+\frac{6}{\square 35}+\frac{7}{\square 48}+\text{\&c.}$$
$$M\ \infty\ \frac{1}{\square 3}+\frac{2}{\square 15}+\frac{3}{\square 35}+\frac{4}{\square 63}+\frac{5}{\square 99}+\frac{6}{\square 143}+\text{\&c:}$$
$$N\ \infty\ \frac{3}{\square 8}+\frac{5}{\square 24}+\frac{7}{\square 48}+\frac{9}{\square 80}+\frac{11}{\square 120}+\frac{13}{\square 168}+\text{\&c:}$$

4 Cf. Med. CXLIII (p. 195 h.v.).

Per subductionem seriei $\frac{1}{\square 1}+\frac{1}{\square 2}+\frac{1}{\square 3}+\frac{1}{\square 4}+\frac{1}{\square 5}+\frac{1}{\square 6}+$ &c. mutilatae primo termino a seipsa integra nascitur series aliqua, cujus termini sunt subquadrupli terminorum respondentium seriei K; unde per Ax. 3 series $K \infty 4 \text{in} \frac{1}{\square 1} \infty 4$.

Per subductionem vero ejusdem seriei mutilatae duobus primis terminis a seipsa integra oritur series, quae quadrupla est seriei L; unde per id. Ax. series $L \infty \frac{1}{4} \text{in:} \frac{1}{\square 1}+\frac{1}{\square 2} \infty \frac{5}{16}$.

Denique per subductionem seriei $\frac{1}{\square 1}+\frac{1}{\square 3}+\frac{1}{\square 5}+\frac{1}{\square 7}+\frac{1}{\square 9}+$ &c. multatae primo termino a seipsa integra emergit alia, quae octupla est seriei M, quare per 3. Ax. series $M \infty \frac{1}{8} \text{in} \frac{1}{\square 1} \infty \frac{1}{8}$: & propterea duplum seriei M, hoc est, omnes termini locorum imparium seriei $L \infty \frac{1}{4}$; adeoque reliqui termini ejusdem seriei, hoc est, ipsa series $N \infty \frac{5}{16}-\frac{1}{4} \infty \frac{1}{16}$.

XXIII. *Invenire summas serierum Q & R, item V & X, &c. quarum denominatores sunt termini integri progressionis quadruplae, noncuplae, &c. numeratores vero termini progressionis duplae, triplae, &c. unitate tum minuti, tum aucti.*

Operatio talis:

$$\left.\begin{array}{llllll} O \infty \frac{1}{1} & +\frac{1}{2} & +\frac{1}{4} & +\frac{1}{8} & +\frac{1}{16} & +\text{\&c:} \infty 2 \\ P \infty \frac{1}{1} & +\frac{1}{4} & +\frac{1}{16} & +\frac{1}{64} & +\frac{1}{256} & +\text{\&c:} \infty \frac{4}{3} \end{array}\right\} \text{per Cor. VIII.}$$

$$Q \infty \frac{1-1 \infty 0}{1}+\frac{2-1 \infty 1}{4}+\frac{4-1 \infty 3}{16}+\frac{8-1 \infty 7}{64}+\frac{16-1 \infty 15}{256}+\text{\&c.}$$

$$\infty O-P \infty 2-\frac{4}{3} \infty \frac{2}{3}$$

$$R \infty \frac{1+1 \infty 2}{1}+\frac{2+1 \infty 3}{4}+\frac{4+1 \infty 5}{16}+\frac{8+1 \infty 9}{64}+\frac{16+1 \infty 17}{256}+\text{\&c.}$$

$$\infty O+P \infty 2+\frac{4}{3} \infty \frac{10}{3}$$

$$\left.\begin{array}{l} S \infty \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \&c\text{:} \infty \frac{3}{2} \\ T \infty \frac{1}{1} + \frac{1}{9} + \frac{1}{81} + \frac{1}{729} + \frac{1}{6561} + \&c. \infty \frac{9}{8} \end{array}\right\} \text{per Coroll. VIII.}$$

$$V \infty \frac{1-1\infty 0}{1} + \frac{3-1\infty 2}{9} + \frac{9-1\infty 8}{81} + \frac{27-1\infty 26}{729} + \frac{81-1\infty 80}{6561} + \&c.$$

$$\infty\ S-T \infty \frac{3}{2} - \frac{9}{8} \infty \frac{3}{8}$$

$$X \infty \frac{1+1\infty 2}{1} + \frac{3+1\infty 4}{9} + \frac{9+1\infty 10}{81} + \frac{27+1\infty 28}{729} + \frac{81+1\infty 82}{6561} + \&c.$$

$$\infty\ S+T \infty \frac{3}{2} + \frac{9}{8} \infty \frac{21}{8}$$

Idem inveniri potest, resolvendo series propositas Q, R; V & X methodo Prop. XIV. Exempli loco esto series

$$Q \ \infty \frac{1}{4} + \frac{3}{16} + \frac{7}{64} + \frac{15}{256} + \ \&c. \infty \ Y + Z + \Pi + \Sigma + \&c.$$

$$\left.\begin{array}{llll} Y & \infty \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \ \&c. \infty \text{ per Cor. VIII.} & & \frac{1}{3} \\ Z & \infty \quad + \frac{2}{16} + \frac{2}{64} + \frac{2}{256} + \ \&c. \infty \ 2Y - \frac{2}{4} \infty & \frac{2}{3} - \frac{2}{4} & \infty \frac{1}{6} \\ \Pi & \infty \ \ldots\ldots + \frac{4}{64} + \frac{4}{256} + \ \&c. \infty \ 2Z - \frac{4}{16} \infty & \frac{2}{6} - \frac{4}{16} & \infty \frac{1}{12} \\ \Sigma & \infty \ \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{8}{256} + \ \&c. \infty \ 2\Pi - \frac{8}{64} \infty & \frac{2}{12} - \frac{8}{64} & \infty \frac{1}{24} \\ \&c. & \infty \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ \&c. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \infty \ \&c. \end{array}\right\} \frac{2}{3} \text{ per Cor. VIII.}$$

XXIV. *In serie quavis infinita, cujus numeratores omnes sunt aequales, denominatores vel numeri naturales, vel eorundem quadrata, cubi, aut alia quaecunque potestas, summa terminorum omnium in locis imparibus est ad summam omnium in paribus, ut similis potestas binarii unitate multata ad unitatem.*

Puta in numeris naturalibus, ut 1 ad 1; in quadratis ut 3 ad 1; in cubis ut 7 ad 1; in biquadratis ut 15 ad 1; &c.

Modus investigandi talis:

In Numeris Naturalibus:

Series ista $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+$ &c. aequatur suis partibus, videl. seriebus $A+B+C+D+$&c.

$$\left.\begin{array}{l} A \propto \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\text{\&c.} \propto \frac{2}{1} \\ B \propto \frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}+\text{\&c.} \propto \frac{2}{3} \\ C \propto \frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{20}+\frac{1}{40}+\text{\&c.} \propto \frac{2}{5} \\ D \propto \frac{1}{7}+\frac{1}{14}+\frac{1}{28}+\frac{1}{56}+\text{\&c.} \propto \frac{2}{7} \end{array}\right\} \text{per Cor. VIII.}$$

Est ergo $\frac{2}{1}+\frac{2}{3}+\frac{2}{5}+\frac{2}{7}+$ &c. aequalis, ideoque $\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+$ &c. dimidia seriei propositae $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+$ &c. hoc est, summa terminorum in locis imparibus dimidia seriei totius, & proinde aequalis summae reliquorum $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+$ &c.

Patet hinc rursum veritas Prop. XVI; cum enim $\frac{1}{1}>\frac{1}{2}, \frac{1}{3}>\frac{1}{4}, \frac{1}{5}>\frac{1}{6}$, &c. erit $\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+$ &c. $>\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+$ &c. cui tamen aequalis modo ostensa est; quae utique conciliari nequeunt, nisi summa utriusque seriei statuatur infinita, hoc est, tanta ut quae inter illas intercedit differentia, rationem aequalitatis destruere non possit.

In Numeris Quadratis:

Series $\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+\frac{1}{49}+\frac{1}{64}+$ &c. $\propto E+F+G+H+$ &c.

$$\left.\begin{array}{l} E \propto \frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\text{\&c.} \propto \frac{4}{3\cdot 1} \\ F \propto \frac{1}{9}+\frac{1}{36}+\frac{1}{144}+\frac{1}{576}+\text{\&c.} \propto \frac{4}{3\cdot 9} \\ G \propto \frac{1}{25}+\frac{1}{100}+\frac{1}{400}+\frac{1}{1600}+\text{\&c.} \propto \frac{4}{3\cdot 25} \\ H \propto \frac{1}{49}+\frac{1}{196}+\frac{1}{784}+\frac{1}{3136}+\text{\&c.} \propto \frac{4}{3\cdot 49} \end{array}\right\} \text{per Cor. VIII.}$$

Est ergo $\frac{4}{3\cdot 1}+\frac{4}{3\cdot 9}+\frac{4}{3\cdot 25}+\frac{4}{3\cdot 49}+$ &c. $\propto \frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+$ &c. adeoque prioris subsesquitertia, hoc est, $\frac{1}{1}+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}+$ &c. aequalis $\frac{3}{4}$ posterioris, hoc est, termini omnes locorum imparium in serie proposita constituunt tres quartas partes totius seriei, & reliqui unam: quare summa terminorum illorum ad summam horum, ut 3 ad 1.

Eadem investigandi methodus observetur in reliquis potestatibus.

Aliter & universaliter ita:

$$\begin{array}{rl} x \propto & \frac{1}{1^m}+\frac{1}{2^m}+\frac{1}{3^m}+\frac{1}{4^m}+\frac{1}{5^m}+\frac{1}{6^m} \quad \&c. \\ y \propto & \frac{1}{1^m} \qquad +\frac{1}{3^m} \qquad +\frac{1}{5^m} \qquad \&c. \\ \hline x-y \propto & +\frac{1}{2^m}\left(\frac{1}{2^m 1^m}\right)+\frac{1}{4^m}\left(\frac{1}{2^m 2^m}\right)+\frac{1}{6^m}\left(\frac{1}{2^m 3^m}\right) \quad \&c. \\ 2^m x-2^m y \propto & +\frac{1}{1^m} \qquad +\frac{1}{2^m} \qquad +\frac{1}{3^m} \qquad \&c. \propto x \end{array}$$

unde $$2^m x - x \propto 2^m y,$$

& $$y \propto x - \frac{x}{2^m},$$

& $$x - y \propto \frac{x}{2^m},$$

ergo[5] $$y \,.\, x-y :: x-\frac{x}{2^m} \,.\, \frac{x}{2^m} :: 1-\frac{1}{2^m} \,.\, \frac{1}{2^m} :: 2^m-1 \,.\, 1.$$

5 Bien entendu la démonstration de Bernoulli est parfaitement correcte dans le cas $m>1$, puisqu'alors toutes ses séries sont convergentes, et elle est dépourvue de signification pour $m \leqq 1$. Il est néanmoins curieux de constater qu'un mathématicien aussi averti que G. Cramer, écrivant en 1744, ne se satisfait pas de la démonstration, même pour $m>1$ («Manca mihi videtur», dit-il dans sa note des *Opera*, p. 531: *elle me paraît incomplète*), et cela, dit-il, parce que la série $x=\frac{1}{1^m}+\frac{1}{2^m}+\frac{1}{3^m}+$ etc. a *deux fois plus de termes* que la série $2^m(x-y)=2^m\left(\frac{1}{2^m}+\frac{1}{4^m}+\frac{1}{6^m}+\text{etc.}\right)$ et *se termine par* $\frac{1}{\infty^m}$ tandis que l'autre *se termine par* $\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\infty\right)^m}$; après quoi il présente un raisonnement basé sur l'intégrale $\int\frac{dx}{x^m}$ par lequel il croit montrer que les deux séries sont bien égales pour $m>1$ mais sont dans le rapport de 2^{1-m} à 1 pour $m<1$.

Schol. Liquet hinc, quod summae duarum serierum (etiamsi incognitae) possint ad se invicem habere rationem cognitam, vid. Prop. XVII. sub fin. Extendit se autem demonstratio ad potestatum radices sive ad potestates fractas non minus ac integras: sic ex. gr. colligimus, in serie $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{8}}+\frac{1}{\sqrt{27}}+\frac{1}{\sqrt{64}}+\frac{1}{\sqrt{125}}+$ &c. (ubi denominatores sunt cuborum radices quadratae) omnes terminos locorum imparium ad omnes parium esse, ut $\sqrt{8}-1$ ad 1. Mirabile vero est, quod in serie $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+$ &c. (cujus summa infinita est, ceu major serie $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+$ &c. ob denominatores minores) termini locorum imparium ad terminos parium juxta regulam inveniuntur habere rationem $\sqrt{2}-1$ ad 1, minoris sc. ad majus, cum tamen illi cum his sigillatim collati iisdem manifesto sint majores: cujus ἐναντιοφανείας rationem, etsi ex infiniti natura finito intellectui comprehendi non posse videatur, nos tamen satis perspectam habemus. Idem vero de similibus seriebus aliis, quae infinitam summam habent, intelligendum.

XXV. *Series Thesis* X, $\frac{a}{b}-\frac{a+c}{b+d}+\frac{a+2c}{b+2d}-\frac{a+3c}{b+3d}$; *& alia Harmonica terminorum totidem & denominatorum eorundem,* $\frac{f}{b}-\frac{f}{b+d}+\frac{f}{b+2d}-\frac{f}{b+3d}$; *signis* + *&* − *alternatim se excipientibus, sumtoque* $f \propto a-\frac{bc}{d}$, *aequales summas habent.*

Etenim subtrahendo terminos locorum parium a terminis imparium, provenit eadem utrobique series,

$$\frac{ad-bc}{bb+bd}+\frac{ad-bc}{bb+5bd+6dd}, \quad \text{sive} \quad \frac{df}{bb+bd}+\frac{df}{bb+5bd+6dd}, \qquad \text{\&c.}$$

Esto ex. gr. series th. X. $\frac{3}{1}-\frac{5}{2}+\frac{7}{3}-\frac{9}{4}+\frac{11}{5}-\frac{13}{6}$, positoque $f \propto 3-2 \propto 1$,

series harmonica, $\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}$,

erit summa utriusque $\frac{1}{2}+\frac{1}{12}+\frac{1}{30}$,

per saltum excerpta ex serie Q th. XV.

XXVI. *Seriei infinitae fractionum K (quarum denominatores crescunt progressione Geometrica, hoc est, sequentes praecedentium sunt aeque-multiplices exacte, numeratores vero praecedentium aeque-multiplices aucti vel minuti communi quodam numero), summam ultimumve terminum reperire*[6].

(8 denotat vel ubique + vel ubique −)

$$K \infty \frac{a}{c} + \frac{ab\,8\,d}{cm} + \frac{abb\,8\,bd\,8\,d}{cmm} + \frac{ab^3\,8\,bbd\,8\,bd\,8\,d}{cm^3} + \frac{ab^4\,8\,b^3d\,8\,bbd\,8\,bd\,8\,d}{cm^4} + \&c.$$

1. Summa seriei invenitur, resolvendo illam methodo Prop. XIV. in series fractionum pure proportionalium $L + M + N + O + P + \&c.$

$$\left.\begin{array}{lll}
L \infty \frac{a}{c} + \frac{ab}{cm} + \frac{abb}{cmm} + \frac{ab^3}{cm^3} + \frac{ab^4}{cm^4} + \&c. & \infty + & \frac{am}{m-b\colon \text{in } c} \\[2ex]
M \infty \,..\, 8\, \frac{d}{cm}\; 8\, \frac{bd}{cmm}\; 8\, \frac{bbd}{cm^3}\; 8\, \frac{b^3d}{cm^4}\; 8\; \&c. & \infty\; 8 & \frac{d}{m-b\colon \text{in } c} \\[2ex]
N \infty \,\ldots\ldots\, 8\, \frac{d}{cmm}\; 8\, \frac{bd}{cm^3}\; 8\, \frac{bbd}{cm^4}\; 8\; \&c. & \infty\; 8 & \frac{d}{m-b\colon \text{in } mc} \\[2ex]
O \infty \,\ldots\ldots\ldots\ldots\, 8\, \frac{d}{cm^3}\; 8\, \frac{bd}{cm^4}\; 8\; \&c. & \infty\; 8 & \frac{d}{m-b\colon \text{in} mmc} \\[2ex]
P \infty \,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\, 8\, \frac{d}{cm^4}\; 8\; \&c. & \infty\; 8 & \frac{d}{m-b\colon \text{in} m^3c} \\[2ex]
\&c. \infty \,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\, 8\; \&c. & \infty\; 8 & \&c.
\end{array}\right\} \text{per Cor. VIII.}$$

Summae serierum M, N, O, P, &c. novam progressionem Geometricam constituunt, cujus summa per Cor. VIII. est $\frac{md}{m-1\colon \text{in } m-b\colon \text{in } c}$ quae summae seriei L $\frac{am}{m-b\colon \text{in } c}$ addita vel subtracta efficit $\frac{amm - am\,8\,md}{m-1\colon \text{in } m-b\colon \text{in } c}$ summam omnium serierum L, M, N, &c. hoc est, ipsius seriei propositae K.

2. Observandum, si $m > b$, summam esse finitam, adeoque ultimum seriei terminum evanescere, vid. Cor. XIV.

Sin $m < b$, & summa infinita est, & ultimus quoque terminus est infinitus; tum enim singulae progressiones Geometricae L, M, N, &c. sunt crescentes: confer Prop. V.

6 Cf. Med. CXLVII (pp. 197–198 h.v.).

At existente $m \infty b$, summa quidem infinita est, sed postremus terminus finitus: tum enim surrogato m in locum b, secundus terminus fit $\dfrac{am \pm d}{cm}$, hoc est, $\dfrac{a}{c} \pm \dfrac{d}{cm}$: tertius $\dfrac{amm \pm md \pm d}{cmm}$, hoc est, $\dfrac{a}{c} \pm \dfrac{d}{cm} \pm \dfrac{d}{cmm}$: quartus $\dfrac{am^3 \pm mmd \pm md \pm d}{cm^3}$, hoc est, $\dfrac{a}{c} \pm \dfrac{d}{cm} \pm \dfrac{d}{cmm} \pm \dfrac{d}{cm^3}$: atque ita postremus $\dfrac{a}{c} \pm \dfrac{d}{cm} \pm \dfrac{d}{cmm} \pm \dfrac{d}{cm^3} \pm \dfrac{d}{cm^4} \pm$ &c. in infinitum: unde patet, terminum infinitesimum resolvi in $\dfrac{a}{c} \pm$ serie infinitorum Geometrice progressionalium in ratione m ad 1, quorum summa per Cor. VIII. est $\dfrac{d}{m-1\colon \text{in } c}$, quae ipsi $\dfrac{a}{c}$ addita vel subtracta efficit terminum infinitesimum $\dfrac{am-a \pm d}{m-1\colon \text{in } c}$, cujus numerator differentiam numeratorum primi & secundi termini, uti & denominator denominatorum eorundem differentiam exprimit: quare cum ex Prop. X manifestum sit, terminum ultimum hujus progressionis

$$Q \infty \frac{a}{c}, \frac{am \pm d}{cm}, \frac{2am-a \pm 2d}{2cm-c}, \frac{3am-2a \pm 3d}{3cm-2c}, \frac{4am-3a \pm 4d}{4cm-3c}, \text{\&c.}$$

$$\text{sive } \frac{a}{c}, \frac{a}{c} \pm \frac{d}{cm}, \frac{a}{c} \pm \frac{2d}{2cm-c}, \frac{a}{c} \pm \frac{3d}{3cm-2c}, \frac{a}{c} \pm \frac{4d}{4cm-3c}, \text{\&c.}$$

itidem esse $\dfrac{am-a \pm d}{m-1\colon \text{in } c}$ sive $\dfrac{a}{c} \pm \dfrac{d}{m-1\colon \text{in } c}$; sequitur in utraque progressione K & Q, primis duobus terminis existentibus iisdem ultimos quoque esse pares, quamvis incrementa vel decrementa prioris magis subitanea sint, quandoquidem ejus termini non nisi per saltum ex posteriore sunt excerpti: Invenio enim, quod memorabile est, tertium terminum seriei K convenire cum termino $m+2$, quartum cum $mm+m+2$, quintum cum $m^3+mm+m+2$, sextum cum $m^4+m^3+mm+m+2$ seriei Q, & sic deinceps; uti patere poterit ex subjunctis seriebus, ubi a valet 2, c 3, b vel m 3, & d 1.

$K \infty \frac{2}{3}, \frac{7}{9}, \frac{22}{27}, \frac{67}{81}, \frac{202}{243}$, &c. ultimus $\frac{5}{6}$.

$Q \infty \frac{2}{3}, \frac{7}{9}, \frac{12}{15}, \frac{17}{21}, \frac{22}{27}, \frac{27}{33}, \frac{32}{39}, \frac{37}{45}, \frac{42}{51}, \frac{47}{57}, \frac{52}{63}, \frac{57}{69}, \frac{62}{75}, \frac{67}{81}$ &c. ultimus $\frac{5}{6}$.

Intellige vero, quae dicta sunt de summa ultimoque termino seriei K, si numeratores praecedentium sunt aeque-multiplices aucti communi numero d; vel diminuti quidem eodem numero, at insuper $ab > a+d$. Nam si sit $ab \infty a+d$, aequivalebunt singuli numeratores ipsi a, summaque seriei fiet finita, nempe $\dfrac{am}{m-1\colon \text{in } c}$, & ultimus terminus evanescet, sive m existat $<$ vel ∞ ipsi b.

XXVII. *Si dati cujuslibet numeri radix quadrata ducatur in ipsum numerum, & producti radix quadrata denuo ducatur in eundem, & producti hujus radix iterum iterumque; idque fiat continuo in infinitum: erit radix producti ultimi aequalis ipsi dato numero:*

(puta, si datus numerus vocetur a, erit $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}}}$ &c. $\infty\, a$).

Ponatur enim $x \infty \surd{:}a\surd{:}a\surd{:}a\surd{:}a$ &c. erit $xx \infty a\surd{:}a\surd{:}a\surd{:}a$ &c. & $\dfrac{xx}{a} \infty \surd{:}a\surd{:}a\surd{:}a$ &c. $\infty\, x$: proinde $xx \infty ax$, & $x \infty a$. Q.E.D.

XXVIII. *Si dati numeri cujuslibet radix quadrata addatur ipsi dato numero, & aggregati radix quadrata denuo addatur eidem, & aggregati hujus radix iterum iterumque; idque fiat continuo in infinitum: radix aggregati ultimi radicem dati numeri quarta parte unitatis aucti dimidia unitate superabit*

(puta $\surd{:}a + \surd{:}a + \surd{:}a + \surd{:}a +$ &c. $\infty \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + a}$).

Posito enim $x \infty \surd{:}a + \surd{:}a + \surd{:}a +$ &c. erit $xx \infty a + \surd{:}a + \surd{:}a +$ &c. & $xx - a \infty \surd{:}a + \surd{:}a + \surd{:}a +$ &c. $\infty\, x$: proinde $xx \infty x + a$, & $x \infty \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + a}$.
Q.E.D.

XXIX. *Datis duobus numeris quibusvis, si radix quadrata unius ducatur in alterum, & producti radix quadrata in primum, & hujus producti radix in alterum; atque ita semper productorum radices ducantur alternatim in datorum alterum; idque continuetur in infinitum: erit radix producti ultimi aequalis alterutri duorum mediorum proportionalium inter duos datos numeros*[7]

(puta si dati numeri dicantur a & b, erit

$$\surd{:}a\surd{:}b\surd{:}a\surd{:}b\surd{:}a\surd{:}b \text{ \&c. } \infty \surd C.\ aab).$$

7 Sur cette proposition et les suivantes, cf. Op. XXXVII (pp. 151–159 h.v.) et Med. CLIII (pp. 206–208 h.v.).

Esto namque $x \infty \surd{:}a\,\surd{:}b\,\surd{:}a\,\surd{:}b$ &c. erit $xx \infty a\,\surd{:}b\,\surd{:}a\,\surd{:}b$ &c. & $\frac{xx}{a} \infty \surd{:}b\,\surd{:}a\,\surd{:}b$ &c. & $\frac{x^4}{aa} \infty b\,\surd{:}a\,\surd{:}b$ &c. & $\frac{x^4}{aab} \infty \surd{:}a\,\surd{:}b$ &c. $\infty\, x$: proinde $x^4 \infty aabx$, & $x^3 \infty aab$, & $x \infty \surd C.\ aab$. Q.E.D.

XXX. *Datis duobus numeris quibusvis, si radix cubica producti ex utroque ducatur in eorum primum, & producti radix quadrata ducatur in productum ex utroque, & hujus producti radix cubica denuo in eorum primum; & sic alternatim radices cubicae & quadratae ducantur in eorum primum & productum ex utroque, erit radix producti ultimi aequalis primo vel secundo quatuor mediorum proportionalium inter duos datos*

(puta $\qquad \surd{:}a\,\surd C{:}ab\,\surd{:}a\,\surd C{:}ab$ &c. $\infty \surd S.\ a^4b$,

& $\qquad \surd C{:}ab\,\surd{:}a\,\surd C{:}ab\,\surd{:}a$ &c. $\infty \surd S.\ a^3bb$).

XXXI. *Datis duobus numeris quibusvis, si radix quadrata secundi ducatur in primum, & producti radix quadrata iterum in primum, producti vero hujus radix in secundum, & hujus producti radix denuo in primum, & sic alternatim productorum radices multiplicentur, bis in primum, semel in secundum, erit radix producti ultimi* ∞ *primo, secundo vel quarto sex proportionalium inter duos datos*[8]

(puta $\qquad \surd{:}a\,\surd{:}a\,\surd{:}b\,\surd{:}a\,\surd{:}a\,\surd{:}b$ &c. $\infty \surd BS.\ a^6b$,

& $\qquad \surd{:}a\,\surd{:}b\,\surd{:}a\,\surd{:}a\,\surd{:}b\,\surd{:}a\,\surd{:}a$ &c. $\infty \surd BS.\ a^5bb$,

& $\qquad \surd{:}b\,\surd{:}a\,\surd{:}a\,\surd{:}b\,\surd{:}a\,\surd{:}a$ &c. $\infty \surd BS.\ a^3b^4$).

XXXII. *Datis duobus numeris quibusvis p & q, si tertius quicunque ductus in q, addatur ipsi pp, & ex radice summae subtrahatur p, & residui radix in q ducta addatur ipsi pp, & ex radice summae denuo subtrahatur p, & sic deinceps in infinitum, erit radix ultimi residui,*

puta $\qquad \surd{:} -p + \surd{:}pp + q\,\surd{:} -p + \surd{:}pp + q\,\surd{:} -p +$ &c.

radix aequationis cubicae $x^3 \infty -2px + q$.

XXXIII. *Iisdem positis, quae in praecedente, si subtractio ipsius p vertatur in additionem, erit radix aggregati ultimi,*

puta $\qquad \surd{:} +p + \surd{:}pp + q\,\surd{:} +p + \surd{:}pp + q\,\surd{:}$ &c.

radix aequationis $x^3 \infty +2px + q$.

8 Sur cette proposition et les suivantes, cf. Med. CLIV (pp. 209–210 h.v.).

XXXIV. *Datis duobus numeris p & q, si tertius in q ductus subtrahatur a pp, & radix reliqui ad p addatur dematurve, & summae reliquique radix in q ducta subducatur a pp, & radix reliqui, &c. erunt radices summae residuique ultimi,*

puta $\qquad \surd{:}p \pm \surd{:}pp - q\,\surd{:}p \pm \surd{:}pp - q\,\surd{:}$ &c.

radices aequationis $x^3 \propto +2px - q$.

XXXV. *Non secus datis tribus numeris p, q, r, erit*

$$\surd{:} -p + \surd{:}pp + r + q\,\surd{:} -p + \surd{:}pp + r + q \text{ \&c.}$$

radix aequationis biquadraticae $x^4 \propto -2pxx + qx + r$.

Omnes hae Propp. ad eundem modum demonstrantur, quo Propp. XXVII, XXVIII & XXIX; quorsum itaque κοκκύζειν!

Schol. Patet hinc aditus ad inventionem 2 med. proport. & in genere radicum Problematum solidorum & hypersolidorum per solas rectas lineas & circulos, quam praestantissimi omnium seculorum Geometrae a bis mille retro annis anxie sed frustra quaesivere. Hanc ego, quoad fieri potuit, per seriem constructionis in infinitum continuandae, primus omnium exhibui[9] in Actis Lips. mens. Septemb. 1689, cum nemo simile quicquam scripto publicasset, forte nec animo concepisset uspiam.

Atque hic speculationis de seriebus infinitis fructus felicissimus & nunquam poenitendus nobis extitit; quem ut infiniti Numinis benignitati unice acceptum ferimus, sic eundem cum qualicunque hoc nostro exantlato labore ad majorem ejus gloriam directum & impensum volumus.

9 Op. XXXVII (p. 151 h.v.).

ΕΠΙΜΕΤΡΑ.

I.

Datur linea curva infinitis circa centrum gyris convoluta & tamen finitae alicui rectae aequalis[10].

II.

Potest fieri ut curva quaedam in se redeat instar Ellipsis, & tamen in infinitum excurrat instar Parabolae. Talis est illa[11], *cujus natura exprimitur per aequationem* $ayy \propto bxx + x^3$.

III.

Nec absurdum est, unam eandemque numero magnitudinem in pluribus locis discretis & separatis simul existere: Sic duae curvae non obstante intervallo, quo dirimuntur, nonnunquam constituunt unam eandemque numero curvam;[12] *qualis est, quae exprimitur per* $aax - x^3 \propto ayy$.

IV.

Datur planum aliquaversum interminatum, quod tamen sit finitae magnitudinis[13].

V.

Itemque aliud, quod quidem habeat infinitam aream, sed rotatum circa axem gignat corpus finitae magnitudinis[14].

10 Visiblement Bernoulli pense ici à la spirale logarithmique; la propriété en question se trouve démontrée dans Op. XLII, § 1 (Jac.B. *Opera*, p. 443, à publier dans *Werke* 5); sur cette courbe, l'une des favorites de Bernoulli, cf. aussi son article de mai 1692, Op. XLIX (v. *Opera*, pp. 501–502, à publier dans *Werke* 5), et Med. CLXXXVI (à publier dans *Werke* 5).

11 Cette proposition et la suivante montrent que, dès 1692, Bernoulli avait commencé à s'intéresser aux courbes du 3[e] ordre (cf. son article rédigé entre 1702 et 1705, *Typus locorum hypersolidorum*, à publier dans *Werke* 5).

12 On notera que, pour Bernoulli, les deux branches de la cubique $a^2x - x^3 = ay^2$ forment une seule et même courbe, ce que conteste Cramer dans une note de bas de page.

13 Dans les *Opera*, l'*Epimetron* IV est devenu «*Datur aliquod planum interminatum, quod tamen sit finitum.*» (N.D.L.R.)
Sans doute Bernoulli pense-t-il ici à l'aire comprise entre *l'hyperboloïde cubique* $x^2y = a^2b$ et l'axe Ox (cf. les dernières lignes de la Prop. XVII, p. 61 h.v.); ou plus généralement, comme le suggère Cramer, à l'aire comprise entre la courbe $x^my^n = c$ et l'axe Ox, pour $m > n$.

14 Comme l'indique Cramer, l'exemple le plus simple est fourni par l'aire comprise entre l'hyperbole usuelle, $xy = c$, et son asymptote, et par le volume engendré par cette aire par sa rotation autour de l'asymptote.

VI.

Osculum Curvarum simplex duobus Contactibus aequipollere, repetito examine perabsurdum deprehendimus[15].

VII.

Hic Syllogismus: Quoddam animal mente praeditum usu rationis caret: Solus homo est animal mente praeditum. E. quidam homo usu rationis caret, *recte concludit, quamvis arietare videtur in utramque legem syllogismorum primae figurae*[16].

VIII.

Est enim in modo Disamis *figurae tertiae; unde liquet, enunciationem exclusivam non semper aequipollere neganti: sed quandoque conversae universali affirmanti.*

IX.

Prima corporum principia, stamina seu elementa necessario sunt solida, non fluida.

X.

Si Aër Recipientis ope Antliae Pneumaticae ad datum raritatis gradum perducendus sit, & quaeratur quot haustibus seu emboli agitationibus integris id consequi liceat; haec observetur Regula: Logarithmum rationis, quam habet raritas aëris desiderati ad raritatem aëris naturalis, divide per Log-um rationis, quam habet cavitas Recipientis & Antliae simul ad cavitatem solius Recipientis: *indicabit*

15 Jacob réitère ici, en termes assurément peu courtois à l'égard de Leibniz, son désaccord avec l'assertion de celui-ci (AE Junii 1686, pp. 289–292 – Leibniz, *Math. Schriften* VII, pp. 326–329), selon laquelle le contact («*osculum*») entre une courbe et son cercle osculateur équivaut en général à *quatre* points d'intersection confondus, ou bien à deux points de contact confondus. Bernoulli y avait opposé, dans les AE Martii 1692, l'esquisse d'une théorie essentiellement correcte du contact (Op. XLVII, *Opera*, pp. 473–481 – *Streitschriften*, pp. 136–142, en particulier p. 142), faisant voir que le contact en question équivaut (en général) à *trois* intersections confondues; c'est en fait ce qu'il entend répéter ici, et ce qu'il allait répéter encore en 1693 dans Op. LVI (*Opera*, pp. 559–561), puis en 1695 dans Op. LXVI (*Opera*, p. 647). Quant à Leibniz, après avoir deux fois encore, en septembre 1692 et en août 1694, répété son erreur initiale, il finit, en décembre 1695, par se rallier aux vues de Bernoulli, en rejetant la faute de son erreur sur ses *multiples occupations*: «diversae occupationes cogitationesque»; cf. Leibniz, *Math. Schriften* VII, p. 331; V, p. 318 et p. 328; cf. aussi la lettre de Leibniz à Johann Bernoulli du 29 juillet 1695, *op. cit.* III, p. 207.

16 Cette proposition et la suivante réflètent l'intérêt que Bernoulli à ses débuts avait pris à la logique formelle scolastique; cf. Jac. B. *Werke* 1, pp. 236–301, et en particulier ses *Theses logicae* de 1686, *Werke* 1, pp. 275–284.

enim quotiens quaesitum agitationum numerum. Intellige, si Recipiens & Antlia nullibi perfluant[17].

XI.

Terrae semidiameter facili & exquisita methodo sic exploratur: Per Libellam accuratissimam Tubo optico instructam & in puncto a *lineae alicujus ad perpendiculum erectae constitutam observetur eminus punctum* b *notae distantiae: hinc translata libella in punctum* b *dirigatur versus dictam perpendicularem, & observetur in hac punctum* c *superius futurum ipso* a*: quo facto erit* ca *ad* ab*, ut* ab *ad semidiametrum terrae quaesitam*[18].

FINIS.

17 Comme il est indiqué dans Med. CCXII (Jac. B. *Werke* 3, pp. 97–98; pp. 245–246 h.v.), le problème dont la solution est énoncée ici équivaut à un problème d'intérêts composés; cf. aussi les *Positiones* de 1696, Op. LXXIV, Epim. XIV (p. 106 h.v.).

18 Cramer met en doute avec raison la valeur pratique de ce procédé pour déterminer le rayon terrestre, auquel il ne fait d'ailleurs qu'une objection: c'est que, si précis que soit le niveau («*libella*») employé, la réfraction de l'air empêchera les rayons lumineux de suivre des droites de a en b et de b en c. Bien entendu, ce n'est pas la seule objection de faire à la *méthode* de Bernoulli.

POSITIONUM
DE
SERIEBUS INFINITIS
PARS TERTIA,
Tractans de Earum Usu
In
QUADRATURIS SPATIORUM
ET RECTIFICATIONIBUS
CURVARUM,
Quam
DEO OPITULANTE
Jussu Magn. & Sap. Philos. Ordinis,
PRÆSIDE
JACOBO BERNOULLI,
Math. P. P.
Ventilandam sistit
JACOBUS HERMANNUS, Basil.
Magist. Cand.
Ad diem 14. *Novembr. M DC XCVI.*
Horis locoq; consuetis.

BASILEÆ,
Typis JOHANN. CONRADI à MECHEL.

Titre de l'édition originale de Op. LXXIV

Op. LXXIV

Positionum de Seriebus Infinitis Pars Tertia

Basileae, Typis Johann. Conradi a Mechel 1696 [UB Basel Kd III 17,8] – Jac. B. Opera, pp. 745–767

Amplissimo & Nobilissimo Domino
Dn. EMANUELI SOCINO, Reipubl. Basiliensis Consuli Prudentissimo,
Nec non Venerando & Spectatae Pietatis Seni[1]
Dn. M. BONAVENTURAE A BRUNN, Ecclesiae Petrinae Pastori Vigilantissimo,

Dominis suis e S. Fonte Susceptoribus plurimum observandis,
has Theses
seque adeo ipsum humillime
O.D.D.
Jacobus Hermannus.

Postquam prima parte laboris nostri defuncti sumus, variarumque, quoad fieri potuit, serierum summas exhibuimus, superest, ut ad alteram instituti partem transeamus, ostendendo modum eas applicandi ad dimensiones quantitatum geometricarum, praesertim illarum, quas transcendentes *nuncupant, licet seriebus, quae hic usui venient, raro contingat esse ex numero earum, quas proxime contemplati sumus, quarumque summas in potestate habemus. Observarunt enim Geometrae, plurimas dari quantitates, cujusmodi sunt pleraeque Lineae Curvae, & pleraque ab iis comprehensa spatia, quae nullis numeris vel rationalibus vel surdis quantumvis compositis exprimi, h.e. quarum relationes ad alias datas sub nulla aequatione algebraica definiti gradus cogi possent, sed quae omnes aequationum gradus quasi transcenderent; ac idcirco attentandum duxerunt, num quas uno aliquo numero effari non poterant, per seriem saltem infinitorum, maxime rationalium, exprimere liceret, quibus ita continuo ad quaesitum accederetur, ut error tandem data quavis quantitate minor fieret, totaque series exactum quaesiti valorem exhiberet*[2]. *Inventum, quod, quantum constat, vergente demum hoc seculo*

1 Sur l'exemplaire cité ci-dessus, une note écrite à la main a été ajoutée à cette dédicace: «[Seni] οὐ τὸ λέγεος, ἀλλὰ τὸ εἶναι» (N.D.L.R.)

2 Contrairement à ce qu'on pourrait croire au premier coup d'œil, ce n'est pas la définition d'une série convergente que Bernoulli donne ici, mais seulement la définition d'une série convergente vers une quantité qui a déjà été définie par d'autres moyens («*ad quaesitum*»).

Ampliſsimo & Nobiliſsimo

DOMINO

DN. EMANUELI SOCINO,
Reipubl. Baſilienſis Conſuli Pruden-
tiſſimo.

NEC NON

Venerando & Spectatæ Pietatis
Seni οὐ τὸ λέγειν, ἀλλὰ τὸ εἶναι.

Dn. M. BONAVENTURÆ
A BRVNN, Eccleſiæ Petrinæ Paſtori
Vigilantiſſimo.

DOMINIS SUIS E' S. FONTE
Suſceptoribus plurimùm obſervandis,
has Theſes

ſeque adeò ipſum humillimè

O. D. D.

Jacobus Hermannus.

Dédicaces de l'édition originale de Op. LXXIV (UB Basel Kd III 17,8) *a* Mercatore, Gregorio, Newtono, Leibnitio, *in lucem productum fuit*[3]. *Quid primi tres de his memoriae prodiderint, etiamnum ignoramus. Summus Geometra Leibnitius, qui rem haud dubie longissime provexit*[4], *inter alias series, quas nobis in Actis Lips. impertivit, unam initio Actorum 1682 pro Circuli magnitudine dedit, sed methodum, qua illuc pervenit, nusquam exposuit. Quantum conjicio, non differt illa a nostra; nam & in easdem cum ipso series incidimus & ipsius subinde calculo differentiali usi sumus, uti posthac patebit. Principia hujus calculi exponere nimis longum & alienum foret. Ea Vir perillustris D. Marchio* Hospitalius *in Libro de Analysi infinite parvorum nuperrime edito perspicue tradit, ad quem proin Lectorem Φιλομαθῆν remittimus.*

Definitio:

Mixtam Seriem voco, cujus termini multiplicatione sunt conflati ex terminis ejusdem ordinis aliarum serierum. Ita si sint series a, b, c, d, e, &c. & f, g, h, i, k, &c. mixta ex utraque erit af, bg, ch, di, ek, &c.

XXXVI. *Fractionem* $\dfrac{l}{m-n}$ *convertere in seriem infinitam quantitatum geometrice proportionalium*[5].

Fit hoc per divisionem continuam numeratoris per denominatorem, hoc pacto[6]: m in l habeo $\dfrac{l}{m}$, quod multiplicatum per divisorem $m-n$, & subtractum ex

3 *En cette fin de siècle*, dit Bernoulli, montrant ainsi combien il est encore mal informé sur les découvertes de Mercator, Gregory et Newton, dont une bonne part est antérieure à 1670.

4 Ici encore, Bernoulli se montre insuffisamment informé: sur le sujet des développements en séries de puissances, Gregory et surtout Newton avaient très largement devancé Leibniz; mais il est visible qu'en 1696 Bernoulli n'en savait encore rien, et que sa documentation se limitait aux publications de Leibniz dans les Acta Eruditorum.

5 Sur cette proposition et les suivantes (XXXVII, XXXVIII, XXXIX et XL), cf. Med. CLXXIV (pp. 230–232 h.v.).

6 Bernoulli explique clairement ici ce qu'il entend par *division continue* (qu'il appelle «divisio artificiosa» dans Med. CLXXIV, et déjà dans Med. CLXX, p. 225 h.v.). C'est en somme la division des polynômes (ou même des séries de puissances) ordonnées suivant les puissances croissantes de la variable (ici, la division de l par $m-n$, considérés comme polynômes en n de degrés respectifs 0 et 1, la division étant effectuée suivant les puissances croissantes de n). On notera que la division de l par $m-n$, ainsi conçue, fournit en même temps la démonstration de la convergence de la série pour $\dfrac{l}{m-n}$; il en sera de même dans les propositions suivantes (v. Prop. XXXVIII et XL).

dividendo l relinquit $\frac{ln}{m}$; hoc rursus divisum per m facit $\frac{ln}{mm}$, quod ductum in $m-n$ & subtractum ex dividendi reliquo efficit residuum $\frac{lnn}{mm}$; hoc denuo divisum per m, facit $\frac{lnn}{m^3}$, quo ducto in $m-n$ & subtracto remanet $\frac{ln^3}{m^3}$, atque ita deinceps sine fine in infinitum: semper enim aliquid dividendum superest, cum unius membri dividendus a divisore bimembri nunquam sine residuo exhauriri possit. At hoc residuum, continuata operatione positoque $m > n$, perpetuo decrescit, & tandem data quavis quantitate minus fit, ut patet. Est ergo fractio proposita

$$\frac{l}{m-n} \propto \frac{l}{m} + \frac{ln}{mm} + \frac{lnn}{m^3} + \frac{ln^3}{m^4} + \frac{ln^4}{m^5} \text{ \&c.}$$

quae series est quantitatum geometrice progredientium in ratione m ad n; quandoquidem quilibet ejus terminus ex constructione in n ductus & per m divisus proxime sequentem exhibet.

Idem brevius sic evincitur: Summa Progressionis Geometricae

$$\frac{l}{m} + \frac{ln}{mm} + \frac{lnn}{m^3} + \frac{ln^3}{m^4} + \frac{ln^4}{m^5} \text{ \&c. est } \frac{l}{m-n},$$

per Corollar. VIII.

Ergo reciproce valorem fractionis $\frac{l}{m-n}$ per talem seriem exprimere licet.

XXXVII. *Fractionem* $\frac{l}{m+n}$ *resolvere in seriem infinitam geometrice proportionalium.*

Facta divisione continua numeratoris per denominatorem, eadem resultat series, quae antea, nisi quod termini ejus alternatim fiant positivi & negativi. Est igitur quantitas

$$\frac{l}{m+n} \propto \frac{l}{m} - \frac{ln}{mm} + \frac{lnn}{m^3} - \frac{ln^3}{m^4} + \frac{ln^4}{m^5} \text{ \&c.}$$

saltem si ponatur $m > n$: tum enim quod post singulas divisiones reliquum manet, continuo minuitur, donec continuata in infinitum operatione prorsus evanescat.

Idem quoque sic elucescit: Quoniam in serie quantitatum

$$\frac{l}{m},\ \frac{ln}{mm},\ \frac{lnn}{m^3},\ \frac{ln^3}{m^4},\ \frac{ln^4}{m^5}\ \&c.$$

ex hyp. primus terminus est ad secundum, ut tertius ad quartum, & quintus ad sextum &c. nec non secundus ad tertium, ut quartus ad quintum, & sextus ad septimum &c. erit etiam ex aequo, primus ad tertium, ut tertius ad quintum, & quintus ad septimum &c. quod docet, primum, tertium, quintum, septimum &c. terminos exemptis reliquis etiam geometrice proportionales esse, quorum adeo summa per Coroll. VIII invenitur $\frac{lm}{mm-nn}$. Eodem pacto ostenditur, secundum, quartum, sextum &c. terminos seriem geometrice proportionalium efficere, cujus summa $\frac{ln}{mm-nn}$. Igitur differentia harum duarum serierum, seu

$$\frac{l}{m}-\frac{ln}{mm}+\frac{lnn}{m^3}-\frac{ln^3}{m^4}+\frac{ln^4}{m^5}\ \&c.\ \infty\ \frac{lm-ln}{mm-nn}\ \infty\ \frac{l}{m+n},$$

ac propterea quantitas $\frac{l}{m+n}$ in istam seriem vicissim converti potest.

Cor. 1. In omni Progressione Geometrica descendente (primo termino existente determinato, signisque + & − alternatim se excipientibus) summa seriei limites habet, quos nequit attingere, nedum egredi, qualiscunque statuatur ratio progressionis. Cum enim per hyp. $n > 0$, & $< m$,

erit $$\frac{l}{m+n} < \frac{l}{m+0} = \frac{l}{m};\quad \& > \frac{l}{m+m} = \frac{l}{2m},$$

hoc est, valor seriei perpetuo minor est ipso primo termino, & major ejus semisse.

Cor. 2. Si tamen $m \infty n$, fiet $\frac{l}{m+n} \infty \frac{l}{2m}$, & series

$$\frac{l}{m}-\frac{ln}{mm}+\frac{lnn}{m^3}-\frac{ln^3}{m^4}\ \&c.\ \infty\ \frac{l}{m}-\frac{l}{m}+\frac{l}{m}-\frac{l}{m}\ \&c.$$

unde paradoxum fluit non inelegans, quod

$$\frac{l}{m}-\frac{l}{m}+\frac{l}{m}-\frac{l}{m}\ \&c.\ \infty\ \frac{l}{2m}.$$

Etenim si ultimus seriei terminus signo − affectus concipiatur, termini omnes se mutuo destruere apparebunt, & si signo +, aequari videbuntur ipsi $\frac{l}{m}$, non $\frac{l}{2m}$.

Ratio autem paradoxi est, quod continuata divisione ipsius l per $m+m$, residuum divisionis non minuitur, sed perpetuo ipsi l aequale manet; unde quotiens divisionis proprie non est sola series $\frac{l}{m}-\frac{l}{m}+\frac{l}{m}-\frac{l}{m}$ &c. sed $\frac{l}{m}-\frac{l}{m}+\frac{l}{m}-\frac{l}{m}$ &c. $+$ vel $-\frac{l}{2m}$, faciendo scil. fractionem ex residuo & divisore, illamque signo $+$ vel $-$ afficiendo, prout ultimus seriei terminus vicissim $-$ vel $+$ habere fingitur.

XXXVIII. *Fractionem* $\frac{l}{\square : m-n}$ *transmutare in seriem infinitam.*

Quoniam quantitas $\frac{l}{m-n} \infty \frac{l}{m}+\frac{ln}{mm}+\frac{lnn}{m^3}+\frac{ln^3}{m^4}$ &c. per XXXVI. facta utrinque multiplicatione per $\frac{1}{m-n}$, habebitur $\frac{l}{\square : m-n} \infty$ seriei A, cujus termini singuli de novo in totidem alias series B, C, D, E, F, &c. per eandem XXXVI. prop. convertantur. Quo facto serierum istarum termini homologi in unam summam

$$\frac{l}{\square : m-n} \infty A \left\{ \begin{array}{lllllll} \frac{l}{mm-mn} & \infty \frac{l}{mm} + & \frac{ln}{m^3} + & \frac{lnn}{m^4} + & \frac{ln^3}{m^5} + & \frac{ln^4}{m^6} & \text{\&c.} \infty B \\ \frac{ln}{m^3-mmn} & \infty \ldots + & \frac{ln}{m^3} + & \frac{lnn}{m^4} + & \frac{ln^3}{m^5} + & \frac{ln^4}{m^6} & \text{\&c.} \infty C \\ \frac{lnn}{m^4-m^3n} & \infty \ldots\ldots & \ldots + & \frac{lnn}{m^4} + & \frac{ln^3}{m^5} + & \frac{ln^4}{m^6} & \text{\&c.} \infty D \\ \frac{ln^3}{m^5-m^4n} & \infty \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots + & \frac{ln^3}{m^5} + & \frac{ln^4}{m^6} & \text{\&c.} \infty E \\ \frac{ln^4}{m^6-m^5n} & \infty \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots + & \frac{ln^4}{m^6} & \text{\&c.} \infty F \\ \text{\&c.} & \infty \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \text{\&c.} \infty \text{\&c.} \end{array} \right.$$

$$Z \infty \frac{l}{mm}+\frac{2ln}{m^3}+\frac{3lnn}{m^4}+\frac{4ln^3}{m^5}+\frac{5ln^4}{m^6} \text{ \&c.} \infty \frac{l}{\square : m-n}$$

conflati novam seriem Z constituent, aequalem propterea quantitati propositae $\frac{l}{\square : m-n}$, mixtamque ex serie numerorum naturalium 1, 2, 3, 4 &c. & quantitatum geometrice progressionalium $\frac{l}{mm}$, $\frac{ln}{m^3}$, $\frac{lnn}{m^4}$, $\frac{ln^3}{m^5}$ &c.

Eadem series Z elici quoque potest divisione continua numeratoris l per denominatorem $mm - 2mn + nn$, dicendo: mm in l, habeo $\frac{l}{mm}$, quod ductum in divisorem & subtractum ex dividendo relinquit $+\frac{2ln}{m} - \frac{lnn}{mm}$; tum porro mm in $+\frac{2ln}{m}$, reperio $+\frac{2ln}{m^3}$, quod multiplicatum & subtractum, ut decet, residuum efficit $+\frac{3lnn}{mm} - \frac{2ln^3}{m^3}$, atque ita ulterius pergendo in infinitum: quo pacto observabitur, post singulas operationes duo membra reliqua manere, sed illa usque & usque minora, tandemque data quavis quantitate propius ad nihilum vergentia.

Idem etiam ostenditur ex lege reciprocorum, resolvendo seriem Z methodo Prop. XIV in infinitas series geometricas B, C, D, E, F &c.; harum enim summae cum novam progressionem A constituant, quae ipsa summam efficit $\frac{l}{mm-2mn+nn}$, sequitur reciproce, & hanc quantitatem $\frac{l}{\square:m-n}$ per seriem Z legitime efferri posse.

XXXIX. *Fractionem* $\frac{l}{\square:m+n}$ *convertere in seriem.*

Si operatio instituatur methodo Propos. praeced. eadem, quae ibi, obtinebitur series, nisi quod termini locorum parium acquirant signum $-$, sic ut habeatur:

$$\frac{l}{\square:m+n} \propto \frac{l}{mm} - \frac{2ln}{m^3} + \frac{3lnn}{m^4} - \frac{4ln^3}{m^5} + \frac{5ln^4}{m^6} - \frac{6ln^5}{m^7} \text{ \&c.}$$

XL. *Fractionem* $\frac{l}{\mathrm{C}:m-n}$, *aut* $\frac{l}{\mathrm{C}:m+n}$, *exprimere per seriem.*

Ex analogia operationum praecedentium liquet modus hoc efficiendi; quorsum igitur plura? En operationem:

$$\frac{l}{\square:m-n} \propto \frac{l}{mm} + \frac{2ln}{m^3} + \frac{3lnn}{m^4} + \frac{4ln^3}{m^5} + \frac{5ln^4}{m^6} \text{ \&c.}$$

per XXXVIII, factaque hinc inde multiplicatione per $\frac{1}{m-n}$,

$$\frac{l}{\mathrm{C}:m-n} \propto \left\{ \begin{array}{lll} \dfrac{l}{m^3-mmn} & \propto & \dfrac{l}{m^3} + \dfrac{ln}{m^4} + \dfrac{lnn}{m^5} + \dfrac{ln^3}{m^6} + \dfrac{ln^4}{m^7} \;\&\text{c.} \\ \dfrac{2ln}{m^4-m^3n} & \propto & \ldots + \dfrac{2ln}{m^4} + \dfrac{2lnn}{m^5} + \dfrac{2ln^3}{m^6} + \dfrac{2ln^4}{m^7} \;\&\text{c.} \\ \dfrac{3lnn}{m^5-m^4n} & \propto & \ldots\ldots\ldots + \dfrac{3lnn}{m^5} + \dfrac{3ln^3}{m^6} + \dfrac{3ln^4}{m^7} \;\&\text{c.} \\ \dfrac{4ln^3}{m^6-m^5n} & \propto & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \dfrac{4ln^3}{m^6} + \dfrac{4ln^4}{m^7} \;\&\text{c.} \\ \&\text{c.} & \propto & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \;\&\text{c.} \end{array} \right\} \text{per Prop. XXXVI}$$

$$\frac{l}{m^3} + \frac{3ln}{m^4} + \frac{6lnn}{m^5} + \frac{10ln^3}{m^6} + \frac{15ln^4}{m^7} \;\&\text{c.} \propto \frac{l}{\mathrm{C}:m-n}.$$

Eodem pacto habetur $\dfrac{l}{\mathrm{C}:m+n} \propto \dfrac{l}{m^3} - \dfrac{3ln}{m^4} + \dfrac{6lnn}{m^5} - \dfrac{10ln^3}{m^6} + \dfrac{15ln^4}{m^7}$ &c.

Conflantur autem termini harum serierum ex ductu terminorum progressionis geometricae in numeros trigonales 1, 3, 6, 10, 15 &c.

Si quis idem per divisionem continuam consequi desideret, is observabit, post singulas operationes trias superesse membra, sed ea subinde minora, ultimoque prorsus evanescentia.

Idem etiam regrediendo a serie inventa patebit, si illa methodo prop. XIV in alias resolvatur, &c.

Schol. Haud dissimili operatione reperitur

$$\frac{l}{\mathrm{QQ}:m \pm n} \propto \frac{l}{m^4} \mp \frac{4ln}{m^5} + \frac{10lnn}{m^6} \mp \frac{20ln^3}{m^7} \;\&\text{c.}$$

ut &

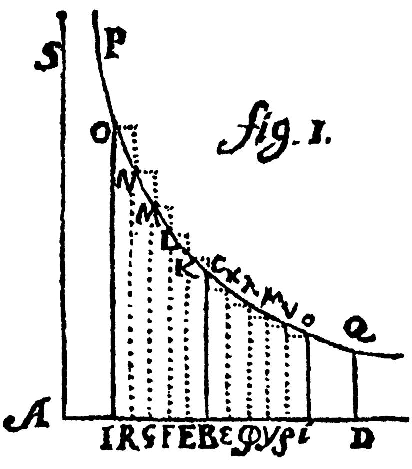
$$\frac{l}{\mathrm{Ss}:m \pm n} \propto \frac{l}{m^5} \mp \frac{5ln}{m^6} + \frac{15lnn}{m^7} \mp \frac{35ln^3}{m^8} \;\&\text{c.}$$

seriebus mixtis ex geometrica & serie pyramidalium, trianguli-pyramidalium, & ita consequenter in omnibus altioribus, servata semper eadem analogiae ratione, ut non opus sit his diutius immorari.

XLI. *Si proponatur series differentialium, quae mixta sit ex serie geometrica quantitatum indeterminatarum, & alia quavis serie quantitatum constantium seu coëfficientium, integralia eorum absoluta seriem constituent mixtam ex eadem serie coëfficientium, simili geometrica indeterminatarum, & alia quadam harmonica.*

Patet ex princ. calc. diff. vel summatorii[7], juxta quae quantitatis differentialis $nx^m dx$ integrale absolutum reperitur $\frac{n \cdot x^{m+1}}{m+1}$; hinc enim si coëfficientes n sint progressionis cujusvis, & exponentes m progressionis arithmeticae, h.e. ipsa x^m progr. geometricae, erunt quoque $m+1$ arithm. adeoque x^{m+1} geom. & $\frac{1}{m+1}$ harmonicae progressionis. Ut si proponatur series differentialium $ax\,dx$, bx^3dx, cx^5dx, fx^7dx &c. mixta ex serie quavis a, b, c, f &c. & geometrica $x\,dx$, x^3dx, x^5dx, x^7dx &c., erunt eorum integralia $\frac{axx}{2}$, $\frac{bx^4}{4}$, $\frac{cx^6}{6}$, $\frac{fx^8}{8}$ &c. mixta ex eadem serie a, b, c, f &c., geometrica simili xx, x^4, x^6, x^8 &c. & harmonica $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{8}$ &c.

XLII. *Exhibere aream Hyperbolae inter Asymptotas per seriem infinitam.*
(Fig. 1)



Mod. 1. *Per Arithm. Infin. Wall.*[8]

Esto Hyperbola PCQ, cujus centrum A, asymptotae AD, AS, applicatae BC, IO (ιο), quaerendumque sit spatium CBIO (CBιο). Sunto autem AB ∞ 1 ∞ BD, BC ∞ b, BI (Bι) ∞ x, quae non sit > AB vel BD, h.e. unitate. Dividatur BI (Bι)

7 On notera que Bernoulli se sert encore du terme leibnizien de *calcul sommatoire* pour désigner le calcul intégral. Quant au terme d'*intégrale* (au lieu du terme leibnizien de *somme*), Bernoulli l'avait introduit dès 1690 (v. Op. XXXIX, *Opera*, p. 423, à publier dans *Werke* 6). Par *intégrale absolue*, il semble qu'il entende ici l'intégrale prise de 0 à x, ou peut-être l'expression la plus simple de l'intégrale indéfinie; cf. la remarque qui précède Prop. LI dans les *Positiones* de 1698 (p. 118 h.v.).

8 Sur cette démonstration, cf. Med. CLXXIII (pp. 228–229 h.v.).

in partes aliquot aequales BE, EF, FG, GR, RI (Bε, εφ, φγ, γρ, ρι) quarum numerus sit n, & singulae dicantur d, sic ut nd sit $\infty\, x \,\infty$ BI (Bι). Tum circumscribantur (inscribantur) hyperbolae parallelogramma BK, EL, FM, GN, RO (Bκ, ελ, φμ, γν, ρο) ductis applicatis EK, FL, GM, RN, IO (εκ, φλ, γμ, ρν, ιο) quae ex natura hyperb. ordine reperiuntur $\infty \dfrac{b}{1\,8\,d}, \dfrac{b}{1\,8\,2d}, \dfrac{b}{1\,8\,3d}, \dfrac{b}{1\,8\,4d}$ &c. usque ad ultimam $\dfrac{b}{1\,8\,nd}$. Singulis igitur in d ductis, habentur areae parallelogrammorum, quae porro in series convertendae sunt per XXXVI & XXXVII, ut sequitur:

$$\text{BK}(\text{B}\kappa)\infty \frac{bd}{1\,8\,d} \infty\, bd\;8\;bdd + bd^3\;8\;bd^4 + bd^5\;8\;bd^6 \text{ \&c.}$$

$$\text{EL}(\varepsilon\lambda)\infty \frac{bd}{1\,8\,2d} \infty\, bd\;8\;2bdd + 4bd^3\;8\;8bd^4 + 16bd^5\;8\;32bd^6 \text{ \&c.}$$

$$\text{FM}(\varphi\mu)\infty \frac{bd}{1\,8\,3d} \infty\, bd\;8\;3bdd + 9bd^3\;8\;27bd^4 + 81bd^5\;8\;243bd^6 \text{ \&c.}$$

$$\text{GN}(\gamma\nu)\infty \frac{bd}{1\,8\,4d} \infty\, bd\;8\;4bdd + 16bd^3\;8\;64bd^4 + 256bd^5\;8\;1024bd^6 \text{ \&c.}$$

$$\text{Ult. RO}(\rho o)\infty \frac{bd}{1\,8\,nd} \infty\, bd\;8\;nbdd + nnbd^3\;8\;n^3bd^4 + n^4bd^5\;8\;n^5bd^6 \text{ \&c.}$$

Harum serierum primi termini aequantur, secundi progrediuntur ut numeri naturales, tertii ut eorundem quadrata, quarti ut cubi, &c. hinc posito numero serierum seu parallelogrammorum n infinito (quo quidem casu summa parallorum seu inscript. seu circumscriptorum ab ipso curvilineo CBIO vel CBιο non differt) summa terminorum primae seriei perpendicularis erit aequalis, terminorum secundae dimidia, tertiae subtripla &c. summae totidem, hoc est, n terminorum ultimo aequalium, per ea, quae docet Wallisius in Arithm. Infin.[9] nosque demonstrabimus alibi[10]: ac propterea summa omnium serierum perpen-

9 Cf. J. Wallis, *Arithmetica Infinitorum*, Oxonii 1656, Prop. XLIV, p. 35 – Wallis, *Opera Mathematica*, vol. I, Oxoniae 1695, p. 384 (N.D.L.R.)

10 Le résultat en question s'écrirait, en notation moderne:

$$\lim_{N\to\infty} N^{-\nu-1} \sum_{n=1}^{N} n^{\nu} = \frac{1}{\nu+1},$$

ce qui résulte bien entendu des célèbres formules de Bernoulli pour les sommes $\sum_{n=1}^{N} n^{\nu}$ (v. *Ars Conjectandi*, Pars II, Cap. III, Basileae 1713, pp. 86–99, e.p. p. 97 – Jac. B. *Werke* 3, pp. 157–168, e.p. p. 166); dès longtemps, certainement, Bernoulli avait formé le plan de cet ouvrage, et projeté d'y publier les formules en question; cf. aussi l'article Op. XXIV de 1686 (pp. 149–150 h.v.).

dicularium, i.e. omnium parallelogrammorum, seu area spatii hyperbolici CBIO (CBιο) hac serie exprimetur:

$$\frac{nbd}{1} 8 \frac{nnbdd}{2} + \frac{n^3bd^3}{3} 8 \frac{n^4bd^4}{4} + \frac{n^5bd^5}{5} 8 \frac{n^6bd^6}{6} \text{ \&c.}$$

sive, loco *nd* substituendo *x*,

$$\frac{bx}{1} 8 \frac{bxx}{2} + \frac{bx^3}{3} 8 \frac{bx^4}{4} + \frac{bx^5}{5} 8 \frac{bx^6}{6} \text{ \&c.}$$

Mod. 2. *Per Calc. diff. Leibn.*

Positis, ut prius, AB ∞ 1 ∞ BD, BC ∞ b, & BI (Bι) ∞ x, ejusque elemento RI (ρι) ∞ dx, erit ex natura hyperbolae

$$\text{IO }(\iota o) \infty \frac{b}{1 8 x},$$

& elementum spatii hyperbolici

$$\text{RO }(\rho o) \infty \frac{b\,dx}{1 8 x} \infty \text{ seriei geometricae } b\,dx \; 8 \; bx\,dx + bxx\,dx \; 8 \; bx^3dx + bx^4dx \text{ \&c.}$$

per XXXVI & XXXVII; adeoque summa elementorum $S\frac{b\,dx}{1 8 x}$, sive

$$\text{spatium CBIO (CB}\iota o) \infty bx \; 8 \frac{bxx}{2} + \frac{bx^3}{3} 8 \frac{bx^4}{4} + \frac{bx^5}{5} \text{ \&c.}$$

eadem series, quae supra, mixta sc. ex geometrica & harmonica, per praec. Haec igitur si summari posset, daretur Hyperbolae quadratura.

Cor. 1. Si BI ∞ Bι, dabitur tum summa tum differentia spatiorum CBIO & CBιο per seriem ex geom. & harm. mixtam: cum enim sit ostensum

$$\begin{array}{ll} \text{CBIO} & \infty\; bx + \frac{bxx}{2} + \frac{bx^3}{3} + \frac{bx^4}{4} + \frac{bx^5}{5} + \frac{bx^6}{6} \text{ \&c.,} \\ \text{CB}\iota o & \infty\; bx - \frac{bxx}{2} + \frac{bx^3}{3} - \frac{bx^4}{4} + \frac{bx^5}{5} - \frac{bx^6}{6} \text{ \&c.} \end{array}$$

fiet facta serierum additione & subtractione

$$\text{CBIO} + \text{CB}\iota o \infty \frac{2bx}{1} + \frac{2bx^3}{3} + \frac{2bx^5}{5} \text{ \&c.}$$

$$\text{CBIO} - \text{CB}\iota o \infty \frac{2bxx}{2} + \frac{2bx^4}{4} + \frac{2bx^6}{6} \text{ \&c.}$$

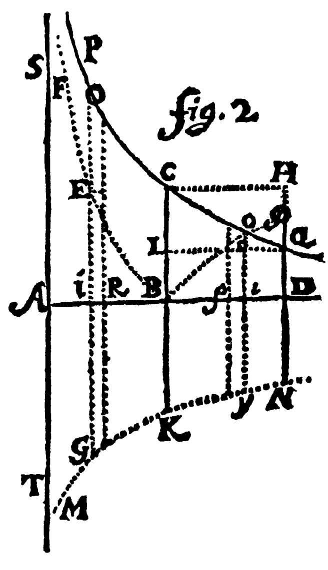
Cor. 2. Posita BI, $x \infty$ BA, 1, fit spatium interminatum hyperbolicum

$$\text{PCBAS} \infty \frac{b}{1} + \frac{b}{2} + \frac{b}{3} + \frac{b}{4} + \frac{b}{5} + \frac{b}{6} \text{ \&c.}$$

simplici seriei harmonicae, quae cum infinita sit per XVI, arguit & aream hujus spatii talem esse. Conf. Cor.4 ejusd. Prop.

Cor. 3. Sin & Bι, $x \infty$ BD, 1 ∞ BC, b, resultat pro spatio CBDQ series harmonica $\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6}$ &c. hoc est, subducendo unumquemque terminum signo $-$ affectum a praecedenti, series $\frac{1}{2} + \frac{1}{12} + \frac{1}{30} + \frac{1}{56}$ &c. cujus termini per saltum excerpti sunt ex serie reciproca trigonalium Q Prop. XV, $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30}$ &c. Quod si statuatur □ AB, BC vel BD quadruplo minus, np. $\frac{1}{4}$, exhibebitur etiam spatium CBDQ per seriem prioris subquadruplam $\frac{1}{8} + \frac{1}{48} + \frac{1}{120}$ &c. quae per saltum formatur ex serie I Prop. XVII. Conf.[11] Act. Lips. 1682, p. 46.

XLIII. *Invenire aream spatii* ABEFS (BDφ) *comprehensi Asymptota hyperbolae* AD, *& Curva* BEF (Bεφ), *quae talis, ut* ▭ *sub ejus applicata* IE (ιε) *& recta constante* AB, BC *vel* BD *(quae sit* 1*) aequetur spatio hyperbolico* CBIO (CBιο). (Fig. 2)



11 Bernoulli se réfère à l'article de Leibniz cité Op. XXXV note 15, p. 58 h.v. (N.D.L.R.)

Quoniam, posita BI ∞ x, spatium hyperbolicum CBIO ∞ $x + \frac{xx}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}$ &c. per praec. eadem quoque series denotabit (ob AB vel BC ∞ 1) longitudinem applicatae IE, quae propterea ducta in IR seu dx producit $x\,dx + \frac{xx\,dx}{2} + \frac{x^3dx}{3} + \frac{x^4dx}{4} + \frac{x^5dx}{5}$ &c. ∞ RE, elem. spatii BIE. Hujus seriei terminos summando fit spatium BIE ∞ $\frac{xx}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{20} + \frac{x^6}{30}$ &c. seriei mixtae ex geometrica & reciproca trigonalium, quae posito insuper BI, x ∞ BA, 1, mutatur in simplicem trigonalium reciprocam $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30}$ &c. cujus summa ∞ 1, per XV. Est igitur totum spatium ABEFS absolute quadrabile, aequale quippe □^{to} AB.

Nota hic exemplum Curvae mechanicae, ubi quadratura specialis succedit absque generali; simplicis enim seriei summam dedimus, mixtae non item.

Eadem ratione ostendetur ex altero latere spatium B$\iota\varepsilon$ ∞ $\frac{xx}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{12} - \frac{x^5}{20}$ &c. totumque spatium BDφ ∞ $\frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{12} - \frac{1}{20}$ &c.

Cor. Completis rectangulis CD & BQ, ajo fore curvilineum mechanicum BDφ ∞ duplo curvilineo hyperbolico CQL, differentiam curvilineorum ABEFS & BDφ ∞ duplo spatio CQH, & summam eorundem ∞ 2 CBDQ; quae sic palam fiunt: Si a serie $\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6}$ &c. subducatur $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7}$ &c. auferendo sigillatim primum terminum a primo, secundum a secundo, tertium a tertio, &c. relinquetur $\frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{12} - \frac{1}{20} + \frac{1}{30} - \frac{1}{42}$ &c. ∞ spatio BDφ, ut ostensum. Si vero eadem series ex altera sic tollatur, ut primus ejus terminus dematur ex secundo alterius, secundus ex tertio, tertius ex quarto &c. orietur $\frac{1}{1} - \frac{2}{2} + \frac{2}{3} - \frac{2}{4} + \frac{2}{5} - \frac{2}{6}$ &c. ∞ $\frac{2}{1} - \frac{2}{2} + \frac{2}{3} - \frac{2}{4}$ &c. $-$ 1 ∞ (per praec.) duplo spat. hyperb. CBDQ $-$ BH ∞ 2 CBDQ $-$ 2 DL ∞ 2 CLQ. Ergo BDφ ∞ 2 CLQ. Igitur cum ostensum etiam sit ABEFS ∞ 1 ∞ BH ∞ 2 DL ∞ 2 LH, erit

$$\text{ABEFS} - \text{BD}\varphi \infty 2\,\text{LH} - 2\,\text{CL} \infty 2\,\text{CQH};$$

nec non $$\text{ABEFS} + \text{BD}\varphi \infty 2\,\text{DL} + 2\,\text{CLQ} \infty 2\,\text{CBDQ}.$$

Quae erant demonstr.

XLIV. *Invenire aream spatii* ABKGMT (BDNγK) *comprehensi asymptota hyperbolae* AD, *& curva* KGM (KγN), *quae talis, ut* $\square$ BIG (B$\iota\gamma$) *sub ejus applicata* IG ($\iota\gamma$) *& indeterminata* BI (Bι) *aequetur spatio hyperbolico* CBIO (CBιo). (Fig. 2)

Quia positis omnibus, ut prius,

spatium hyperb. $\text{CBIO} \propto x + \frac{xx}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}$ &c. per XLII,

erit per hyp. facta divisione per BI seu x,

recta $\text{IG} \propto 1 + \frac{x}{2} + \frac{xx}{3} + \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{5}$ &c.

adeoque RG elem. sp. BIGK

$$\propto dx + \frac{x\,dx}{2} + \frac{xx\,dx}{3} + \frac{x^3dx}{4} \text{ \&c.}$$

omniaque RG seu

$$\text{spatium BIGK} \propto \frac{x}{1} + \frac{xx}{4} + \frac{x^3}{9} + \frac{x^4}{16} + \frac{x^5}{25} \text{ \&c.}$$

& posita $x \propto 1$, spatium totale ABKGMT $\propto \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25}$ &c. seriei reciprocae quadratorum, cujus summam etiamnum desideramus. Conf. Prop. XVII sub fin.

Haud dissimili modo reperitur ex altera parte

spatium $\text{B}\iota\gamma\text{K} \propto \frac{x}{1} - \frac{xx}{4} + \frac{x^3}{9} - \frac{x^4}{16} + \frac{x^5}{25}$ &c.

sumtaque $x \propto 1$, totale spatium

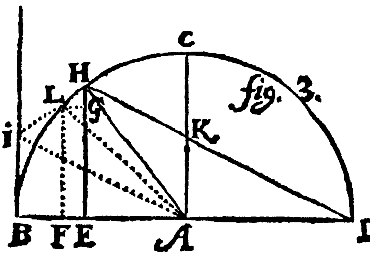
$$\text{BDN}\gamma\text{K} \propto \frac{1}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \frac{1}{25} \text{ \&c.}$$

Cor. Spatium ABKGMT duplum est spatii BDNγK; cum enim summa utriusque sit $\frac{2}{1} + \frac{2}{9} + \frac{2}{25}$ &c. & differentia $\frac{2}{4} + \frac{2}{16} + \frac{2}{36}$ &c. erit utique summa ad differentiam, ut $\frac{1}{1} + \frac{1}{9} + \frac{1}{25}$ &c. ad $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{36}$ &c. h.e. ut 3 ad 1, per XXIV; unde spatium unum alterius duplum esse necesse est, ut maxime neutrius absolutam magnitudinem exploratam habeamus. Vid. Schol. ibid.

XLV. *Exhibere Quadraturam Circuli aut Rectificationem Lineae Circularis per seriem.* (Fig. 3)

In peripheria semicirculi BCD, sumto indefinite puncto H, demittatur ex illo in radium AB perpendicularis HE; & sit AB $\propto$ 1, & BE $\propto x$, adeoque ex nat. circ.

EH $\infty \sqrt{2x - xx}$: quo posito, cum ob simil. Triang. characteristici LGH & Triangul. HEA, HE sit ad HA, sicut LG vel EF elem. abscissae BE, ad LH elem. arcus circ. BH, reperietur LH $\infty \frac{dx}{\sqrt{2x-xx}}$, factaque multiplicatione per $\frac{1}{2}$,



semissem radii AH, sector HAL seu elem. sectoris HAB $\infty \frac{dx}{2\sqrt{2x-xx}}$. Haec igitur quantitas, cum absolute summari nequeat, in seriem convertenda est, sed prius tollenda irrationalitas, quod eo fere modo fit, quo in Problematis Diophanteis uti vulgo sueverunt[12]. In hunc finem pono $\sqrt{2x - xx} \infty \frac{x}{t}$, seu $2x - xx \infty \frac{xx}{tt}$, ubi quia divisio fieri potest per x, ipsaque non nisi unius dimensionis in aequatione relinquitur, ejus valor in rationalibus prodibit, unde & dx, & per hypoth. $\sqrt{2x - xx}$ seu $\frac{x}{t}$, ipsaque adeo fractio $\frac{dx}{2\sqrt{2x - xx}}$, rationales fient; nempe $x \infty \frac{2tt}{1+tt}$, $dx \infty \frac{4t\,dt}{\square : 1+tt}$, $\sqrt{2x - xx} \infty \frac{x}{t} \infty \frac{2t}{1+tt}$, & denique $\frac{dx}{2\sqrt{2x - xx}} \infty \frac{dt}{1+tt}$; hinc fractio in seriem geometricam per XXXVII conversa

12 Sur la méthode diophantienne de rendre rationnelles les racines carrées $\sqrt{2ax \pm x^2}$ et autres analogues, cf. la lettre de Johann à Jacob du 22 mai 1691 (Joh. I B. *Briefe* 1, p. 105), où naturellement il n'est pas nécessaire de prendre au pied de la lettre la revendication de priorité de Johann, qui, dès cette époque, était coutumier du fait (cf. *ibid.*, pp. 111–112), alors que Jacob prenait encore plaisir à mettre en valeur les trouvailles de son frère cadet (cf. Prop. XVI, p. 56 h.v.; Op. XLII, *Opera*, p. 449, à publier dans *Werke* 5; Op. L, *Opera*, p. 503, à publier dans *Werke* 5); cf. aussi le passage de l'*Ars Conjectandi* (*Werke* 3, p. 162), visiblement rédigé avant la brouille survenue entre Jacob et Johann.
Quant aux *problèmes diophantiques*, les deux frères avaient dû s'en instruire en lisant soit le *Diophante* de Bachet, paru en 1623, soit plutôt la réédition qu'en avait donnée en 1670 Samuel de Fermat, avec les notes de son père. Cf. aussi Prop. LVI, *infra* pp. 132–133.

exhibet $dt - tt\,dt + t^4dt - t^6dt + t^8dt$ &c. Summa igitur elementorum HAL, seu totus sector HAB $\infty\ t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + \frac{t^9}{9}$ &c. eoque per semissem radii $\frac{1}{2}$ diviso,

$$\text{arcus BH} \infty\ \frac{2t}{1} - \frac{2t^3}{3} + \frac{2t^5}{5} - \frac{2t^7}{7} + \frac{2t^9}{9} - \frac{2t^{11}}{11}\ \&\text{c.}$$

quae series mixtae sunt ex geometrica & harmonica, per XLI, a quarum proin summatione decantatum illud de Circuli Tetragonismo Problema dependet. Nota, ductis ex B & H tangentibus circuli BI, HI, sibi mutuo occurrentibus in I, junctaque HD, quae radium AC secet in K, fore BI vel IH ∞ AK, utramlibet autem $\infty\ t$. Nam

$$2\,\text{ang. BAI} \infty \text{BAH} \infty \text{AHD} + \text{ADH} \infty 2\,\text{ADH}.$$

Ergo BAI ∞ ADH; cumque & ABI & DAK anguli, nec non latera AB & AD aequentur, erit quoque BI ∞ AK. Deinde cum sit per hypoth. 1 ad t, ut $\sqrt{2x - xx}$ ad x; itemque, ob sim. $\triangle$ DAK & DEH, AD seu 1 ad AK, sicut DE ad EH, hoc est, ex nat. circ. HE ad EB, seu $\sqrt{2x - xx}$ ad x; erit utique $1.t :: 1.\text{AK}$, ac proinde AK seu BI $\infty\ t$.

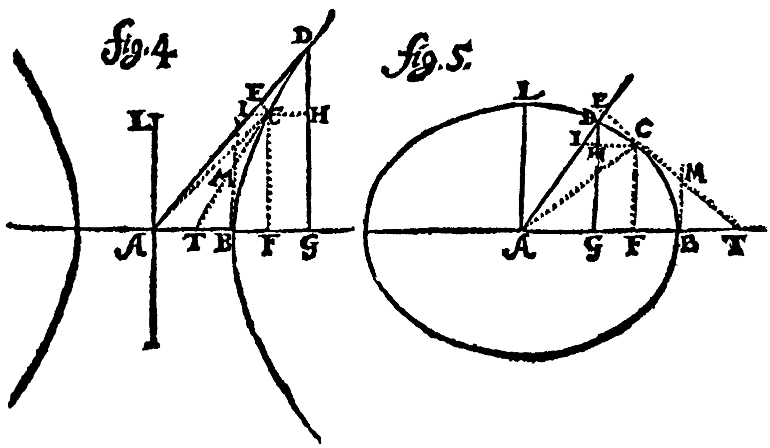
Cor. 1. Sumta $t \infty 1$, quo casu & BE, x seu $\frac{2tt}{1+tt}$, aequatur BA, 1, fiet quadrans BAC ∞ simplici seriei harmonicae $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11}$ &c. ∞ (subducto reapse unoquoque termino signo $-$ affecto a praecedente) $\frac{2}{3} + \frac{2}{35} + \frac{2}{99}$ &c. Hinc quia quadratum radii est ad quadrantem circuli, sicut quadratum diametri ad totum circulum, sequitur si quadratum diametri, h.e. quadratum circulo circumscriptum sit 1, ac proin eidem inscriptum $\frac{1}{2}$, totius circuli aream per modo memoratam seriem expressum iri; adeoque si quadratum circulo inscriptum sit $\frac{1}{4}$, circuli aream fore $\frac{1}{3} + \frac{1}{35} + \frac{1}{99}$ &c. cujus seriei termini per saltum excerpti sunt ex serie *H* Prop. XVII. Conf.[13] Act. Lips. 1682, p. 45.

Cor. 2. Posita Tangente BI $\infty\ t$, erit arcus, cujus tangens est, $\infty\ \frac{t}{1} - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7}$ &c. utpote semissis arcus BH. Confer[14] Act. Lips. 1691, pag. 179.

13 Bernoulli se réfère encore à l'article de Leibniz cité Op. XXXV note 15, p. 58 h.v. (N.D.L.R.)

14 La référence est à G.W. Leibniz, *Quadratura arithmetica communis Sectionum Conicarum* ...: AE Aprilis 1691, pp. 178–182 (N.D.L.R.)

XLVI. *Exhibere generaliter Sectorem cujusvis Sectionis Conicae ex centro per seriem*[15]. (Fig. 4 & 5)



Esto Coni Sectio quaecunque, Hyperbola sive Ellipsis, BCD, cujus centrum A, vertex B, semi-latus transversum AB $\infty\, a$, semiaxis conjugatus AL ∞ 1, adeoque semi-latus rectum $\infty \frac{1}{a}$, & ratio laterum, ut aa ad 1. Ponanturque porro, abscissa indeterminata BG $\infty\, x$, AG $\infty\, z \infty\, a \pm x$ ($\pm$ significat + in Hyperb. & − in Ellips. uti $\mp$ vicissim − in Hyp. & + in Ell.) ejusque elementum FG vel CH $\infty\, dx \infty \pm dz$, ordinata GD $\infty\, y$, ejus elementum DH $\infty\, dy$, & jungens D cum centro recta AD $\infty\, u \infty \sqrt{zz+yy}$. Ducta etiam intelligatur HCI parallela axi, secansque curvam in C & rectam AD in I, atque ex C demissa concipiatur in AD perpendicularis CE. Quibus positis, erit primo ex nat. Curv.

$$aa \,.\, 1 :: \pm zz \mp aa\ (2ax \pm xx) \,.\, yy;$$

unde fit
$$aayy \infty \pm zz \mp aa\ (2ax \pm xx),$$

& differentiando
$$aay\,dy \infty \pm z\,dz,$$

& denique
$$dy \infty \frac{\pm z\,dz}{aay} \infty \frac{z\,dx}{aay}.$$

15 Cf. sur ce point la revendication de priorité de Johann, Joh. I B. *Briefe* 1, p. 112, et la note 16 à cette page.

Deinde quoniam, ob sim. △ DGA & DHI, DG, y est ad GA, z, sicut DH, dy, ad HI, invenitur HI $\infty \frac{z\,dy}{y}$, ac proinde

$$\text{CI (HI} \mp \text{HC)} \infty \frac{z\,dy}{y} - dz \infty \frac{z\,dy - y\,dz}{y}.$$

Quare denuo propter △ sim. AGD & IEC,

$$\text{ut AD, } u\text{, ad DG, } y\text{, sic IC, } \frac{z\,dy - y\,dz}{y}\text{, ad CE;}$$

unde reperitur CE $\infty \frac{z\,dy - y\,dz}{u}$, quae ducta in semissem AD, seu $\frac{1}{2}u$, dat aream trianguli elementaris ACD

$$\infty \frac{z\,dy - y\,dz}{2} \infty \text{(posito loco } dy \text{ valore ejus) } \frac{\pm zz\,dz}{2aay} - \frac{y\,dz}{2}$$

$$\infty \frac{\pm zz\,dz - aayy\,dz}{2aay} \infty \text{(substituendo } \pm zz \mp aa \text{ loco } aayy\text{)}$$

$$\frac{\pm zz\,dz \mp zz\,dz \pm aa\,dz}{2aay} \infty \frac{\pm a\,dz}{2ay} \infty \frac{a\,dx}{2ay}$$

$$\infty \text{(loco } ay \text{ surrogando } \sqrt{2ax \pm xx}\text{) } \frac{a\,dx}{2\sqrt{2ax \pm xx}},$$

de qua in seriem convertenda & summanda agitur. Primo autem irrationalitas ex illa tollenda, mediante alia indeterminata, quae loco x surrogari debet, ut in praec. Pono itaque $\sqrt{2ax \pm xx} \infty \frac{x}{t}$, unde fluit $x \infty \frac{2att}{1 \mp tt}$, & $dx \infty \frac{4at\,dt}{\square : 1 \mp tt}$,

& $$\sqrt{2ax \pm xx} \infty \frac{x}{t} \infty \frac{2at}{1 \mp tt},$$

& denique

$$\frac{a\,dx}{2\sqrt{2ax \mp xx}} \infty \frac{a\,dt}{1 \mp tt} \infty \text{seriei geom. } a\,dt \pm att\,dt + at^4dt \pm at^6dt + at^8dt \text{ \&c.}$$

per XXXVI & XXXVII.

Summa igitur omnium sectorum elementarium ACD, i.e. area totius Sectoris ABCD $\infty\, at \pm \frac{at^3}{3} + \frac{at^5}{5} \pm \frac{at^7}{7} + \frac{at^9}{9}$ &c. ▭ scil. comprehenso sub a semi-latere transverso & recta, cujus longitudo est $t \pm \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} \pm \frac{t^7}{7} + \frac{t^9}{9}$ &c. Unde patet, quo pacto generaliter quadraturae sectionum Conicarum ad summas serierum ex geomet. & harmon. mixtarum reducantur.

Nota, ductis per verticem B & punctum Curvae D tangentibus BM, DT, sibi mutuo occurrentibus in M, dico fore BM ∞ t. Quoniam enim

$$AG.AB :: AB.AT, \qquad \text{per 37. lib. 1. Apoll.}$$

ac idcirco convertendo $\quad AB.TB :: AG, z.BG, x;$

nec non (ob sim. $\triangle$ TBM & CHD)

$$TB.BM :: CH, dx.HD, dy :: (\text{ex aequat. Curvae different.})\ aay.z;$$

erit ex aequo perturbate $\quad AB, a.BM :: aay.x;$

unde obtinetur $\quad BM \infty \dfrac{x}{ay} \infty \dfrac{x}{\sqrt{2ax \, 8 \, xx}};$

adeoque $\quad \sqrt{2ax \, 8 \, xx}.x :: 1.BM:$

verum per constructionem $\quad \sqrt{2ax \, 8 \, xx}.x :: 1.t.$

Ergo omnino BM ∞ t. Conf.[16] Act. Lips. 1691, p. 179.

ΕΠΙΜΕΤΡΑ.

I.

Falsissimum est, nihil a nobis dici posse, quod non sit dictum prius.

II.

Argumentum Cartesii pro existentia Dei ab idea entis perfectissimi desumtum, est sophisticum.

III.

Illud etiam, quo Philosophus realem mentis a corpore distinctionem probare nititur, ficulneum.

IV.

Naturam enim Corporis in sola extensione consistere, nobis equidem nondum persuasit.

16 Bernoulli se réfère encore à l'article de Leibniz cité note 14 *supra* (N.D.L.R.)

V.

Sed & hoc videtur nobis ἄτοπον; quod cum inter mentem & corpus reale discrimen statuat, idem non agnoscat inter diversas animae[17] *facultates, quae non minus separatim possunt concipi, ac illa.*

VI.

Distinctio perceptionis rei corporeae in imaginationem & conceptum purum nulla est; omnis enim perceptio rei materialis est imaginatio.

VII.

Qui contra Meisnerum[18], *Pererium*[19], *Thomam Aquinatem & alios, possibilem vel extensionis vel durationis Mundi infinitatem negant, munimen suae sententiae quaerant adversus hoc argumentum:* Quod omni assignabili quantitate majus est, infinitum est, *per defin. Geom.* Quod omni assignabili quantitate majus esse potuit, infinitum esse potuit. *Et analogice:* Quod omni assignabili tempore prius est, aeternum est. Quod omni assignabili tempore prius esse potuit, aeternum esse potuit. Sed Mundus, *nemine contradicente*, omni assignabili quantitate & tempore major & prior esse potuit. E. infinitus & aeternus esse potuit.

VIII.

Cur in versione Lobwass.[20] *Psalmi CXIX ultimi versus plerarumque stropharum omni mensura destituantur, causa est, quod cum impari constent syllabarum numero, nequeunt esse Jambici masculini. Vitium vitasset Auctor, si vel omnes fecisset Trochaïcos, ut in stroph. 2, 4, 8, 11, 12, 13, 14, 17, 18, 19, 20, &c. vel Amphibrachycos, ut in stroph. 5, 12, 33, 55, 62, 72, 75, 77, 83, vel saltem Jambicos faemininos, qui cum versibus antepenultimis rhythmos constituerent, ut fecerunt Beza & Conradus in versionibus suis gallicis.*

17 Au lieu de «*animae*», les *Opera*, p. 764, ont «*mentis*». Comme on ne voit pas pourquoi Cramer, en publiant les *Opera* en 1744, aurait corrigé ainsi le texte de Jacob, on peut se demander s'il disposait d'un exemplaire des *Positiones* corrigé de la main de celui-ci.

18 Le théologien protestant Johann Meisner est l'auteur d'une *Theologia naturalis*, Wittenberg 1648 (N.D.L.R.)

19 Un traité *De communibus omnium rerum naturalium principiis & affectionibus* du jésuite portugais Benito Pereira avait été publié en 1576 à Rome, sa *Physica* en 1618 à Strasbourg (N.D.L.R.)

20 La traduction métrique du psautier par Ambrosius Lobwasser (imprimée pour la première fois en 1573) était très répandue dans les pays de langue allemande jusqu'au XVIII^{e} siècle, tout comme les traductions françaises des huguenots Théodore de Bèze (1573) et Valentin Conrart (1679). (N.D.L.R.)

IX.

In vulgaribus Systematibus Arithm. perperam omittitur illa species Regulae Dupli, *quae ex duabus Proportionibus Reciprocis componitur.*

X.

Axioma Euclideum: Si ab aequalibus aequalia auferas, residua sunt aequalia, *absolute verum non est, quando residua haec incomparabiliter parva sunt respectu datarum vel ablatarum magnitudinum; ad quod proin in calculo indefinite parvorum caute advertendum, ne in paralogismum incidamus*[21].

XI.

Cl. D. Nieuwentiit, dum prima quantitatum elementa seu differentialia recte admittit, secunda seu differentio-differentialia inepte rejicit[22].

XII.

Modus inscribendi generaliter omnia Polygona regularia in circulo, quem ex Renaldino citat Celeb. Sturmius in Math. Enucl.[23] *pag. 38 manifeste fallax est, ut mirum sit, illum non statim a Viro Cl. repudiari. Sumit enim inscriptionem Heptagoni pro Problemate plano, quod solidum esse constat. Ut taceam, quod ne quidem in Pentagono & Octogono succedit. Peccat autem in toto circuitu pro Pentagono circiter min.* 13 *in defectu, pro Heptagono min.* 37 *& pro Octogono min.* 90 *in excessu.*

21 On notera cet exemple des difficultés où risquaient de s'empêtrer les premiers usagers du calcul infinitésimal de Leibniz.

22 Bernhard Nieuwentijt avait critiqué les *differentiae differentiarum* de Leibniz dans *Considerationes secundae circa calculi differentialis principia,* Amstelaedami 1696, Sectio II, pp. 10–28. L'élève de Jacob Bernoulli qui soutenait la présente thèse, Jacob Hermann, allait répondre en détail à Nieuwentijt dans un ouvrage de 62 pages, publié à Bâle en 1700: Na. 002, *Responsio ad Clarissimi Viri Bernh. Nieuwentiit Considerationes Secundas ...* (N.D.L.R.)
Sur la controverse avec Nieuwentijt, cf. aussi la lettre de Leibniz à Johann Bernoulli du 24 juin 1695: Leibniz, *Math. Schriften* III, p. 195.

23 Bernoulli a connu la méthode de Carlo Renaldini, *De Resolutione & Compositione Mathematica*, Patavii 1668, par le livre de Johann Christoph Sturm déjà cité dans la note 19 à Op. XXXV, p. 63 h.v. Cf. la Med. CLI de 1689, *Werke* 2, pp. 498–501 (N.D.L.R.)
Cramer cite à cet égard, outre Sturm et Renaldini, le livre de Christian Wolff, *Elementa Matheseos Universae*, Halae Magdeburgicae 1742 (réimprimé par J.E. Hofmann, Hildesheim 1968), *Problema 136*, p. 402; la construction de Renaldini donne, pour le côté d'un polygone régulier de n côtés, une formule exacte pour $n = 3, 4, 6$, mais manifestement et grossièrement fausse (comme l'observent Bernoulli et Wolff) dans tout autre cas; pour $n = \infty$, cette formule donnerait $\pi = 2\sqrt{3}$.

XIII.

Quid contra sentiendum sit de Scholio dicti Auctoris[24] *pag. 182, quo Quadraturam Circuli Leibnitianam suspectam velle reddere videtur, superius ex nostra Prop. XLV colligitur.*

XIV.

Titius apud Cajum omnia sua bona foenori exponit, ea conditione, ut sibi quotannis in sui alimentationem ultra convenientem usuram, quae sola non sufficeret, partem sortis tantam reddat, quae una cum dicta usura determinatam quandam summam, de qua conventum est, constituat. Quaeritur, quamdiu suffectura sint ejus bona? Resp. Observetur mira identitas Quaestionis in speciem diversissimae cum Problemate penult. Corollarii Disputat. nostrae praeced. de Serieb.[25] *ubi quaesitum fuit, quot antliae haustibus aër recipientis ad datum raritatis gradum perducatur. Nam si ponatur*

Sors integra	ꝏ a ꝏ *Cavitas Recipientis.*
Eadem cum usura primi anni	ꝏ b ꝏ *Cavitas ejusdem*[26] *& Antliae simul.*
{*Pensio annua*	ꝏ c ꝏ *Densitas aëris naturalis.*}[27]
Id quod elapso primo anno sorti demendum	ꝏ f ꝏ *Densitas aëris optata.*
Numerus annorum, quibus bona exhauriuntur	ꝏ x ꝏ *Numerus haustuum antliae.*

reperitur utrobique $$x \;ꝏ\; \frac{\mathrm{Log.}\ c - \mathrm{Log.}\ f}{\mathrm{Log.}\ b - \mathrm{Log.}\ a}.$$

FINIS.

24 Sturm, *op. cit.* note 19 à Op. XXXV, p. 63 h.v. (N.D.L.R.)

25 Cf. Epimetron X à la suite des *Positiones* de 1692 (Op. LIV, pp. 82–83 h.v.) et Med. CCXII (*Werke* 3, pp. 97–98; pp. 245–246 h.v.).

26 Dans les *Opera* on trouve «*recipientis*» (N.D.L.R.)

27 La relation entre accolades, qui n'apparaît pas dans l'édition originale de 1696, a été donnée dans un *Erratum* publié à la fin de Op. XC et reprise dans les *Opera* (N.D.L.R.)

Op. XC

Positionum de Seriebus Infinitis
Pars Quarta

Basileae, Typis Joh. Conradi a Mechel 1698 [UB Basel Kd III 17,9] – Jac. B. Opera, pp. 849–867

VIRIS

Amplissimis, Nobilissimis, Prudentissimisque

Dn. Joh. BALTHASARI BURCARDO,
Inclytae Reipubl. Basiliensis Tribuno Pleb. Gravissimo, Patriae Patri.
Dn. PETRO SARASINO,
Illustris Reipubl. Patriae Senatori & XIII-Viro Spectatissimo

NEC NON

Viris Consultissimis, Excellentiss. Plur. Reverendis

Dn. JOHANNI WETSTENIO, J.U.D.
Philosoph. moralis Profess. Meritissimo, Facultat. Philosoph. p.t. Decano Spectatissimo.
Dn. MATTHIAE HARSCHERO,
Doctori Medico, Practico felicissimo.
Dn. JOH. RODOLPHO HOFMANNO,
Ecclesiae in Muttentz Pastori Vigilantissimo.

Dominis suis Patronis, Cognatis, Praeceptori, Patruo, omni venerationis & honoris cultu aeternum prosequendis, hasce Theses D. D. D. seque simul ipsum, cum voto omnigenae felicitatis, studiose & enixe commendat

Nicolaus Harscherus
Respondens.

XLVII. *Dato Numero invenire Logarithmum per seriem.* (Fig. 6)

Intelligatur super axe SAσ Curva quaedam CBϰ ejus naturae, ut abscissae AR, AS (Aρ, Aσ) crescant arithmetice, dum applicatae RE, SC (ρε, σϰ) crescunt vel decrescunt geometrice, h.e. ut istae sint ut Numeri, dum illae sunt ut Logarithmi. Vocabitur haec Curva *Logarithmica*, cujus haec est proprietas, ostendente Acut. Leibnitio[1] in Act. Lips. 1684, p. 473, ut Subtangentes ejus omnes AK,

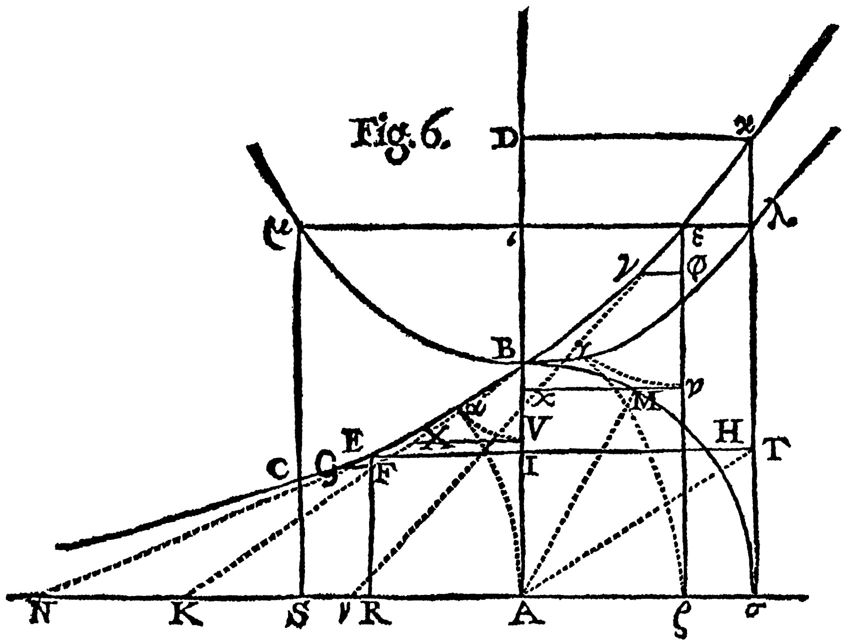
1 V. Leibniz, *Math. Schriften* V, p. 226, l.6–17; c'est la conclusion du premier article publié par Leibniz sur son calcul différentiel. Quant au développement en série de log $(1 \pm x)$, Leibniz l'avait publié pour la première fois en 1691 (*ibid.*, p. 129).

POSITIONUM
DE
SERIEBUS INFINITIS
EARUMQUE USU
In
QUADRATURIS SPATIORUM
ET RECTIFICATIONIBUS
CURVARUM,
PARS QUARTA,
Quam
DIVINI NUMINIS AUXILIO
ET
Sap. Philosoph. Ord. Indultu
PRÆSIDE
JACOBO BERNOULLI,
Math. P. P.
Pro virili tuebitur
NICOLAUS HARSCHERUS
Magist. Cand.
Ad diem 16. *Decemb.* *M DC XCVIII.*
Horis locoq; consuetis.

BASILEÆ, Typis JOH. CONRADI à MECHEL.

Titre de l'édition originale de Op. XC

RN, ρν sint aequales. Applicetur in A recta AB, & sumto quovis in curva puncto E (ε) ducatur recta EI (ει) parallela axi SA; voceturque AB 1, BI (Bι) x; adeoque AI (Aι) seu RE (ρε) $1 \, 8 \, x$; nec non AR (Aρ) y, & constans curvae subtangens b.



Dato itaque Numero RE (ρε) ejus Logarithmus AR (Aρ) sic invenitur. Quoniam ex nat. gen. curvarum, elementum applicatae EF (εφ) dx, est ad elementum abscissae FG (φγ) dy, sicut applicata RE (ρε) $1 \, 8 \, x$, ad curvae subtangentem RN (ρν) b, habebitur

$$dy \infty \frac{b\,dx}{1 \, 8 \, x} \infty \text{ (fractione in seriem resoluta per XXXVI \& XXXVII)}$$

$$b\,dx \; 8 \; bx\,dx + bxx\,dx \; 8 \; bx^3dx + bx^4dx \; 8 \; bx^5dx \text{ \&c.}$$

ideoque facta summatione,

$$y, \text{ hoc est } \quad \text{AR (A}\rho) \infty bx \; 8 \; \frac{bxx}{2} + \frac{bx^3}{3} \; 8 \; \frac{bx^4}{4} + \frac{bx^5}{5} \; 8 \; \frac{bx^6}{6} \text{ \&c.}$$

quae insuper in casu speciali BI (Bι) ∞ BA ∞ BD, seu $x \infty 1$, fit

$$b \; 8 \; \frac{b}{2} + \frac{b}{3} \; 8 \; \frac{b}{4} + \frac{b}{5} \; 8 \; \frac{b}{6} \text{ \&c.}$$

Cor. 1. Identitas hujus seriei cum illa, quam nuper Prop. XLII pro spatio Hyperbolico quadrando reperiimus, de mutua dependentia & affinitate inter Hyperbolam & Logarithmos nos admonet, perspicuumque facit, quod sumtis in utraque fig. 1 & 6 ipsis BI (Bι) aequalibus spatium hyperbolicum CBIO (CBιο) aequetur $\square^{lo}$ sub unitate AB & Logarithmo AR (Aρ). Unde porro infertur, quod sumtis utrobique AB, Aι, AD, hoc est, AB, ρε, σκ continue proportionalibus, quo casu ex natura Logarithmicae Aσ dupla fiet ipsius Aρ, spatium hyperbolicum CBDQ duplum quoque sit ipsius CBιο, indeque CBιο, οιDQ spatia futura sint aequalia.

Cor. 2. Quoniam evidens est, existente BI ∞ AB, h.e. evanescente AI seu RE, Logarithmum AR reddi infinitum, sequitur & seriem harmonicam Logarithmum hunc exprimentem, $b+\frac{b}{2}+\frac{b}{3}+\frac{b}{4}+\frac{b}{5}$ &c. talem esse; unde denuo veritas Prop. XVI constat.

Cor. 3. Dato quovis Logarithmo puta binarii, determinari potest ex illo curvae subtangens b; cum enim posita BD ∞ 1 ∞ AB, adeoque AD ∞ σκ ∞ 2, ostensum sit Aσ Log-um binarii esse $\infty\, b-\frac{b}{2}+\frac{b}{3}-\frac{b}{4}$ &c. $\infty\, b$ in $\overline{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\ \&c.}$ erit vicissim $b \infty \dfrac{\text{Log. } 2}{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\ \&c.}$.

XLVIII. *Dato Sinu complementi reperire Logarithmum Sinus recti per seriem.* (Fig. 6)

In eadem fig. centro A per B descriptus esto circuli quadrans BHσ, quem producta EI secet in H, erit AI seu RE sinus arcus Hσ, & AR ejus Logarithmus, existente vid. radii AB ceu unitatis Logarithmo 0. Ponatur sinus complementi IH $\infty\, x$, ut fiat sinus rectus AI seu RE $\infty \sqrt{1-xx}$, ejusque elementum EF $\infty \dfrac{-x\,dx}{\sqrt{1-xx}}$, erit ex nat. gen. curv. EF, $\dfrac{-x\,dx}{\sqrt{1-xx}}$ ad FG, elementum Log-i AR; ut RE, $\sqrt{1-xx}$ ad subtangentem Logarithmicae RN quae sit 1; adeoque

$$\text{FG} \infty \frac{-x\,dx}{1-xx} \infty \qquad \text{(per XXXVI)}$$

$$-\,x\,dx - x^3dx - x^5dx - x^7dx \text{ \&c.}$$

Quare summando fient omnia FG, seu

$$\text{Log-us AR} \infty -\frac{xx}{2}-\frac{x^4}{4}-\frac{x^6}{6}-\frac{x^8}{8}-\frac{x^{10}}{10}\ \&\text{c.}$$

negativus scil. quia numerus ejus RE minor est unitate AB; at si fiat positivus $\frac{xx}{2}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^6}{6}+\frac{x^8}{8}$ &c. hoc est, si AR transferatur ex altera parte in Aρ, erit is proprie Logarithmus rectae $\rho\varepsilon$, id est (ex natura Log-orum) tertiae proportionalis ad ipsum sinum RE & radium AB; qui tamen Log-us immediate quoque reperiri potuisset ex valore numeri sui $\rho\varepsilon \infty \frac{1}{\sqrt{1-xx}}$.

Idem etiam D. Leibnitius[2] Act. Lips. 1691, p. 180 eleganter hoc modo:

$$\left.\begin{array}{ll}
\text{Log.}\,\overline{1-x} & \infty -y \infty -x-\frac{xx}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{5}-\frac{x^6}{6}\ \&\text{c.} \\
\text{Log.}\,\overline{1+x} & \infty +y \infty +x-\frac{xx}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^6}{6}\ \&\text{c.}
\end{array}\right\}\ \text{per praec.}$$

$$\begin{array}{llllll}
\text{Log.}\,\overline{1-xx} & \infty\ (\text{ex nat. log.}) & & & & \\
\text{Log.}\,\overline{1-x}+\text{Log.}\,\overline{1+x} & \infty & -xx & -\frac{x^4}{2} & -\frac{x^6}{3} & \&\text{c.} \\
\text{Log.}\sqrt{1-xx} \infty \frac{1}{2}\text{Log.}\,\overline{1-xx} & \infty & -\frac{xx}{2} & -\frac{x^4}{4} & -\frac{x^6}{6} & \&\text{c.}
\end{array}$$

Cor. Posito sinu complementi HI hujus fig. ∞ BI vel Bι fig. 1 aequabitur $\square^{\text{lum}}$ sub Logarithmo sinus recti AR & radio AB dimidio excessui, quo spatium hyperbolicum CBIO superat alterum CBιo. Patet ex Cor. 1 XLII, ubi CBIO$-$CBιo serie praesentis dupla expressum legitur. Caeterum moneri potuisset ibi, quod sumta z tertia proportionali ad 1 & x, seu posita $z \infty xx$, series illa convertatur in aliam $z+\frac{zz}{2}+\frac{z^3}{3}+\frac{z^4}{4}$ &c. qua quoque spatium hyperbolicum, puta CBGM, existente BG ∞ z vel xx, innuitur. Hinc enim patet, quod CBIO$-$CBιo ∞ CBGM; & CBIO$-$CBGM seu MGIO ∞ CBιo; adeoque (cum his positis AI, $1-x$ sit ad AG, $1-xx$, sicut AB, 1 ad Aι, $1+x$) quod sumtis AI, AG, AB, Aι utcunque proportionalibus spatia segmentis IG, Bι insistentia semper futura sint aequalia.

2 V. Leibniz, *Math. Schriften* V, p. 130.

XLIX. *Applicatam Curvae Catenariae exhibere per seriem.* (Fig. 6)

Esto Curva $\mu B\lambda$, quam Catena ab extremitatibus suis libere suspensa proprio pondere format, dicta *Catenaria*; cujus centrum A, vertex B, axis ABD, parameter $AB \infty 1$, abscissa $A\iota \infty z$, & applicata $\iota\lambda$ vel $\iota\mu \infty y$. Constat ex iis, quae Act. Lips. 1691, p. 274 &c. hac de Curva memoriae prodita leguntur[3], elementum applicatae dy esse $\infty \dfrac{dz}{\sqrt{zz-1}}$. Hinc ad tollendam surditatem pono $\sqrt{zz-1} \infty t-z$; unde fit[4] $z \infty \dfrac{tt+1}{2t}$, $dz \infty \dfrac{tt-1}{[2tt]}\, dt$, $\sqrt{zz-1} \infty t-z \infty \dfrac{tt-1}{2t}$, ac denique $\dfrac{dz}{\sqrt{zz-1}}$ $(dy) \infty \dfrac{dt}{t}$. Quam porro fractionem ut in seriem convertam, facio denominatorem bimembrem, substituendo $1+x$ loco t, & dx loco dt; eritque

$$\frac{dt}{t} \text{ seu } dy \infty \frac{dx}{1+x} \infty \qquad \text{(per XXXVII)}$$

$$dx - x\,dx + xx\,dx - x^3dx + x^4dx \ \&c.$$

unde omnia dy seu $y \infty x - \dfrac{xx}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^5}{5}$ &c. Quoniam autem $z \infty \dfrac{tt+1}{2t}$, hoc

3 Joh. I B. Op. IV, *Solutio Problematis Funicularii*: AE Junii 1691, pp. 274–276 – Joh. I B. *Opera* I, pp. 48–51 (N.D.L.R.)
Sur l'histoire de la chaînette, dite aussi caténaire ou bien *courbe funiculaire*, v. Joh. I B. *Briefe* 1, pp. 97–98; Jac. B. Op. XXXIX, à publier dans *Werke* 6; Op. XLII, à publier dans *Werke* 5; Leibniz, *Math. Schriften* V, pp. 243–266.
Jacob avait posé en 1690, dans Op. XXXIX, le problème de la courbe que décrit une corde, ou bien une chaîne, suspendue entre deux points fixes (courbe que Galilée avait cru être une parabole); Leibniz, Johann Bernoulli et Huygens en avaient publié des solutions concordantes dans les Acta Eruditorum de 1691; comme l'observe Cramer dans sa note à Op. XXXIX (Jac. B. *Opera*, pp. 424–426), ce fut là un des premiers notables succès du nouveau calcul infinitésimal. Ici Jacob se contente de renvoyer aux Acta Eruditorum de 1691 pour en tirer l'équation différentielle $dy = \dfrac{dz}{\sqrt{z^2-1}}$, qui à la vérité ne figure explicitement dans aucun des trois articles de 1691 mais est implicite dans la détermination par Leibniz de la tangente à la chaînette (*Math. Schriften* V, pp. 245–246); dans ses Leçons de calcul intégral, composées en 1691 et 1692 *in usum Marchionis Hospitalii*, Johann Bernoulli la donne (Joh. I B. *Opera* III, p. 495) sous la forme équivalente $dy = \dfrac{a\,dx}{\sqrt{2ax+x^2}}$.

4 Dans la deuxième équation qui suit, il y avait une erreur d'impression: «$dz \infty \dfrac{tt-1}{2t} dt$». Elle a été corrigée dans les *Errata* à la fin des *Positiones* de 1704, Op. CI, et la correction a été reprise dans les *Opera* (N.D.L.R.).

est, $tt \propto 2zt-1$, & t seu $1+x \propto z+\sqrt{zz-1}$, prodibit $x \propto z-1+\sqrt{zz-1} \propto$ (facta ιD $\propto \sqrt{zz-1}$) Bι + ιD $\propto$ BD; igitur data Aι, z dabitur BD, x, indeque ιλ seu y per seriem.

Cor. Ex serie inventa collata cum Prop. XLVII liquet, y esse Logarithmum numeri x; unde data Logarithmica ϰBC, cujus subtangens $\propto$ AB $\propto 1$, puncta Catenariae reperire proclive. Cum enim z, hoc est, Aι vel σλ (Sμ) $\propto \dfrac{tt+1}{2t} \propto \dfrac{1}{2}t+\dfrac{1}{2t}$, patet, abscissis hinc inde Logarithmis aequalibus Aσ (AS) ordinatam Catenariae σλ (Sμ) semissem esse oportere summae duarum ab AB aequidistantium ordinatarum Logarithmicae σϰ & SC, quarum illa $\propto$ AD $\propto t$, haec ex natura Log. $\propto \dfrac{1}{t}$. Atque in hoc ipso consistit elegantissima hujus Curvae constructio Leibnitiana, quam videsis in Act. Lips. 1691, p. 277 seqq.[5]

L. *Datis latitudine loci alicujus in Curva Loxodromica & angulo Rumbi cum meridiano, exhibere longitudinem loci per seriem.*[6] (Fig. 3)

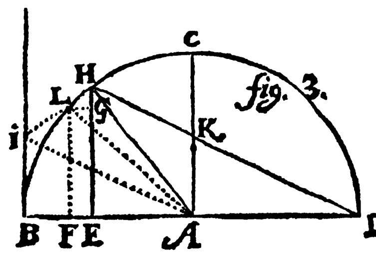
Lineam Rumbicam seu Loxodromicam vocant Nautae, quam navis secundum eundem venti Rumbum constanter incedens in superficie globi terr-aquei describit; adeoque curva est, quae omnes meridianos eodem angulo obliquo intersecat. Incipit haec in Aequatore, indeque versus alterutrum polorum oblique recedendo, tandem in ipsum polum quem infinitis gyris ambit, desinit. Sunto in fig. 3 sinus totus, idemque & radius Aequatoris, AC $\propto 1$, BCD meridianus, B & D poli, tangens anguli Rumbici $\propto t$, H punctum in Loxodromica, ejus latitudo HC, sinus latitudinis AE, & sinus complementi HE qui vocetur z, longitudo vero seu arcus aequatoris inter meridianum loci H & principium Loxodromicae interceptus dicatur x. His positis, per illa quae in Act. Lips. 1691, p. 284 ostensa sunt[7], invenitur elementum longitudinis $dx \propto \dfrac{-t\,dz}{z\sqrt{1-zz}}$: ad cujus

5 C'est l'article de Leibniz cité note 3 *supra* (*Math. Schriften* V, pp. 243–247); sa construction, basée sur la courbe *logarithmique* (c'est-à-dire exponentielle) revenait à écrire, pour l'équation de la chaînette, $y = \dfrac{e^{x/a}+e^{-x/a}}{2}$.

6 Sur la loxodromie (courbe sphérique coupant les méridiens sous un angle constant), cf. l'article de Leibniz cité note 2 *supra* (*Math. Schriften* V, pp. 130–132), où elle porte le nom de «linea rhombica», et celui de Jacob lui-même, Op. XLII (*Opera*, pp. 444–447; à publier dans *Werke* 5).

7 Jac. B. Op. XLII, *Opera*, p. 445, à publier dans *Werke* 5.

tentandam reductionem pono primo $z \propto \frac{1}{p}$; unde fit $dz \propto \frac{-dp}{pp}$, $\frac{dz}{z} \propto \frac{-dp}{p}$, $\sqrt{1-zz} \propto \frac{\sqrt{pp-1}}{p}$, & denique $\frac{-t\,dz}{z\sqrt{1-zz}}$ $(dx) \propto \frac{t\,dp}{\sqrt{pp-1}}$; porro quia memini, ejusdem formae fuisse elementum Catenariae in praec. pergo ponere sicut ibi,



$\sqrt{pp-1} \propto p-q$, indeque elicio $\frac{t\,dp}{\sqrt{pp-1}}$ $(dx) \propto \frac{-t\,dq}{q}$, ac rursum statuendo $q \propto 1-r$ tandem obtineo $\frac{-t\,dq}{q}$ $(dx) \propto \frac{t\,dr}{1-r}$; quae quidem quantitas etiam immediate elici potuisset ex quantitate $\frac{-t\,dz}{z\sqrt{1-zz}}$ si statim fecissem $z \propto \frac{2-2r}{2-2r+rr}$: at in tales hypotheses incidere saepenumero difficile est, nisi jam usu compertum habeatur, quae formulae in quas transformari possint. Nota, $r \propto \mathrm{AC}-\mathrm{BI}$, excessui nempe radii supra tangentem semissis complementi latitudinis puncti H; etenim supposita BI $\propto 1-r$, ductaque recta BH, cum similia sint triangula HEB, ABI, erit HE, z, ad EB, $1-\sqrt{1-zz}$, ut AB, 1, ad BI, $1-r$, unde resultat $z \propto \frac{2-2r}{2-2r+rr}$, ut oportet. Conversa autem per XXXVI inventa quantitate $\frac{t\,dr}{1-r}$ in seriem, habetur

$$dx \propto t\,dr + tr\,dr + trr\,dr + tr^3 \text{ \&c.}$$

& facta summatione $\quad x \propto tr + \frac{trr}{2} + \frac{tr^3}{3} + \frac{tr^4}{4}$ &c.

Patet igitur, quomodo ex data tangente semissis complementi latitudinis inveniatur longitudo.

Sciendum autem, elementum longitudinis $\frac{-t\,dz}{z\sqrt{1-zz}}$ adhuc aliter posse reduci, statuendo nempe $\sqrt{1-zz} \propto y$; hinc enim fit $z \propto \sqrt{1-yy}$, $dz \propto \frac{-y\,dy}{\sqrt{1-yy}}$, &

$$\frac{-t\,dz}{z\sqrt{1-zz}}\ (dx) \propto \frac{t\,dy}{1-yy} \propto \qquad \text{(per XXXVI)}$$

$$t\,dy + tyy\,dy + ty^4dy + ty^6dy \text{ \&c.}$$

ac denique omnia dx seu $x \propto ty + \frac{ty^3}{3} + \frac{ty^5}{5} + \frac{ty^7}{7}$ &c.

ubi perspicuum est, y seu $\sqrt{1-zz} \propto$ AE sinui recto arcus HC; unde constat ratio definiendi etiam quaesitum ex sinu recto latitudinis, quemadmodum fecit Dn. Leibnitius[8] Act. Lips. 1691, p. 181. Et patet, si in calculo, per quem ad initio memoratam aequationem $dx \propto \frac{-t\,dz}{z\sqrt{1-zz}}$ perveni, loco quantitatis indeterminatae ipsum sinum rectum AE prae sinu complementi HE selegissem, me statim ad alteram aequationem immediate in seriem convertibilem $dx \propto \frac{t\,dy}{1-yy}$ perventurum fuisse. Caeterum ex eo, quod duae inventae series eandem quantitatem x denotant, obiter concludimus, quod si in circulo sinus cujuslibet arcus AE dicatur y, & AC$-$BI excessus radii supra tangentem semissis complementi vocetur r, perpetuo futurum sit $y + \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5}$ &c. $\propto r + \frac{rr}{2} + \frac{r^3}{3}$ &c. Notamus etiam, si locus H sit in ipso polo, quo casu $r \propto 1 \propto y$, fore

$$x \propto t + \frac{t}{2} + \frac{t}{3} + \frac{t}{4} \text{ \&c. vel } \propto t + \frac{t}{3} + \frac{t}{5} \text{ \&c.}$$

quarum serierum summae cum sint infinitae per XVI, docent longitudinem loci H quoque infinitam esse, adeoque, quod dixi, curvam loxodromicam infinitis polum gyris ambire, priusquam in ipsum incidat.

8 *op. cit.* note 2 *supra*, p. 131.

Cor. 1. Si in eadem Loxodromica praeter locum H alius sit locus notae latitudinis, cujus sinus rectus $\propto v$, & excessus radii supra tangentem semissis complementi $\propto s$, erit similiter ejus longitudo $\propto t$ in $\overline{v+\frac{v^3}{3}+\frac{v^5}{5}}$ &c. vel, $\propto t$ in $\overline{s+\frac{ss}{2}+\frac{s^3}{3}}$ &c. adeoque differentia longitudinum utriusque loci erit utriusque seriei differentia, nempe[9] t in $\overline{\frac{y=v}{1}+\frac{y^3=v^3}{3}+\frac{y^5=v^5}{5}}$ &c. vel, t in $\overline{\frac{r=s}{1}+\frac{r^2=s^2}{2}+\frac{r^3=s^3}{3}}$ &c. Hinc si in alia quadam Loxodromica duo concipiantur loca latitudine cum prioribus convenientia, erunt, manentibus y & v, vel r & s iisdem, differentiae longitudinum ut tangentes angulorum, quos Rumbi faciunt ad meridianos. Vid.[10] Act. Lips. 1691, p. 182 & 285.

Cor. 2. Ex collatione harum serierum cum seriebus Propp. XLII, XLVI & XLVII, liquet Problematis convenientia cum quadratura Hyperbolae & Logarithmis. Speciatim notamus, quod existente subtangente Logarithmicae $\propto t$, quaesita longitudo puncti H sit ipse Logarithmus rectae $1-r$ seu BI, ut patet ex XLVII; vel etiam (cum D. Leibnitio loc. cit.[11]) semissis Log-i quantitatis $\frac{1+y}{1-y}$ seu $\frac{\mathrm{DE}}{\mathrm{EB}}$, quod sic ostenditur:

$$\left.\begin{array}{ll} \mathrm{Log.}\,\overline{1+y} & \propto +ty-\frac{tyy}{2}+\frac{ty^3}{3}-\frac{ty^4}{4}+\frac{ty^5}{5}-\frac{ty^6}{6}\ \&c. \\ \mathrm{Log.}\,\overline{1-y} & \propto -ty-\frac{tyy}{2}-\frac{ty^3}{3}-\frac{ty^4}{4}-\frac{ty^5}{5}-\frac{ty^6}{6}\ \&c. \end{array}\right\}\text{per XLVII}$$

$$\mathrm{Log.}\,\overline{\frac{1+y}{1-y}} \propto$$

$$\mathrm{Log.}\,\overline{1+y}-\mathrm{Log.}\,\overline{1-y} \propto 2ty + \frac{2ty^3}{3} + \frac{2ty^5}{5}\ \&c.$$

9 Bernoulli utilise encore le signe = pour la *différence absolue*, dont nous avons parlé dans la note 4 à Op. XXXV, p. 49 h.v. (N.D.L.R.).
10 V. *op. cit.* note 2 *supra*, p. 132, et *op. cit.* note 7 *supra*, p. 445.
11 V. encore Leibniz, *Math. Schriften* V, pp. 131–132 (N.D.L.R.).

Cor. 3. Data longitudine & latitudine loci, dabitur angulus Rumbi cum meridiano; cum enim

$$x \propto t \text{ in } \overline{r + \frac{rr}{2} + \frac{r^3}{3} \text{ \&c.}} \propto t \text{ in } \overline{y + \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5}} \text{ \&c.}$$

erit
$$t.1 :: x.r + \frac{rr}{2} + \frac{r^3}{3} \text{ \&c. vel } y + \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} \text{ \&c.}$$

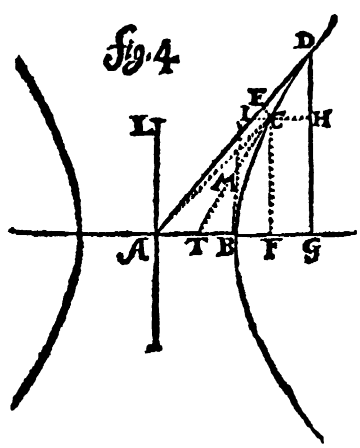
id est, tangens anguli quaesiti ad sinum totum, ut arcus longitudinis ad Log-um BI, vel semissem Log-i $\frac{\mathrm{DE}}{\mathrm{EB}}$; adeoque per Cor. 1 hujus, ut differentia duarum longitudinum ad differentiam duorum Log-orum BI, vel semi-differentiam duorum $\frac{\mathrm{DE}}{\mathrm{EB}}$. Intellige hic Logarithmos acceptos in Curva, cujus subtangens $\propto$ radio $\propto$ 1. Nota, si desideretur angulus Loxodromicae, quae non nisi post unam pluresve integras revolutiones in datum locum perducat, augendus est arcus differentiae longitudinum integra peripheria aequatoris ejusve multiplo.

Schol. Ex hactenus dictis expeditus habetur modus construendi *Scalam* quandam *Loxodromicam*: Esto in Fig. 6 BMσ circumferentia aequatoris in gradus suos & graduum minutias divisa; haec extendatur in rectam AS axem Logarithmicae CB$\varkappa$, ejusque divisionibus ordine ab A adscribantur gradus longitudinum: tum sumto indefinite in circumferentia hac puncto M, bisectoque arcu Mσ per rectam AT occurrentem tangenti $\sigma\varkappa$ in T, ducatur ex T recta TE axi AS parallela, secans Logarithmicam in E; ac denique ex E demittatur in axem perpendicularis ER; punctoque R adscribatur numerus graduum in arcu BM: sic habebuntur etiam gradus latitudinum; parataque erit Scala Loxodromica, quae primario inserviet Rumbo, cujus anguli tangens aequatur subtangenti Logarithmicae. Numeri enim graduum cujusvis datae latitudinis in scala statim a latere aspectui offerunt respondentes longitudinis gradus. Eadem tamen etiam cuilibet Rumbo prodesse poterit, si fiat per Cor. 1 hujus, ut subtangens Logarithmicae, e qua scala constructa est, ad anguli Rumbici tangentem, sic longitudo vel differentia longitudinum per scalam inventa ad longitudinem vel differentiam longitudinum quaesitam: adeo ut scala ejusmodi in usum nautarum circino proportionis insculpta, & lineae partium aequalium, quae longitudinum gradus repraesentarent, juxta posita instrumentum foret omnium forsan, quae Nautae hactenus tractarunt, compendiosissimum & utilissimum[12]. Sed de his satis.

12 Sur l'instrument nautique proposé par Bernoulli dans ce Scholie, v. Jac. B. Op. XCI, *Circinus proportionum nauticus Scala Loxodromica instructus* ...: AE Februarii 1699, pp. 91–92 – *Opera*, pp. 868–870, à publier dans *Werke* 6; cf. aussi la note de Cramer au même Scholie, pp. 859–860 des *Opera*.

Antequam pergamus[13], *Lector advertere potest, quod hucusque in differentialium summatione pro quovis elemento semper ejus integrale purum seu absolutum substituimus, velut x pro dx, $\frac{xx}{2}$ pro $x\,dx$ &c. At scire ipsum volumus, hoc minime esse perpetuum; quanquam enim una eademque quantitas x non nisi unum habeat differentiale dx, idem tamen differentiale dx infinita habet integralia, unum quidem purum x, reliqua admistione quantitatum constantium affecta $x+a$, $x-b$ &c. quorum in summationis negotio pro re nata nunc hoc nunc illud seligendum est, neque adeo sine praesenti hallucinationis periculo indiscriminatim semper purum adsumi potest. Restat itaque, ut ad vitandum scopulum, quem communem fere esse video omnibus iis, qui calculum hunc incautius tractant, subjiciamus adhuc ejus rei exemplum in uno alterove Problemate, e cujus enodatione Lectori constare possit, undenam & quibus criteriis dignoscatur, quid pro quovis semper elemento summando substitui conveniat.*

LI. *Exhibere longitudinem Curvae Parabolicae per seriem*[14]. (Fig. 4)



13 Dans les *Opera*, Cramer a donné à ce paragraphe le titre «MONITUM.» (N.D.L.R.)

14 Cf. Med. CLXIX (pp. 220–222 h.v.).
On notera ici, et dans Prop. LII, le soin minutieux que Bernoulli (conformément à l'avertissement qui précède ces propositions) apporte au calcul de l'intégrale définie

$$\int_B^D ds = \frac{1}{a}\int_a^z \frac{z\,dz}{8} + \frac{a^2 dz}{4z} + \frac{a^4 dz}{8z^3}$$

à partir de l'intégrale indéfinie de la même différentielle. Dans cette proposition et la suivante, on notera aussi, à côté du terme moderne d'«integrale», les termes traditionnels «summa», «summa omnium» ou même «omnia».

Fingamus BCD Curvam esse Parabolam, cujus vertex B, axis BG, latus rectum $\infty\ a$, abscissa BG $\infty\ x$, applicata GD $\infty\ y$, ipsa BCD curva $\infty\ s$; proinde elem. FG vel CH $\infty\ dx$, DH $\infty\ dy$, & CD $(\sqrt{dx^2+dy^2})\infty\ ds$. Erit ex natura Curvae $ax\ \infty\ yy$: hinc differentiando $a\,dx\ \infty\ 2y\,dy$, quadrandoque $aa\,dx^2\ (aa\,ds^2-aa\,dy^2)\ \infty\ 4yy\,dy^2$, & facta transpositione $aa\,ds^2\ \infty\ aa\,dy^2+4yy\,dy^2$, extractaque tandem radice $a\,ds\ \infty\ dy\sqrt{aa+4yy}$, quae quantitas est, de qua summanda agitur. Ad surditatem primo eliminandam pono $\sqrt{aa+4yy}\ \infty\ z-2y$, fiet $aa\ \infty\ zz-4zy$, & $y\ \infty\ \dfrac{zz-aa}{4z}$; hinc $dy\ \infty\ \dfrac{zz+aa}{4zz}\,dz$, nec non $\sqrt{aa+4yy}\ (z-2y)\ \infty\ \dfrac{zz+aa}{2z}$, adeoque

$$dy\sqrt{aa+4yy}\ (a\,ds)\ \infty\ \frac{z^4+2aazz+a^4}{8z^3}\,dz$$

$$\infty\ (\text{membris separatim positis})\ \frac{z\,dz}{8}+\frac{aa\,dz}{4z}+\frac{a^4dz}{8z^3},$$

de quorum nunc summis dispiciendum. Hunc in finem considero relationem, quam habet assumta litera indeterminata z ad ordinatas Curvae nostrae, eamque ex facta hyp. $\sqrt{aa+4yy}\ \infty\ z-2y$ cognosco talem esse, ut existente $y\ \infty\ 0$, z non pariter evanescat, sed sit $\infty\ a$, & quod crescente y eo fortius crescere debeat z; quapropter extensa concipiatur ipsa z in recta[15] DB fig. 3 a puncto D, & sit prima DA, quae nascenti y respondet, $\infty\ a$, ultimaque z, quae respondet ultimae y seu applicatae GD fig. 4, esto DE. Tum fluere intelligatur ab A ad E indefinita recta AK vel EH, aequalis ubique $\dfrac{zz}{16}$ (integrali scil. puro primi membri $\dfrac{z\,dz}{8}$) minimaque adeo in A & $\infty\ \dfrac{aa}{16}$, sic ipsum fluentis lineae incrementum fiet $\dfrac{z\,dz}{8}$, & omnia incrementa quae capit linea, dum ex A movetur in E, repraesentabunt omnia $\dfrac{z\,dz}{8}$, quae ordinatis y a minima (0) ad ultimam (GD) ordine respondent, h.e. quae pertinent ad Curvae Parabolicae portionem rectificandam BD (fig. 4). Constituunt autem omnia illa incrementa, ut liquet, non integram EH $\left(\dfrac{zz}{16}\right)$ sed

15 Dans les *Opera*, les figures 1, 3 et 4 (p. 93, 99 et 101 h.v.) ont été redessinées partiellement dans la Table XXXVII en renommant les points; à partir de cette phrase, les points et les lignes sont donc nommés de manière différente dans le texte des *Opera* (N.D.L.R.)

excessum tantum ejus supra rectam AK $\left(\frac{aa}{16}\right)$ hoc est, EH−AK seu $\frac{zz-aa}{16}$. Integrale igitur primi membri $\frac{z\,dz}{8}$, quod huc quadrat, est $\frac{zz-aa}{16}$. Similiter pro integrando tertio membro $\frac{a^4dz}{8z^3}$, fingo z extendi in recta AD fig. 1 a puncto A, primamque quae nascenti y respondet esse AB $\propto a$, & quae respondet ultimae, AD; hinc fluere concipio a B versus D quantitatem $\frac{a^4}{16zz}$, ceu integrale purum ipsius $\frac{a^4dz}{8z^3}$, puta rectam BC vel DQ, quae proin maxima erit in B & $\propto \frac{aa}{16}$, indeque versus D decrescet; decrementa itaque, quae patitur linea BC quousque pervenit in DQ, denotabunt omnia elementa $\frac{a^4dz}{8z^3}$, quae portioni Curvae Parabolicae BD (fig. 4) respondent: sed omnia illa decrementa, ut apparet, non efficiunt rectam DQ seu $\frac{a^4}{16zz}$, verum potius BC−DQ seu $\frac{aa}{16}-\frac{a^4}{16zz}$; quapropter integrale tertii membri $\frac{a^4dz}{8z^3}$ huc pertinens $\propto \frac{aa}{16}-\frac{a^4}{16zz}$, summaque adeo primi & tertii $\left(\mathbf{S}\,\frac{z\,dz}{8}+\mathbf{S}\,\frac{a^4dz}{8z^3}\right)\propto \frac{zz-aa}{16}+\frac{aa}{16}-\frac{a^4}{16zz}\propto\frac{z^4-a^4}{16zz}$.

Restat intermedium adhuc membrum expediendum $\frac{aa\,dz}{4z}$. Hoc cum absolute summari nequeat[16], in seriem converto, ponendo prius $z\propto a+t$, ut denominator fiat bimembris; hinc enim fit

$$\frac{aa\,dz}{4z}\propto\frac{aa\,dt}{4a+4t}\propto \qquad \text{(per XXXVII)}$$
$$\frac{a\,dt}{4}-\frac{t\,dt}{4}+\frac{tt\,dt}{4a}-\frac{t^3dt}{4aa}\ \&\text{c.}$$

& facta summatione,

$$\mathbf{S}\,\frac{aa\,dz}{4z}\propto\frac{at}{4\cdot 1}-\frac{tt}{4\cdot 2}+\frac{t^3}{4\cdot 3a}-\frac{t^4}{4\cdot 4aa}+\frac{t^5}{4\cdot 5a^3}\ \&\text{c}\cdot$$

16 Il est à observer ici qu'encore en 1698 Jacob ne se croit pas en droit, dans un écrit destiné à la publication, d'écrire directement log z pour l'intégrale de $\frac{dz}{z}$, et se contente de le suggérer dans le corollaire qui va suivre.

Nota, quod hic pro quolibet seriei termino substituam ejus integrale purum, quoniam ex aequatione $z \propto a+t$ colligo, quod existente $z \propto a$ (hoc est $y \propto 0$) ipsa t, ut & quantitates fluentes omnes, $\frac{at}{4\cdot 1}$, $\left[\frac{tt}{4\cdot 2}\right]$, $\frac{t^3}{4\cdot 3a}$ &c.[17] quoque sint $\propto 0$, id est, quod haec a 0 fluere seu incrementa sumere occipiant; hinc enim manifeste liquet, omnia ipsarum crementa, nempe omnia $\frac{a\,dt}{4}$, $\frac{t\,dt}{4}$ &c. ipsis quantitatibus ultimis $\frac{at}{4}$, $\frac{tt}{4\cdot 2}$ &c. aequalia fore. Quod idem quoque, si quis examinet, in omnibus praecedentium Propp. exemplis contingere observabit, indeque concludet, recte a nobis factum, quod ibidem inter summandum pura semper integralia assumserimus, tametsi ejus rei rationem diserte non adjecerimus. Sed revertamur ad propositum: Inventa summa medii membri $\frac{aa\,dz}{4z}$, si reliquorum summae supra repertae adjiciantur, emergit summa omnium

$$\mathbf{S}\,\frac{z\,dz}{8} + \mathbf{S}\,\frac{aa\,dz}{4z} + \mathbf{S}\,\frac{a^4dz}{8z^3},$$

hoc est, $$as \propto \frac{z^4-a^4}{16zz} + \frac{at}{4\cdot 1} - \frac{tt}{4\cdot 2} + \frac{t^3}{4\cdot 3a} - \frac{t^4}{4\cdot 4aa} \text{ \&c.}$$

& facta divisione per a, longitudo Curvae

$$s \text{ seu BD} \propto \frac{z^4-a^4}{16azz} + \frac{t}{4\cdot 1} - \frac{tt}{4\cdot 2a} + \frac{t^3}{4\cdot 3aa} - \frac{t^4}{4\cdot 4a^3} \text{ \&c.}$$

quae denique posita $a \propto t \propto 4$, & $z \propto a+t \propto 8$, fit

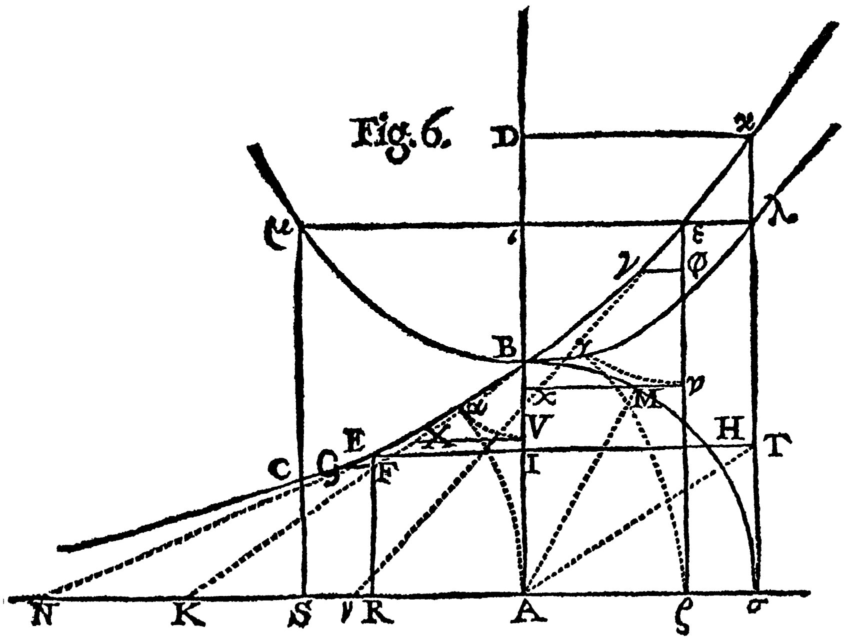
$$\tfrac{15}{16} + 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} \text{ \&c.}$$

unde cum sit hoc casu $y \propto \frac{zz-aa}{4z} \propto \frac{3}{2}$, & $x \propto \frac{yy}{a} \propto \frac{9}{16}$, sequitur, quod existente latere recto Parabolae 4, & abscissa BG $\frac{9}{16}$, aut applicata GD $\frac{3}{2}$, longitudo Curvae Parabolicae BD aequetur $\frac{15}{16}+\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$ &c.

17 Le dénominateur de la deuxième fraction avait été omis par une faute d'impression dans la publication originale; cela a été corrigé dans les *Errata* des *Positiones* de 1704 (Op. CI), et la correction a été reprise dans les *Opera* (N.D.L.R.)

Cor. Ex serie collata cum XLII Curvam Parabolicam cum Spatio Hyperbolico inter Asymptotas comparandi modus innotescit. Sufficit monuisse.

LII. *Rectificare Curvam Logarithmicam per seriem & aliter.* (Fig. 6)



Insistat axi S$A\sigma$ Curva Logarithmica $CB\varkappa$, cujus ordinata $AB \infty 1$, subtangens $AK \infty b$, alia quaevis applicata RE ($\rho\varepsilon$) ∞z, ejusque elementum EF ($\varepsilon\varphi$) ∞dz; quaeritur rectificatio portionis Curvae BE ($B\varepsilon$). Quoniam per XLVII elementum abscissae AR ($A\rho$) nempe FG ($\varphi\gamma$) $\infty \dfrac{b\,dz}{z}$, erit

$$EG^2\ (EF^2+FG^2)\ \infty\ dz^2 + \frac{bb\,dz^2}{zz}\ \infty\ \frac{\overline{zz+bb}}{zz}\ dz^2;$$

indeque elementum curvae

$$\text{EG }(\varepsilon\gamma) \propto \frac{dz\sqrt{zz+bb}}{z}$$

$$\propto \text{(terminis fractionis per } \sqrt{zz+bb} \text{ aeque-multiplicatis) } \frac{zz\,dz+bb\,dz}{z\sqrt{zz+bb}}$$

$$\propto \frac{z\,dz}{\sqrt{zz+bb}} + \frac{bb\,dz}{z\sqrt{zz+bb}},$$

de quorum summatione hic quaeritur. Prioris membri integrale purum est $\sqrt{zz+bb}$, quod (ob primam $z \propto \text{AB} \propto 1$) inde a $\sqrt{1+bb}$ decrescere (crescere) intelligitur ad-usque $\sqrt{zz+bb}$; adeo ut omnia ejus decrementa (incrementa) huc quadrantia, seu $\text{S}\frac{z\,dz}{\sqrt{zz+bb}}$ sint $\propto \sqrt{1+bb}-\sqrt{zz+bb}$ $(\sqrt{zz+bb}-\sqrt{1+bb})$ hoc est, aequalia differentiae duarum in B & E (ε) tangentium rectarum BK & EN (εν). Posterioris membri $\frac{bb\,dz}{z\sqrt{zz+bb}}$ integrale, quoniam ita planum non est, praevia reductione investigare conor, eaque simili huic, qua supra Prop. L pro Curva Loxodromica fui usus, cum in elementis analogiam quandam observem. Pono itaque primo $z \propto \frac{bb}{p}$, eoque mediante transformo $\frac{bb\,dz}{z\sqrt{zz+bb}}$ in $\frac{-b\,dp}{\sqrt{bb+pp}}$; deinde facio $\sqrt{bb+pp} \propto p+q$, sive $p \propto \frac{bb-qq}{2q}$; indeque elicio

$$\frac{-b\,dp}{\sqrt{bb+pp}} \left(\frac{bb\,dz}{z\sqrt{zz+bb}}\right) \propto \frac{b\,dq}{q},$$

quod per XLVII elementum esse cognosco abscissae cujusdam in Logarithmica[18], quam tandem ita determino: Quoniam $p \propto \frac{bb-qq}{2q}$, & $z \propto \frac{bb}{p}$, fiet

18 Comme dans Prop. LI, Bernoulli s'abstient ici d'écrire log q pour l'intégrale (indéfinie) de $\frac{dq}{q}$; mais cette fois il en donne l'équivalent sous forme d'une construction géométrique basée sur la *logarithmique* (c'est à quoi se rapporte le «*aliter*» dans le titre de Prop. LII) avant d'exprimer par un développement en série (obtenu en posant $q = 1-x$ et développant suivant les puissances de x; on rappelle que, dans les notations de Bernoulli, $\mathcal{8}$ signifie $\pm$, et $u = v$ signifie $|u-v|$; v. Prop. VIII et Prop. XXVI).

$z \infty \dfrac{2bbq}{bb-qq}$, sicut vicissim $q \infty \dfrac{-bb+b\sqrt{zz+bb}}{z}$ & quia prima $z \infty$ AB ∞ 1, erit quae huic respondet prima $q \infty -bb+b\sqrt{1+bb}$.

Pro constructione, abscindo in tangente BK partem K$\alpha \infty$ KA, in ordinata AB partem BV ∞ Bα, & in V statuo VX parallelam ipsi AK; pari modo in tangente $\nu\varepsilon$ (idem imaginatione supple in NE) sumo νr ∞ $\nu\rho$, hinc $\varepsilon\nu \infty \varepsilon$r, & duco νx parallelam $\nu\rho$; quo pacto constat fore VX ∞ primae $q \infty -bb+b\sqrt{1+bb}$, & νx ∞ ultimae $q \infty \dfrac{-bb+b\sqrt{zz+bb}}{z}$. Quocirca si ambae VX & νx, vel etiam loco harum sola quarta proportionalis ad VX, νx & AB (quae sit SC vel $\sigma\varkappa$) applicetur Logarithmicae, erit intercepta applicatis VX & νx axis portio, vel etiam ipsis AB, SC ($\sigma\varkappa$) interjecta portio AS (Aσ) [ex natura enim curvae aequalis utrisque intercipietur] ∞ S $\dfrac{b\,dq}{q}$, id est, omnibus $\dfrac{b\,dq}{q}$, seu omnibus $\dfrac{bb\,dz}{z\sqrt{zz+bb}}$ pro portione curvae BE (Bε) rectificanda inservientibus. Et quoniam posita differentia inter AB & SC ($\sigma\varkappa$) ∞x, resegmentum axis AS (Aσ) $\infty\, bx \,8\, \dfrac{bxx}{2} + \dfrac{bx^3}{3} \,8\, \dfrac{bx^4}{4}$ &c. per XLVII, erit hujus posterioris membri integrandi $\dfrac{bb\,dz}{z\sqrt{zz+bb}}$ summa etiam per seriem reperta. Additis itaque amborum summis fient omnia EG ($\varepsilon\gamma$) seu longitudo curvae

$$\text{BE (B}\varepsilon) \infty \sqrt{1+bb} = \sqrt{zz+bb} + bx \,8\, \frac{bxx}{2} + \frac{bx^3}{3} \,8\, \frac{bx^4}{4} \text{ \&c.}$$

∞ differentiae tangentium BK & EN ($\varepsilon\nu$) una cum resegmento axis AS (Aσ).

ΕΠΙΜΕΤΡΑ.

I.

Cum Torcularia nostratia publica, quibus mustum quotannis e racemis exprimitur, consistant in praegrandi arboris trunco propemodum horizontali, cujus una extremitas fulcro firmata premendos racemos excipit, altera perpendiculariter in cochleam faeminam excavata est, quae cochleam marem recipit, ingenti inferius sacomate humi jacente instructam, & circumagendam, donec sacoma humo levatum fuerit: Quaeritur, quid sentiendum de jurgiis inter Dominum racemorum & Dominum torcularis frequenter oboriri solitis, quorum ille sacoma in aëre pendulum altius elevari impense petit, hic anxie vetat? Resp. *uterque ridicule: cum onus etiam sesquipedali a terra intervallo sublatum haudquaquam majorem, quam pollicis tantum latitudine ab eadem divulsum, vel racemis vel torculari vim inferat.*

II.

Bacillus teres & gracilis AB, *ita notatus in* C, *ut sumtis continue proportionalibus* AB, AC, AD, *gravitas ejus ad gravitatem specificam alicujus liquoris se habeat, ut* BD *ad* AB; *si extremitate sua* A *ita suspendatur e filo, ut altera extremitate* B *libere pendeat intra dictum liquorem, immergetur eidem usque ad notam* C; *modo per altitudinem puncti suspensionis id liceat.*

III.

Unde talis bacillus per totam longitudinem rite divisus novum quoddam genus exhibet Instrumenti Hygrostathmici, quo gravitates liquorum examinari solent, Gallis Pese-liqueur *dicti.*

IV.

Vulgares machinulae, quae huic inserviunt, consistuntque in bulla quadam vitrea instructa collo cylindrico oblongo & gracili, hoc defectu laborant, quod divisiones colli aequales habent. Hae enim, ad denotandas aequales gravitatum differentias, versus bullam in proportione harmonica decrescere debent.

V.

Sic etiam arcus circulares, qui scapis bilancium applicari solent, docente Cl. Sturmio[19] *in* Coll. Cur. part. 1, tent. 14, phaen. 4 *perperam in partes aequales dividuntur. Anguli enim examinis & scapi, quos superpondia aequaliter aucta*

19 Johann Christoph Sturm, *Collegium Experimentale, Sive Curiosum* ..., Norimbergae 1676; le passage cité, p. 122–123, décrit un hygromètre inventé par le jésuite Francesco Lana (N.D.L.R.)

efficiunt, tales sunt, ut differentiae tangentium ipsorum eadem proportione a scapo decrescant, qua in praeced. Coroll. partes colli Instrumenti hygrostathmici a summitate versus bullam diminuuntur.

VI.

Dantur Aequationes locales, quas unica litera indeterminata ingreditur: Tales sunt $a\,ddx \propto dx^2$, $2x\,ddx \propto dx^2$ *&c. quarum illa suo sensu Locum ad Logarithmicam, haec ad Parabolam includit*[20].

VII.

Davidis Gregorii *Analysis Curvae Catenariae, nupero* Act. Lips. Iulio vel Augusto *inserta*[21]*, opportune ostendit, fieri utique posse, ut quandoque per inevidens & falsum, plausibile licet, ratiocinium ad veram conclusionem perducamur.*

VIII.

Responsio Anonymi m. Iun. 1697, art. 13 *Diarii Berolinensis exhibita*[22] *ad argumentum pro possibili aeternitate mundi inter proximae nostrae Disput.* Corollaria *ventilatum, nullius est pretii.*

FINIS.

20 Dans de telles équations, il est sous-entendu que x est une fonction (inconnue) d'une variable indépendante; si celle-ci est t, les équations en question sont respectivement équivalentes à

$$a\frac{d^2x}{dt^2} = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \qquad 2x\frac{d^2x}{dt^2} = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$

dont les intégrales générales sont respectivement $x = -a \log(ct+d)$, $x = (ct+d)^2$, où c et d sont des constantes; leurs graphes sont donc bien la *logarithmique* pour l'une, et la parabole pour l'autre.

21 David Gregory avait publié sa *Catenaria* sous forme d'une lettre à Henry Aldrich dans Phil. Trans. 231 (August 1697), pp. 637–652; elle avait été reprise dans AE Julii 1698, pp. 305–321. Cf. C. Truesdell, *The Rational Mechanics of Flexible or Elastic Bodies 1638–1788*: Euler, *Opera Omnia* II/11.2, pp. 85–86.

22 Cf. Op. LXXIV, Epimetron VII (p. 104 h.v.). La réponse que Bernoulli rejette se trouve dans *Nouveau Journal des Scavans, dressé à Berlin* (édité par Etienne Chauvin), May & Juin 1697, Article XIII: *Nouvelles Litteraires*, pp. 292–293 (N.D.L.R.)

Op. CI

Positionum de Seriebus Infinitis Pars Quinta

Basileae, Typis Johann. Conradi a Mechel 1704 [UB Basel Kd III 17,10] – Jac. B. Opera, pp. 955–975

Viro Spectatissimo et Prudentissimo,

D. NICOLAO BERNOULLI, Fori Judicialis & Camerae Rationum Assessori Meritissimo, Seni Octogenario, Avo suo

Omni honoris & obsequii cultu jugiter prosequendo,

Has Studiorum suorum Primitias cum perennantis felicitatis voto sacras facit

NICOLAUS BERNOULLI,
Nic. Fil.

Cum non omnes quantitates surdae, nedum transcendentes, differentialibus admixtae praecedentibus modis in rationales transformari, inque series converti possint, ad alia subinde nobis artificia recurrendum est ad obtinendum propositum, inter quae ob universalitatem suam eminent Interpolationes Wallisianae, *vel* Exaltatio binomii ad potestatem indefinitam, *vel* Assumtio seriei fictae instar quaesitae, *aut consimilia subsidia alia, quorum pro re nata nunc unum nunc plura in usum verti queunt. Nos pauca eorum specimina post generalia nonnulla in uno alterove exemplo subjungemus.*

LIII. *Quantitatem quamcunque surdam vel irrationalem in seriem infinitam rationalium convertere per interpolationes Wallisianas*[1].

Reducatur quantitas rationalis, cujus potestas fracta sive radix aut latus quaeritur, ad fractionem hujus formae $\dfrac{l}{m-n}$ (ponendo $m>n$). Hujus fractionis potestates integrae, prima, secunda, tertia, &c. convertantur ope divisionis continuae[2] in totidem series, per XXXVI usque ad XL Propp. hoc pacto:

1 Cf. Med. CLXXIV (pp. 230–232 h.v.).
2 Sur la *division continue*, cf. e.p. Prop. XXXVII (pp. 88–90 h.v.).

POSITIONUM
DE
SERIEBVS INFINITIS
EARUMQUE USU
In
QUADRATURIS SPATIORUM
ET RECTIFICATIONIBUS
CURVARUM,
PARS QUINTA,
Quam
DEO BENEDICENTE,
Authorit. & Veniâ Sap. Philoſ. Ordinis,
Sub Præſidio
VIRI CLARISSIMI
D. JACOBI BERNOULLI, Math. P.
Utr. Soc. Reg. Scient. Gall. & Brandeb. Sodal.
Patrui ſui honoratiſſimi,
Publicè defendendam ſuſcipit
NICOLAUS BERNOULLI, *N. F.* Baſil.
Mag. Candid.
Ad diem 8 *Aprilis* *M DCCIV.*
Horis locoq; ſolitis.

BASILEÆ,
Typis JOHANN. CONRADI à MECHEL.

Titre de l'édition originale de Op. CI

Exp.	*Potest.*
0	$1 \infty 1 + 0 + 0 + 0 + 0$ &c.
1	$\dfrac{l}{m-n} \infty \dfrac{l}{m} + \dfrac{ln}{mm} + \dfrac{lnn}{m^3} + \dfrac{ln^3}{m^4} + \dfrac{ln^4}{m^5}$ &c.
2	$\dfrac{ll}{\mathrm{Q}:m-n} \infty \dfrac{ll}{mm} + \dfrac{2lln}{m^3} + \dfrac{3llnn}{m^4} + \dfrac{4lln^3}{m^5} + \dfrac{5lln^4}{m^6}$ &c.
3	$\dfrac{l^3}{\mathrm{C}:m-n} \infty \dfrac{l^3}{m^3} + \dfrac{3l^3n}{m^4} + \dfrac{6l^3nn}{m^5} + \dfrac{10l^3n^3}{m^6} + \dfrac{15l^3n^4}{m^7}$ &c.
4	$\dfrac{l^4}{\mathrm{Bq}:m-n} \infty \dfrac{l^4}{m^4} + \dfrac{4l^4n}{m^5} + \dfrac{10l^4nn}{m^6} + \dfrac{20l^4n^3}{m^7} + \dfrac{35l^4n^4}{m^8}$ &c.

In his seriebus observabis, coëfficientes primorum terminorum constituere unitates, coëfficientes secundorum numeros laterales, tertiorum trigonales, 4^{torum} pyramidales, & sic porro; terminos vero puros ordine oriri ex ductu fractionis $\frac{l}{m}$ (ad potestatem elevatae similem ei ad quam elevanda fractio $\frac{l}{m-n}$) in 1, $\frac{n}{m}$, $\frac{nn}{mm}$, $\frac{n^3}{m^3}$, &c. Hinc ad inveniendas potestates intermedias sive radices (ceu media quaedam geometrica, quorum exponentes sunt arithmetice medii inter exponentes integrorum) numeri terminorum figurati tantum sunt interpolandi juxta doctrinam Wallisii prop. 172 seqq. Arithm. Infin.[3] Est vero, posito exponente vel indice potestatis p, generalis character lateralium quoque p, trigonalium $\frac{p \cdot p+1}{1 \cdot 2}$, pyramidalium $\frac{p \cdot p+1 \cdot p+2}{1 \cdot 2 \cdot 3}$, &c. ut ibid. docetur prop. 182. Quare si p interpreteris per $\frac{1}{2}$, invenies potestatem dimidiam quantitatis $\frac{l}{m-n}$, nempe

$$\sqrt{\frac{l}{m-n}} \infty \sqrt{\frac{l}{m}} \text{ in } \overline{1 + \frac{1n}{2m} + \frac{1 \cdot 3nn}{2 \cdot 4mm} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5n^3}{2 \cdot 4 \cdot 6m^3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7n^4}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8m^4} + \&c.}$$

3 John Wallis, *Arithmetica Infinitorum*, Oxonii 1656, pp. 138–166, e.p. Prop. CLXXXIV, pp. 161–163; Wallis, *Opera Mathematica*, vol. I, Oxoniae 1695, pp. 443–461, e.p. pp. 459–460 (N.D.L.R.)

si p explices per $\frac{1}{3}$, habebis trientem potestatis seu

$$\sqrt{\text{C.}\, \frac{l}{m-n}} \;\text{ꝏ}\; \sqrt{\text{C.}\, \frac{l}{m}} \text{ in } \overline{1 + \frac{1n}{3m} + \frac{1\cdot 4nn}{3\cdot 6mm} + \frac{1\cdot 4\cdot 7n^3}{3\cdot 6\cdot 9m^3} + \frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot 10n^4}{3\cdot 6\cdot 9\cdot 12m^4} + \&\text{c.}}$$

si per $\frac{3}{2}$, obtinebis sesquialteram potestatem seu

$$\frac{l}{m-n}\sqrt{\frac{l}{m-n}} \;\text{ꝏ}\; \frac{l}{m}\sqrt{\frac{l}{m}} \text{ in } \overline{1 + \frac{3n}{2m} + \frac{3\cdot 5nn}{2\cdot 4mm} + \frac{3\cdot 5\cdot 7n^3}{2\cdot 4\cdot 6m^3} + \frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9n^4}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8m^4} + \&\text{c.}}$$

&c.

Cor. Quoniam positis l, m & n aequalibus inter se, fit quantitas $\frac{l}{m-n}$ ꝏ $\frac{l}{0}$ ꝏ ∞, series autem praedictae abeunt in series purorum coëfficientium $1+\frac{1}{2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}$ &c., $1+\frac{1}{3}+\frac{1\cdot 4}{3\cdot 6}+\frac{1\cdot 4\cdot 7}{3\cdot 6\cdot 9}$ &c., $1+\frac{3}{2}+\frac{3\cdot 5}{2\cdot 4}+\frac{3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6}$ &c. colligimus, series ejusmodi natas ex ductu continuo fractionum, quarum numeratores & denominatores in progress. arithm. per differentias primo denominatori aequales insurgunt, summas fundere infinitas; quod apertius ita constabit: Minue numeratores, eosque aequales constitue denominatoribus singulos singulis, nempe secundum numeratorem primo denominatori, tertium secundo, 4^{tum} 3^{tio}, & ita deinceps; sic enim ex gr. loco primae seriei habebis $1+\frac{1}{2}+\frac{1\cdot 2}{2\cdot 4}+\frac{1\cdot 2\cdot 4}{2\cdot 4\cdot 6}+\frac{1\cdot 2\cdot 4\cdot 6}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}$ &c. ꝏ (perimentibus se mutuo dictis numeris) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}$ &c. ꝏ ∞, per Cor. 2 XVI, unde fortius altera $1+\frac{1}{2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}$ &c. ob numeratores majores infinita erit. Caeterum postremus terminus cujusque seriei nunc nullus est nunc infinitus, prout exponens potestatis p, vel prima seriei fractio, unitate minor est majorve: Sic ultimus terminus primae seriei $\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}$ &c. nullus est; nam si quantus esset, etiam hic foret quantus $\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}$ &c. utpote cujus singuli factores singulis factoribus praecedentis termini ordine sumtis sunt majores; quare & utriusque productum quantum foret, np. $\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}$ in $\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}$ &c. ꝏ (permistis alternatim utriusque factoribus) $\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\ \dots\ \infty-1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\ \dots\ \infty}$ ꝏ (ob numeratores omnes primum sequentes, & denominatores ultimum praecedentes se mutuo perimentes) $\frac{1}{\infty}$ ꝏ 0 quod absurdum. Ultimus contra terminus tertiae seriei $\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}$ &c. infinitus est; nam si finitus esset, etiam hic foret finitus $\frac{4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}$ &c. utpote cujus singuli factores singulis illius sunt minores; quocirca & utriusque productum finitum foret, nempe $\frac{3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6}$&c. in $\frac{4\cdot 6\cdot 8}{3\cdot 5\cdot 7}$&c. $\propto \frac{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6 \ldots \infty}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 \ldots \infty-1} \propto$ (destruentibus se mutuo numeratoribus qui ultimum praecedunt, & denominatoribus qui primum sequuntur) $\frac{\infty}{2} \propto \infty$, quod pariter absurdum.

LIV. *Idem praestare per exaltationem binomii ad potestatem indefinitam.*

Quantitas rationalis, cujus potestas per seriem desideratur, sit expressa per binomium $1+n$ (ponendo $1 > n$). Hujus binomii potestas indefinita p, ut jam passim inter Geometras notum, per seriem exprimitur

$$1 + \frac{p}{1}n + \frac{p\cdot p-1}{1\cdot 2}nn + \frac{p\cdot p-1\cdot p-2}{1\cdot 2\cdot 3}n^3 + \frac{p\cdot p-1\cdot p-2\cdot p-3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}n^4 + \&c.$$

ubi perspicuum est, quod quotiescunque exponens potestatis p est numerus integer & positivus, series necessario aliquando abrumpetur; quandoquidem in continuatione ulteriori coëfficientium p, $p-1$, $p-2$, &c. necessario tandem devenietur ad $p-p \propto 0$; quod proin illum terminum & ab illo deinceps omnes evanescere facit. Sed quoties p numerus fractus est aut negativus, coëfficientes nunquam in nihilum abibunt, ac ideo series in infinitum excurret: qua ratione habetur ex. gr.

$$\sqrt{1+n} \text{ (ubi } p \text{ valet } \tfrac{1}{2}) \propto 1 + \tfrac{1}{2}n - \tfrac{1}{2\cdot 4}nn + \tfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}n^3 - \tfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}n^4 + \&c.$$

$$\& \sqrt{C.1+n} \text{ (ubi } p \text{ valet } \tfrac{1}{3}) \propto 1 + \tfrac{1}{3}n - \tfrac{2}{3\cdot 6}nn + \tfrac{2\cdot 5}{3\cdot 6\cdot 9}n^3 - \tfrac{2\cdot 5\cdot 8}{3\cdot 6\cdot 9\cdot 12}n^4 + \&c.$$

$$\& \frac{1}{\sqrt{1+n}} \text{ (ubi } p \text{ notat } -\tfrac{1}{2}) \propto 1 - \tfrac{1}{2}n + \tfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}nn - \tfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}n^3 + \tfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}n^4 - \&c.$$

& pariter in caeteris.

Nota, quod exaltatio binomii ad potestatem indefinitam & interpolationis negotium reapse in idem recidunt, unoque & eodem nituntur fundamento, quod consistit in proprietate quadam numerorum figuratorum supra jam praelibata Propos. XIX, sed cujus demonstrationem, ne hic nimii simus, in aliam occasionem reservamus[4].

4 La sommation des séries finies de nombres figurés se trouve démontrée dans *Ars Conjectandi*, Pars secunda, Cap. III: Jac. B. *Werke* 3, pp. 162–164 (N.D.L.R.)

LV. *Duarum quantitatum indeterminatarum relationem unius ad alteram per seriem exprimere, ope assumtae seriei fictae instar quaesitae*[5].

Ponatur alterutra indeterminatarum x & y, quarum relatio ad se invicem quaeritur, puta y, aequari seriei $a+bx+cxx+ex^3+fx^4$, &c. aut $a+bxx+cx^4+ex^6$, &c. aut $a+bx^4+cx^8+ex^{12}$, &c. aut simili, prout opus videbitur; atque tum in quantitate vel aequatione proposita loco y substituatur haec series, nec non loco dy & ddy, &c. seriei differentiale aut differentio-differentiale, &c. quo facto ex comparatione homologorum terminorum determinari poterunt assumti coëfficientes a, b, c, &c. Sequuntur Exempla:

LVI. *Invenire relationem coordinatarum Curvae Elasticae per seriem*[6]. (Fig. 7)

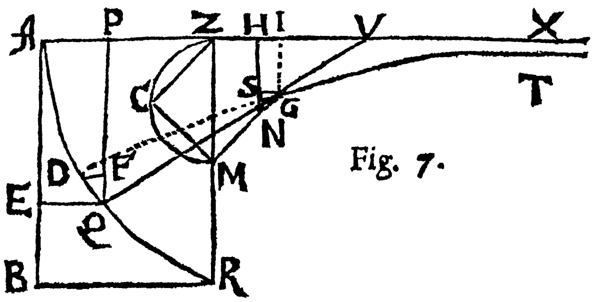


Fig. 7.

Flectatur Elater in curvaturam AQR a potentia applicata in A, & trahente juxta directionem AZ; sitque AB vel[7] [RZ] ∞ a, AE vel PQ ∞ x, AP vel EQ ∞ y, & AQ ∞ z; ostensum est[8] in Act. Lips. 1694, p. 272, & 1695, p. 538, naturam hujus curvae exprimi aequatione $dy \infty \frac{xx\,dx}{\sqrt{a^4-x^4}}$, e qua qui methodo Diophanti, qua in praeced. part. usi fuimus, irrationalitatem tollere vellet, aetatem consumeret;

5 Cf. G.W. Leibniz, *Supplementum Geometriae practicae* ...: AE Aprilis 1693, pp. 178–180 – *Math. Schriften* V, pp. 285–288. Cf. aussi C. Truesdell, *The Rational Mechanics of Flexible or Elastic Bodies 1638–1788*: Euler, *Opera Omnia* II/11.2, pp. 88–96.

6 Cf. Med. CLXXV (pp. 233–234 h.v.). Sur la courbe *élastique*, dont Bernoulli avait donné, mais en langage chiffré, l'équation différentielle dès 1691 (v. Op. XLII, *Opera*, p. 452; à publier dans *Werke* 5), cf. Op. LVIII, *Opera*, pp. 576–600, et Op. LXVI, *Opera*, pp. 639–663; ces deux travaux seront repris dans *Werke* 6.

7 Dans la publication originale, il y a la faute d'impression «AZ ∞ *a*»; elle a été corrigée dans les *Errata* de la même publication et aussi dans les *Opera* (N.D.L.R.)

8 Les deux références se rapportent respectivement à Op. LVIII, p. 592 des *Opera* (où se trouve expliqué le *logogriphe* de Op. XLII), et à Op. LXVI, p. 641 des *Opera*, où l'équation différentielle de l'*Elastica* est énoncée sous la forme même sous laquelle elle est citée ici.

cum deprehensum sit a Geometris, summam vel differentiam duorum biquadratorum, qualis est $a^4 - x^4$, nunquam posse constituere quadratum[9]: Quare nobis confugiendum est vel ad Interpolationes, vel ad indefinitam Potentiam binomii, hoc pacto:

1. Mod. Interpretemur x^4 tam per l, quam per n, & a^4 per m; erit $\dfrac{x^4}{a^4 - x^4} \propto \dfrac{l}{m-n}$; unde per LIII habetur $\sqrt{\dfrac{l}{m-n}}$, id est, $\sqrt{\dfrac{x^4}{a^4-x^4}}$ aut

$$\frac{xx}{\sqrt{a^4-x^4}} \propto \frac{xx}{aa} + \frac{1x^6}{2a^6} + \frac{1\cdot 3x^{10}}{2\cdot 4a^{10}} + \frac{1\cdot 3\cdot 5x^{14}}{2\cdot 4\cdot 6a^{14}} + \&c.$$

& (facta multiplicatione per dx) $\dfrac{xx\,dx}{\sqrt{a^4-x^4}}$ seu

$$dy \propto \frac{xx\,dx}{aa} + \frac{1x^6dx}{2a^6} + \frac{1\cdot 3x^{10}dx}{2\cdot 4a^{10}} + \frac{1\cdot 3\cdot 5x^{14}dx}{2\cdot 4\cdot 6a^{14}}\ \&c.$$

& denique summando, AP seu

$$y \propto \frac{x^3}{3aa} + \frac{1x^7}{2\cdot 7a^6} + \frac{1\cdot 3x^{11}}{2\cdot 4\cdot 11a^{10}} + \frac{1\cdot 3\cdot 5x^{15}}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 15a^{14}} + \&c.$$

2. Mod. Explicemus nunc a per 1, & $-x^4$ per n; erit $a^4 - x^4 \propto 1+n$, & $\dfrac{1}{\sqrt{a^4-x^4}} \propto \dfrac{1}{\sqrt{1+n}}$: unde per LIV fit

$$\frac{1}{\sqrt{1+n}} \text{ seu } \frac{1}{\sqrt{a^4-x^4}} \propto 1 + \tfrac{1}{2}x^4 + \tfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^8 + \tfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^{12} + \&c.$$

& (multipl. per $xx\,dx$)

$$\frac{xx\,dx}{\sqrt{a^4-x^4}} \propto xx\,dx + \tfrac{1}{2}x^6dx + \tfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^{10}dx + \tfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^{14}dx + \&c.$$

9 Cf. *Diophanti Alexandrini Arithmeticorum libri sex .... Cum commentariis C. G. Bacheti V. C. et observationibus D. P. de Fermat ...*, Tolosae 1670, pp. 338–339 – *Œuvres de Fermat* publiées par P. Tannery et Ch. Henry, vol. I, Paris 1891, p. 341.

& integrando, $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2\cdot 7}x^7 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 11}x^{11} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 15}x^{15}$ + &c.

seu denique supplendo unitatem,

$$\frac{x^3}{3aa} + \frac{1x^7}{2\cdot 7a^6} + \frac{1\cdot 3x^{11}}{2\cdot 4\cdot 11a^{10}} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 15a^{14}} + \&c. \qquad \text{ut antea.}$$

Cor. Sumta $x \propto a \propto 1$, fit tota AZ $\propto \frac{1}{3} + \frac{1}{2\cdot 7} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 11} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 15}$ + &c. Conf.[10] Act. Lips. 1694, p. 274 & 369.

LVII. *Rectificare eandem Curvam per seriem.* (Fig. 7)

Quia aequatio curvae, ut dictum, est $dy \propto \frac{xx\,dx}{\sqrt{a^4 - x^4}}$, fiet quadrando

$$dy^2 \propto \frac{x^4dx^2}{a^4 - x^4},\ \&\ dz^2 \propto dy^2 + dx^2 \propto \frac{x^4dx^2}{a^4 - x^4} + dx^2 \propto \frac{a^4dx^2}{a^4 - x^4},$$

adeoque $dz \propto \frac{aa\,dx}{\sqrt{a^4 - x^4}}$. Exponamus a^4 nunc per l, nunc per m, & x^4 per n, erit

$$\frac{aa}{\sqrt{a^4 - x^4}} \text{ seu } \sqrt{\frac{a^4}{a^4 - x^4}} \propto \sqrt{\frac{l}{m-n}};$$

unde per LIII fit

$$\sqrt{\frac{l}{m-n}} \text{ sive } \sqrt{\frac{a^4}{a^4 - x^4}} \propto 1 + \frac{1x^4}{2a^4} + \frac{1\cdot 3x^8}{2\cdot 4a^8} + \frac{1\cdot 3\cdot 5x^{12}}{2\cdot 4\cdot 6a^{12}} + \&c.$$

& (multipl. per dx)

$$\frac{aa\,dx}{\sqrt{a^4 - x^4}} \text{ seu } dz \propto dx + \frac{1x^4dx}{2a^4} + \frac{1\cdot 3x^8dx}{2\cdot 4a^8} + \frac{1\cdot 3\cdot 5x^{12}dx}{2\cdot 4\cdot 6a^{12}} + \&c.$$

tandemque summando

$$z \text{ sive AQ} \propto x + \frac{1x^5}{2\cdot 5a^4} + \frac{1\cdot 3x^9}{2\cdot 4\cdot 9a^8} + \frac{1\cdot 3\cdot 5x^{13}}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 13a^{12}} + \&c.$$

Idem etiam per LIV simili modo ostendetur.

Cor. Facta $x \propto a \propto 1$, habetur tota AQR $\propto 1 + \frac{1}{2\cdot 5} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 9} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 13}$ + &c.; vid.[11] Act. Lips. 1694, p. 274.

10 Ces références se rapportent respectivement à Jac. B. Op. LVIII, *Opera*, p. 596, et à G. W. Leibniz, *Constructio propria Problematis de Curva Isochrona Paracentrica* ... (*Math. Schriften* V, p. 313; reproduit comme Op. 64 dans Jac. B. *Opera*, p. 632).

11 V. Op. LVIII, *Opera*, p. 596, à publier dans *Werke* 6.

LVIII. *Definire limites praecedentium serierum*[12]. (Fig. 7)

Quoniam series his methodis repertae nimis lente convergunt[13], non abs re erit, si modum ostendam, quo levi labore summis earum, quantum ad usum sufficit, approximare & limites constituere possimus. In exemplum propositae sint proximae duae series, quibus exprimitur applicata Elasticae BR vel AZ, & longitudo ipsius curvae AR, nempe:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{2\cdot 7}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 11}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 15}+\&c., \ \& \ 1+\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 9}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 13}+\&c.$$

Sumo quantitatem, cujus integrale haberi possit, datis $\dfrac{xx\,dx}{\sqrt{a^4-x^4}}$ & $\dfrac{aa\,dx}{\sqrt{a^4-x^4}}$, e quibus series propositae fluxerunt, affinem, puta $\dfrac{x^3dx}{\sqrt{a^4-x^4}}$, cujus integrale est $\dfrac{aa-\sqrt{a^4-x^4}}{2}$, eamque pari methodo in seriem resolvo, & seriei terminis summatis pro x & a unitatem pono; quo pacto series emerget: $\frac{1}{4}+\frac{1}{2\cdot 8}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 12}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 16}+\&c.$ aequalis proinde $\dfrac{aa-\sqrt{a^4-x^4}}{2} \propto \dfrac{1}{2}$ seu 0.5000000. Colligo jam singularum serierum terminos aliquot ab initio in unam summam (quod expedite fit per Logarithmos) ex. gr. decem primos terminos, qui collecti efficiunt in prima serie 0.5102560: in secunda serie 1.2207187: in tertia 0.4119014. Hujus igitur reliqui post decimum termini (ad complendum $\frac{1}{2}$ seu 0.5000000) constituent 0.0880986, qui numerus additus summae 10 primorum terminorum in pr. & sec. serie exhibet 0.5983546 & 1.3088173, summis totarum serierum justo minores, ob singulos tertiae seriei terminos minores homologis terminis reliquarum.

Deinde, quia undecimi termini in tribus istis seriebus sunt

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11\cdot 13\cdot 15\cdot 17\cdot 19}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12\cdot 14\cdot 16\cdot 18\cdot 20\cdot 43},\ \frac{1\cdot 3\cdot 5\ \ldots\ 19}{2\cdot 4\cdot 6\ \ldots\ 20\cdot 41},\ \frac{1\cdot 3\cdot 5\ \ldots\ 19}{2\cdot 4\cdot 6\ \ldots\ 20\cdot 44},$$

12 Cf. Med. CCXVII (pp. 247–248 h.v.), dont le résultat final est cité en 1694 dans Op. LVIII (*Opera*, p. 596). L'évaluation donnée par Bernoulli pour ses deux séries est assez grossière; Cramer cite ici les évaluations 0.59907011736779611 et 1.31102877714605987, qu'il attribue à Stirling.
Cf. J. Stirling, *Methodus Differentialis: sive Tractatus de Summatione et Interpolatione Serierum Infinitarum*, Londini 1730, Exempla III et IV, pp. 56–58, où les bornes de Bernoulli sont aussi mentionnées (N.D.L.R.)

13 On notera ici l'apparition de ce terme (la première, semble-t-il, dans les écrits de Jacob sur les séries).

liquet terminum hunc in serie tertia ad eundem in serie prima reciproce esse ut 43 ad 44, & ad eundem in secunda ut 41 ad 44; terminorum vero sequentium singulos in 3^{tia} serie ad ejusdem ordinis terminos in reliquis seriebus habere rationem majorem quam 43 ad 44, & quam 41 ad 44: unde & summa omnium sequentium decimum in 3^{tia} serie ad summam omnium post decimum in reliquis seriebus majorem rationem habebit. Idcirco si fiat, ut 43 ad 44, nec non ut 41 ad 44, ita summa terminorum post decimum in 3^{tia} serie, nimirum 0.0880986 ad 0.0901474 & ad 0.0945448; erunt hi numeri majores summis terminorum decimum sequentium in 1 & 2^{da} serie: quapropter si addantur summis 10 priorum, quae sunt 0.5102560 & 1.2207187, erunt quoque numeri provenientes 0.6004034 & 1.3152635 majores summis totarum serierum.

Reperti ergo sunt limites, quibus summae 1 & 2^{dae} seriei definiuntur: limites illius sunt 0.5983546 & 0.6004034; hujus 1.3088173 & 1.3152635: unde applicata BR vel AZ major est quam 0.598, & minor quam 0.601; ipsa vero curva AR $>$ 1.308, & $<$ 1.316, sic ut tres istae lineae RZ, AZ & AQR proxime se habeant ut 10, 6, 13. Conf.[14] Act. Lips. 1694, p. 274.

Schol. Quoniam ex natura descensus gravium demonstratur, quod tempus descensus penduli alicujus per quadrantem circuli ad tempus descensus perpendicularis per ejus radium eam rationem habet, quam habet Curva Elastica AR ad ejus axem[15] RZ, h.e. majorem, ut ostendimus, quam 1308 ad 1000, & minorem quam 1316 ad 1000: tempus autem descensus perpendicularis per circuli radium ad tempus per semiradium se habet, ut $\sqrt{2}$ ad 1: & tempus per semiradium ad tempus per arcum minimum (consentiente Hugenio in Horol. Oscillat.[16] p. 155) ut diameter circuli ad ejus semiperipheriam, h.e. ut 226 ad 355:

14 V. encore Op. LVIII, *Opera*, p. 596 (N.D.L.R.)

15 Le calcul n'offre pas de difficulté à partir des principes posés dans l'*Horologium Oscillatorium* de Huygens (v. Huygens, *Œuvres*, t. XVIII, pp. 69–368).
A titre d'échantillon des annotations de Cramer dans les *Opera* de 1744, voici comment celui-ci le présente:
«Sit $s = \int (a\,du : \sqrt{(aa-uu)})$ arcus circuli, cujus sinus $= u$, radius $= a$; & quia celeritas gravis delapsi per altitudinem u est $\sqrt{u}$, erit tempus descensus per arcum ad tempus descensus per sinum ut $\int (ds : \sqrt{u})$ ad $\int (du : \sqrt{u})$, hoc est ut $\int (a\,du : \sqrt{(aau-u^3)})$ ad $\int (du : \sqrt{u})$. Pone $u = xx : a$, & erunt tempora descensus per arcum & per sinum,

ut $$\int (2x\,dx : \sqrt{(axx - x^6 : a^3)}) = \int (2a\,dx \sqrt{a} : \sqrt{(a^4 - x^4)})$$

ad $$\int \frac{2x\,dx : a}{\sqrt{(xx : a)}} = \int 2dx : \sqrt{a},$$

hoc est, multiplicando utrumque terminum per $\frac{1}{2}\sqrt{a}$, ut $\int (aa\,dx : \sqrt{(a^4 - x^4)})$ ad $\int dx = x$, sive, per Prop. LVII, ut arcus AQ Elasticae ad ejus abscissam AE vel PQ. Itaque, quando $x = a = u$, tempus descensus per quadrantem est ad tempus descensus per radium, ut curva Elastica AR ad ejus axem AB vel RZ.»

16 *op. cit. supra* note 15, Prop. XXVI, p. 355.

inferri potest ex aequo, quod tempus descensus penduli per quadrantem integrum ad tempus descensus ejus per arcum minimum se habet in ratione majore quam 3400 ad 2888, & in minore quam 3400 ad 2869; unde rationem 3400 ad 2900, sive 34 ad 29, quam praefatus Auctor[17] ibid. pag. 9 temporibus horum descensuum assignat, extra hos limites cadere liquet.

LIX. *Dati Logarithmi Numerum invenire per seriem.* (Fig. 1)

Intelligatur Curva Logarithmica PCQ, cujus axis AD, subtangens constans $\infty\, t$, applicata BC ∞ 1, Logarithmus datus BI (Bι) $\infty\, x$, ejusque Numerus IO (ιo) $\infty\, y$; erit ex generali curvarum natura $\mp\, dy\,.\,dx :: y\,.\,t$, adeoque $y \infty \mp \dfrac{t\,dy}{dx}$. Fiat juxta praescriptum Prop. LV, $y \infty 1 + bx + cxx + ex^3 + fx^4$ &c. & differentiando, $\dfrac{dy}{dx} \infty\, b + 2cx + 3exx + 4fx^3$ &c. eritque $1 + bx + cxx + ex^3 + fx^4$, &c. $\left(\infty\, y \infty \mp \dfrac{t\,dy}{dx}\right)$ $\infty \mp bt \mp 2ctx \mp 3etxx \mp 4ftx^3 \mp 5gtx^4$, &c. & facta comparatione homologorum terminorum elicietur,

$$b \infty \mp \frac{1}{t},$$

$$c\left(\infty \mp \frac{b}{2t}\right) \infty \frac{1}{1\cdot 2tt},$$

$$e\left(\infty \mp \frac{c}{3t}\right) \infty \mp \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3t^3},$$

$$f\left(\infty \mp \frac{e}{4t}\right) \infty \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4t^4},\ \text{\&c.}$$

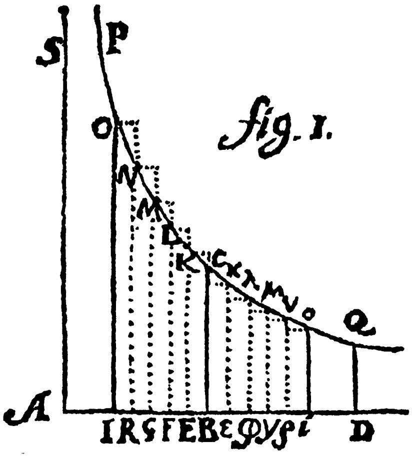
unde valoribus istis coëfficientium b, c, e, &c. substitutis resultat

$$y \infty 1 \mp \frac{x}{t} + \frac{xx}{1\cdot 2tt} \mp \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3t^3} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4t^4} \mp \text{\&c.}$$

Conf.[18] Act. Lips. 1693, p. 179.

17 *op. cit. supra* note 15, p. 101.
Cramer fait observer qu'au moyen des valeurs données par Stirling (v. note 12 *supra*) pour les séries en question, on obtiendrait ici le rapport de 34 à 28.800524430242689441, donc une valeur assez proche de celle indiquée par Huygens («salvo errore calculi», ajoute Cramer prudemment).

18 *op. cit. supra* note 5 (v. Leibniz, *Math. Schriften* V, p. 286), où en effet la série exponentielle est obtenue par la méthode même des coefficients indéterminés, que Bernoulli emprunte ici à Leibniz.



Aliter idem absque differentialium adminiculo[19]: Concipiatur Log-us BI (Bι) divisus in partes quotlibet aequales BE, EF, FG, &c. (Bε, εφ, φγ, &c.) quarum numerus sit n, & singulae dicantur d, sic ut nd sit ∞ BI (Bι) $\infty\, x$. Tum applicatis curvae rectis totidem EK, FL, GM, &c. (εκ, φλ, γμ, &c.) jungantur extremitates C & K (κ) duarum BC, EK (εκ) per rectam CK (Cκ), sitque axis portio inter productam CK (Cκ) & applicatam BC intercepta $\infty\, t$; quo pacto propter triangula similia fiet $t.1$ (BC) :: $t \, 8 \, d . 1 \, 8 \frac{d}{t} \infty$ EK (εκ). Et quoniam ob aequales BE, EF, FG, &c. (Bε, εφ, φγ, &c.) ipsae BC, EK, FL, &c. (BC, εκ, φλ, &c.) in continua sunt proportione, earumque prima BC ∞ 1, idcirco designabit FL (φλ) secundam potestatem, GM (γμ) tertiam, RN (ρν) quartam, &c. tandemque ultima IO (ιο) seu y ipsam n potestatem applicatae EK (εκ) seu $1 \, 8 \frac{d}{t}$ (pro numero vid. particularum, in quas divisa est BI (Bι)); quae quidem potestas per LIV reperitur

$$\infty\ 1 \ 8 \ \frac{nd}{t} + \frac{n \cdot n-1 \cdot dd}{1 \cdot 2tt} \ 8 \ \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot d^3}{1 \cdot 2 \cdot 3t^3} + \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot n-3 \cdot d^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4t^4} \ 8 \ \text{\&c.}$$

Quod si jam numerus particularum n ponatur infinitus, producta CK (Cκ) abibit in tangentem, & ipsa t in subtangentem Logarithmicae, atque praeterea numeri

19 Cf. Med. CLXXVII (p. 235 h.v.).

1, 2, 3, &c. evanescent prae n, sic ut $n-1$, $n-2$, $n-3$, &c. tantundem valeant ac n: quare tum fiet

$$y \infty 1 \pm \frac{nd}{t} + \frac{nndd}{1\cdot 2tt} \pm \frac{n^3d^3}{1\cdot 2\cdot 3t^3} + \frac{n^4d^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4t^4} \pm \text{\&c.}$$

$$\infty \text{ (propter } nd \infty x) \; 1 \pm \frac{x}{t} + \frac{xx}{1\cdot 2tt} \pm \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3t^3} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4t^4} \pm \text{\&c.}$$

ut supra.

Nota, quod existente $x > t$, termini quidem seriei aliquousque crescunt, tandem tamen decrescere pedetentim occipiunt, ultimoque vergunt in nihilum. Nam sumtis ab initio m terminis, erit ex lege progressionis sumtorum ultimus $\frac{x^{m-1}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots \overline{m-1}\cdot t^{m-1}}$, & sequens ultimum $\frac{x^m}{1\cdot 2\cdot 3 \dots mt^m}$; adeoque ratio illius ad hunc, ut mt ad x: unde cum ratio t ad x determinata sit, numerus vero terminorum m usque & usque major possit accipi, ratio quoque mt ad x tandem quavis data major fiet. Existente autem $x \infty$ vel $< t$, series ista, & aliae hujus generis, statim ab initio celerrime convergunt, eoque celerius quo minor x: unde discimus quod multo commodius & minori cum labore Logarithmorum Canon adornari possit, si per hanc Prop. ex Log-is datis Numeri, quam si vicissim per XLVII ex Numeris datis Log-i quaerantur. Quanquam & illic compendium sese nobis offerat non contemnendum, quod quia in dicta Propos. intactum praeteriit, breviter hic indicandum restat: Quoniam positis in Logarithmica (fig. 6) AB ∞a, subtang. AK ∞t, BI ∞u, & Bι ∞s, adeoque RE $\infty a-u$, & ρε $\infty a+s$, invenitur per XLVII,

$$\text{AR (Log-us RE)} \infty t \text{ in } \overline{\frac{u}{a} + \frac{uu}{2aa} + \frac{u^3}{3a^3} + \frac{u^4}{4a^4} + \text{\&c.}}$$

& $$\text{A}\rho \text{ (Log-us } \rho\varepsilon) \infty t \text{ in } \overline{\frac{s}{a} - \frac{ss}{2aa} + \frac{s^3}{3a^3} - \frac{s^4}{4a^4} + \text{\&c.}}$$

sequitur ex natura Log-micae, has duas series inter se aequari, si tres applicatae RE, AB, ρε, seu $a-u$, a & $a+s$ continue proportionentur, h.e. si statuatur $u \infty \frac{as}{a+s}$; sed quia per hanc hypothesin perpetuo fit $u < s$, & nominatim hac sumta ∞a, $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{3}a$, &c. illa fit $\infty \frac{1}{2}a$, $\frac{1}{3}a$, $\frac{1}{4}a$, &c. multo semper celerius prior series converget posteriore: unde plurimum laboris in practica effectione logorum rescindi poterit, si loco hujus illa surrogetur, ex. gr. si (facta $s \infty a$) loco seriei $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-$ &c. hoc est, loco $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{3\cdot4}+\frac{1}{5\cdot6}+\frac{1}{7\cdot8}+$ &c. substituatur $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot4}+\frac{1}{3\cdot8}+\frac{1}{4\cdot16}+\frac{1}{5\cdot32}+$ &c. quippe per cujus primos 18 terminos tantundem approximatur, quantum per mille terminos alterius; quod ipsum etiam ad Cor. 3 XLVII in subtangente Log-micae definienda observabitur. Sed rei utilissimae uberiorem explicationem angustia paginae non permittit.

Schol.[20] Si summa quaedam pecuniae foenori elocata sit, ea lege, ut singulis momentis pars proportionalis usurae annuae in sortem computetur; exponatur autem ipsa sors per BC seu 1, tempus annuum per BI seu x divisum in punctis E, F, G, &c. in momenta innumera aequalia, atque usura annua per $\frac{x}{t}$; inventa series
$$1+\frac{x}{t}+\frac{xx}{1\cdot2tt}+\frac{x^3}{1\cdot2\cdot3t^3}+\text{\&c.}$$
hoc est (explicata sorte 1 per a, & usura $\frac{x}{t}$ per b),
$$a+b+\frac{bb}{2a}+\frac{b^3}{2\cdot3aa}+\frac{b^4}{2\cdot3\cdot4a^3}+\text{\&c.}$$
indicabit valorem ejus, quod finito anno debebitur. Cum enim, ut tempus annuum BI ad primum ejus momentum BE, seu ut x ad d, ita se habeat usura annua $\frac{x}{t}$ ad partem proportionalem usurae, erit haec $\frac{d}{t}$, significabitque $1+\frac{d}{t}$ seu applicata EK sortem dicta parte proportionali usurae auctam: unde sors aucta EK secundo momento pariet FL, & haec pariter tertio momento pariet GM, & sic porro, propter BC, EK, FL, GM, &c. $\div\!\!\div$. Quare postrema applicata IO, quam series inventa exprimit, denotabit valorem ejus, quod creditori elapso toto anno debetur. Conf.[21] Act. Lips. 1690, p. 222.

LX. *Invenire aream spatii comprehensi a Curva genitrice Elasticae, seu quae evolutione sui Elasticam describit*[22]. (Fig. 7)

Describatur Elastica AQR ex evolutione Curvae MNT, & sit filum evolvens QN (DG), quod productum secet axem in V; ponaturque, ut supra, RZ ∞ a, PQ ∞ x, AP ∞ y. Quoniam ex Act. Lips. 1694, p. 273, manifestum est[23], quod

20 Cf. Med. CL, *Werke* 3, pp. 94–97, et pp. 202–205 h.v.
21 V. Op. XL, *Werke* 3, pp. 91–93, et pp. 160–163 h.v.
22 Cf. Med. CLXX (pp. 223–227 h.v.). Par «Curva genitrix» d'une courbe (p.ex. de l'*Elastica*) il faut entendre sa développée, c'est-à-dire l'enveloppe de ses normales.
23 V. Op. LVIII, *Opera*, p. 593, à publier dans *Werke* 6.

QN $\infty\frac{1}{2}$ QV, erit & NH $\infty\frac{1}{2}$ PQ $\infty\frac{1}{2}\,x$, & NS $\infty\frac{1}{2}$ FQ $\infty\frac{1}{2}\,dx$; ac proinde ob ang. rect. DQN,

$$\mathrm{DF}.\mathrm{FQ}\ (::dy.dx::[\text{ex natura Elasticae}]\ xx.\sqrt{a^4-x^4})$$

$$::\tfrac{1}{2}\,dx\ (\mathrm{NS}).\frac{dx\sqrt{a^4-x^4}}{2xx}\ \infty\ \mathrm{SG}\ \text{vel}\ \mathrm{HI}.$$

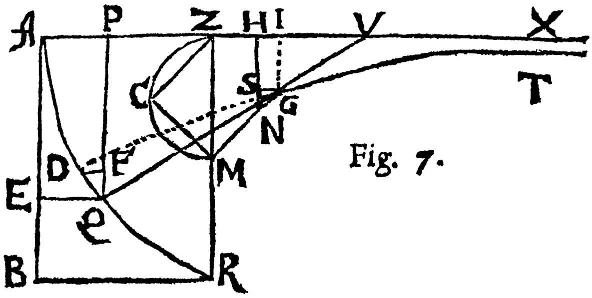


Fig. 7.

Quare HI in NH seu $\square$ NI

$$\infty\ \frac{x\,dx\sqrt{a^4-x^4}}{4xx}\ \infty\ \frac{\overline{a^4x-x^5},dx}{4xx\sqrt{a^4-x^4}}\ \infty\ \frac{a^4x\,dx}{4xx\sqrt{a^4-x^4}}-\frac{x^3dx}{4\sqrt{a^4-x^4}}$$

∞ Elemento spatii MNHZ, de cujus summatione jam agitur. Posterioris membri $\frac{x^3dx}{4\sqrt{a^4-x^4}}$ integrale pertinens ad partem curvae RQ vel MN est $\frac{1}{8}\sqrt{a^4-x^4}$. Prius autem $\frac{a^4x\,dx}{4xx\sqrt{a^4-x^4}}$ cum absolute summari nequeat, sublata irrationalitate in seriem convertetur, ut sequitur.

Ponatur $\sqrt{a^4-x^4}\ \infty\ \frac{txx}{a}-aa$, fiet $xx\ \infty\ \frac{2a^3t}{aa+tt}$, & differentiando

$$-x\,dx\ \infty\ \frac{\overline{a^3tt-a^5},dt}{\mathrm{Q}:aa+tt};$$

nec non $$\frac{txx}{a}-aa\ (\sqrt{a^4-x^4})\ \infty\ \frac{aatt-a^4}{aa+tt},$$

& denique $$\frac{-a^4x\,dx}{4xx\sqrt{a^4-x^4}}\ \infty\ \frac{aa\,dt}{8t}.$$

Jam quia existente maxima $x \infty a$, ipsa quoque $t \infty a$, & illa decrescente crescit haec, statuatur $t \infty a+s$, ut sit

$$\frac{aa\,dt}{8t} \infty \frac{aa\,ds}{8a+8s} \infty \frac{aa}{8} \text{ in } \frac{ds}{a+s} \infty \frac{aa}{8} \text{ in } \overline{\frac{ds}{a} - \frac{s\,ds}{aa} + \frac{ss\,ds}{a^3} - \frac{s^3ds}{a^4} + \&\text{c.}},$$

per XXXVII: unde facta summatione habetur

$$\mathbf{S}\frac{aa\,dt}{8t}$$

$\left(\infty\, \mathbf{S}\dfrac{a^4x\,dx}{4xx\sqrt{a^4-x^4}}\right.$, dissimulato nempe signo $-$, quod hic nota tantum est respectivi decrementi ipsarum x)

$$\infty \frac{aa}{8} \text{ in } \overline{\frac{s}{a} - \frac{ss}{2aa} + \frac{s^3}{3a^3} - \frac{s^4}{4a^4} + \&\text{c.}}$$

demtoque $\mathbf{S}\dfrac{x^3dx}{4\sqrt{a^4-x^4}} \infty \frac{1}{8}\sqrt{a^4-x^4}$, resultat

$$\mathbf{S}\frac{a^4x\,dx}{4xx\sqrt{a^4-x^4}} - \mathbf{S}\frac{x^3dx}{4\sqrt{a^4-x^4}} \infty$$

$$\frac{aa}{8} \text{ in } \overline{\frac{s}{a} - \frac{ss}{2aa} + \frac{s^3}{3a^3} - \frac{s^4}{4a^4} + \&\text{c.}} - \frac{1}{8}\sqrt{a^4-x^4}$$

spatio nempe quaesito MNHZ. Et quia, sumta $u \infty \dfrac{as}{a+s}$,

$$\text{series } \frac{s}{a} - \frac{ss}{2aa} + \frac{s^3}{3a^3} - \&\text{c. aequatur seriei } \frac{u}{a} + \frac{uu}{2aa} + \frac{u^3}{3a^3} + \frac{u^4}{4a^4} + \&\text{c.}$$

per Annot. praeced. Prop., idcirco dictum spatium MNHZ quoque sic exprimetur,

$$\frac{aa}{8} \text{ in } \overline{\frac{u}{a} + \frac{uu}{2aa} + \frac{u^3}{3a^3} + \frac{u^4}{4a^4} + \&\text{c.}} - \frac{1}{8}\sqrt{a^4-x^4}.$$

Nota, si statuantur $aa \infty 8$, & $s \infty a$, adeoque $t\ (a+s) \infty 2a$,

& $$x\left(\sqrt{\frac{2a^3t}{aa+tt}}\right) \infty 2a\sqrt{\frac{1}{5}}, \quad \& \ u\left(\frac{as}{a+s}\right) \infty \tfrac{1}{2}a:$$

hoc est, si constructo super MZ, semisse ipsius RZ, semicirculo inscribatur Triangulum Isosceles MCZ, cujus crus MC unitatem designet, atque Curvae MNT applicetur NH $\left(\frac{1}{2}\,x\right) \infty \sqrt{\frac{8}{5}}$, praedictum spatium MNHZ fiet

$$\infty\, 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \&c. - \tfrac{3}{5},$$

vel etiam $$\infty\, \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 8} + \frac{1}{4\cdot 16} + \frac{1}{5\cdot 32} + \&c. - \tfrac{3}{5}.$$

Conf.[24] Act. Lips. 1694, p. 273.

Corol. 1. Quoniam ex iis, quae loc. modo cit. Actorum docuimus, colligi potest, quod QV $\infty \dfrac{aa}{x}$, & QN $\infty \frac{1}{2}$ QV $\infty \dfrac{aa}{2x}$, & DQ seu $dz \infty \dfrac{aa\,dx}{\sqrt{a^4 - x^4}}$; sequitur, triangulum QGD (QD in $\frac{1}{2}$QN) $\infty \dfrac{a^4 dx}{4x\sqrt{a^4 - x^4}}$, & per consequens omnia triangula QGD seu spatium RMNQR

$$\infty\, \mathrm{S}\frac{a^4 dx}{4x\sqrt{a^4 - x^4}} \infty \text{(ut ostensum) spatio MNHZ} + \mathrm{S}\frac{x^3 dx}{4\sqrt{a^4 - x^4}}:$$

unde cum $\mathrm{S}\dfrac{x^3 dx}{4\sqrt{a^4 - x^4}}$ seu $\frac{1}{8}\sqrt{a^4 - x^4}$ exprimat quadrantem spatii Elastici PQRZ (ut per se liquet), concludimus, spatium RMNQR excedere aream MNHZ quarta parte ipsius PQRZ.

Cor. 2. Quia differentiale $\dfrac{aa\,dt}{8t}$, ad quod reduximus elementum spatii MNHZ vel RMNQR, elementum quoque denotat spatii hyperbolici inter asymptotas, cujus abscissa a centro est $\infty\, t$, ipsa vero t in assumta hypothesi $\sqrt{a^4 - x^4} \infty \dfrac{txx}{a} - aa$ propter x decrescentem ad nihilum excrescat in infinitum, & spatium hyperbolicum in infinitum protensum sit infinitum; idcirco & spatium totum interminatum genitricis Elasticae MNTXZ seu NTXH infinitum erit. Vid. Act. Lips. loc. cit.

24 V. Op. LVIII, *Opera*, p. 594 (n° 11), à publier dans *Werke* 6; sur la seconde série qu'indique ici Bernoulli pour l'aire MNHZ, cf. Prop. LIX *supra*.

ΕΠΙΜΕΤΡΑ

I.

Logarithmus sin. vel tang. arcus absolute nullius non est 0 *(ut vulgo habent Canones), sed* $-\infty$*: accurate enim loquendo* 0 *est log-us sin. vel tang. arcus* $0^\circ\ 0'\ 0''\ 0'''\ 0''''\ 4^{\mathrm{v}}\ 27^{\mathrm{v}'}$ *&c. & logarithmi arcuum minorum sunt negativi*[25].

II.

In Sciothericis planis horae quidem Italicae & Babylonicae recte, sed Judaïcae male per lineas rectas exhibentur[26].

III.

Regula, quam in Notis nostris Tumultuariis[27] *in Geom. Cartesii p.441 pro invenienda elevatione mortarii ad efficiendum jactum globi longissimum in plano inclinato attulimus, brevius ita contrahetur:* Angulus quaesitae elevationis mortarii est aggregatum ex semisse recti & semisse anguli inclinationis Plani.

IV.

Imago in speculis convexis & concavis non conspicitur in concursu catheti incidentiae & continuatae reflexionis, ut ex Alhazeno & Vitellione docent Heinlinus[28] *p.805, & Dechales*[29] *in Mund. Mathem. Tom.3, p.599: nec etiam, ut vult*

25 Sur le premier point, c'est-à-dire $\log x = -\infty$ pour $x = 0$, il est seulement à noter que Bernoulli juge nécessaire de le préciser, contre l'autorité des tables de logarithmes en usage à son époque («*Canones*»). Quant au second point, Cramer rappelle ici que ces tables étaient basées sur la valeur 10^{10} attribuée au rayon, c'est-à-dire que pour un angle x (exprimé en degrés, minutes et secondes) elles donnaient la valeur de $\log(10^{10} \sin x)$ et de $\log(10^{10} \tan x)$. Si donc, pour des angles très petits, on confond l'angle (exprimé en radians) avec son sinus et sa tangente, il s'ensuit que ces logarithmes prennent la valeur 0 pour $x = 10^{-10}$ radians, ce qui donne bien la valeur indiquée par Bernoulli.

26 Il s'agit ici de *gnomonique*, c'est-à-dire de la théorie des cadrans solaires; le commentaire de Cramer est que *ceci ne peut s'expliquer en peu de mots.*

27 La référence est à Op. LXVII, Nota VII, *Opera*, p. 684 – *Werke* 2, p. 566.

28 Johann Jacob Heinlin, *Synopsis Mathematica Universalis*, Tubingae ^{2}1663, Opticae Pars II, Caput III, Th. 10 (N.D.L.R.)

29 Claude François Milliet Dechales, *Cursus seu Mundus Mathematicus*, t. III, Lugduni ^{2}1690, Catoptricae Liber II, Prop. XIII, pp. 589–602, où Alhazen et Vitello sont mentionnés (N.D.L.R.)

Stevinus[30], *in concursu lineae reflexionis cum catheto incidentiae ducta ad planum tangens speculum in puncto reflexionis*[31].

V.

Quantitates infinite parvae haud recte finitis seu ordinariis incomparabiliter minores *vel* incomparabiles *dicuntur, cum his saepe comparentur; ut cum radius osculi, elementum curvae & subtensa anguli contactus vocantur continue proportionales*[32].

VI.

In casu Maximae vel Minimae y differentiale ejus dy non semper est ∞ 0 *vel* ∞, *ut vulgo existimant: potest enim habere ad dx rationem quamcunque. Nec tamen hoc obstat, quo minus per fictionem dy* ∞ 0 *solutio semper obtineri possit; cum verus & adaequatus conceptus Maximi Minimive requirat, ut posita y constante differentietur aequatio*[33].

30 Simon Stevin, *Œuvres Mathematiques* (editées par Albert Girard), Leyde 1634, II. Livre de l'Optique, Appendice, pp. 598–599; ici les propositions de Alhazen et de Vitello sont critiquées (N.D.L.R.)

31 Ici Cramer renvoie aux *Lectiones Opticae* de Barrow, Londini 1674, Lect. VI–X, pp. 47–74 (= I. Barrow, *The Mathematical Works*, ed. W. Whewell, Cambridge 1860, repr. Hildesheim 1973, t. II, pp. 64–95).

32 L'exemple choisi ici par Bernoulli est emprunté à sa théorie du rayon de courbure (v. Op. LVIII, *Opera*, p. 578, à publier dans *Werke* 6); la proportion dont il s'agit s'écrit $r:ds = ds:t$, où r est le rayon de courbure, ds est l'*élément d'arc*, et où la *sous-tendue t* est une certaine quantité infinitésimale du second ordre, définie géométriquement (sur cette *sous-tendue*, cf. VP XXII, *Opera*, p. 1088, à publier dans *Werke* 5).

33 Lorsqu'il parle de l'*opinion commune* qui veut qu'en un maximum ou minimum on ait $dy = 0$ ou ∞, c'est sans doute à l'*Analyse des infiniment petits* du marquis de l'Hôpital (Paris 1696) que Bernoulli entend faire allusion, $dy = 0$ correspondant au cas où le graphe de y en fonction de la variable indépendante x a une tangente horizontale, et $dy = \infty$ correspondant à un point de rebroussement à tangente verticale. D'après l'interprétation de Cramer, il s'agirait ici d'attirer l'attention sur le cas du point double à tangentes distinctes d'une courbe donnée par une équation $F(x,y) = 0$; en effet, en faisant («per fictionem») $dy = 0$ dans $F'_x\, dx + F'_y\, dy = 0$, on obtient $F'_x = 0$ (*par différentiation de l'équation, y étant pris constant*), ce qui comprend le cas du point double avec dy/dx pouvant prendre des valeurs quelconques sur les deux branches. On voit mal, il est vrai, comment Bernoulli peut ranger ce cas sous la rubrique *maxima ou minima*.
Les mêmes difficultés avec la notion de maximum et la méthode de L'Hôpital sont évoquées dans N. Guisnée, *Observations sur les Methodes de Maximis & Minimis* ...: Mém. Paris 1706 (1707), pp. 24–51 (N.D.L.R.)

VII.

Pro differentiali ipsius xx, quod proprie est $2x\,dx + dx^2$, *omnes semper sine delectu scribunt* $2x\,dx$, *omisso* dx^2; *sed perperam: dantur enim casus, ubi omisso* $2x\,dx$ *ponendum* dx^2; *& rursus alii, ubi ponendum utrumque. De observationis pretio cognoscet, qui sciverit, illam nos manu duxisse ad singulare illud inventum de radiis osculi expedite determinandis in curvis quibusvis algebraïcis, in Act. Lips. 1700, p. 508, publicatum*[34], *quod sine hac observatione fortassis aeternum latiturum fuisset*[35].

VIII.

Dum Cl. Papinus in Tractatu suo de Ossibus emolliendis[36] *modum nostrum ponderandi aëris sub aqua in recipiente superfluitatis damnat, illique Boyleanos suosve aequiparat, non videtur comprehendisse, quid discriminis inter ambos intersit. Melius id agnovit Societas Reg. Anglic. quae nostri experimentum, ipso fatente Papino, cum successu instituit*[37].

IX.

Idem etiam inique conqueritur de injuria Boyleo per assertionem meam illata, qua dixi, ponderationem aëris in Vesica Philosopho huic non improbari[38]. *Fatemur quod hunc ponderandi modum agnoverit esse minus perfectum (quis enim hoc non videret?) at quod eundem sophisticum prorsus atque fallacem esse ipse vel quisquam alius ante nos fuerit suspicatus, pernegamus. Perpendat, si placet, verba, quae habet in suo Praeloquio ad D. Brouncker, immediate ante Paradoxum I. Hydrost.:* Etenim non poterat hic objici, uti fit contra ponderationem aëris in Vesica, (quibus tamen objectionibus facile mihi esset respondere, si nunc conveniret), aërem *&c. & judicet, num ita scripsisset, si tale quid ominatus fuisset.*

34 Jac. B. Op. XCIV, *Opera*, pp. 888–891 (à publier dans *Werke* 5).

35 Cf. VP XXII–XXIV (*Opera*, pp. 1088–1100, à publier dans *Werke* 5), qui forment un ample commentaire du présent texte.

36 Denis Papin, *A Continuation of the New Digester of Bones ... together with some Improvements and New Uses of the Air-Pump*, London 1687 (dans Jac. B. *Werke* 1, p. 418, note 19, deux comptes rendus de cet ouvrage sont cités). Bernoulli a probablement lu la traduction française, *Continuation du digesteur, ou Maniere d'amolir les os ...*, Amsterdam 1687 (N.D.L.R.)

37 Cf. Jac. B. Op. XI, *Werke* 1, pp. 452–455, et le commentaire, pp. 417–418.

38 V. Jac. B. Op. XIII, *Werke* 1, pp. 458–460, et en particulier, p. 458, note 4.

X.

Quicunque suggessit Cl. D. Collectori. Lit. Helvet. ut in recensione Historiae Problematis Isoperimetrici[39] *ad ann. 1701, p. 102, scriberet, nos pecuniam promissam (non deposuisse, sed) retinuisse, aut fraudulenter egit, aut oscitanter legit Epistolam nostram*[40]*, e qua discere potuisset, quod, quando, per quos & apud quem illa deposita fuerit*[41].

FINIS.

39 Dans *Nova Literaria Helvetica*, Tiguri 1702 (c'est en fait le volume relatif a 1701), pp. 101–102, l'éditeur Johann Jacob Scheuchzer avait donné un compte rendu de Jac. B. Op. XCVI et de la querelle avec Johann Bernoulli, sans d'ailleurs critiquer Jacob. Le 15 juillet 1702, Scheuchzer avait déjà écrit une lettre d'apologie à Jacob qui lui avait probablement reproché son erreur; cf. Jac. B. *Briefe*, pp. 221–222 (N.D.L.R.)

40 V. Jac. B. *Ad Fratrem ... Epistola*, Basileae 1700 – *Streitschriften*, pp. 471–484, e.p. p. 477, note *23* (N.D.L.R.)
Naturellement il s'agit ici de la célèbre controverse entre Jacob et Johann Bernoulli au sujet des *isopérimètres*.

41 L'*Epimetron* X n'a pas été repris dans les *Opera* (N.D.L.R.)

Op. XXIV

Demonstratio Rationum, quas habent series numerorum naturali progressione sese insequentium, vel quadratorum, cubicorum, &c. item trigonalium, pyramidalium &c. ad series numerorum totidem maximo aequalium[1]

AE Julii 1686, pp. 360–361 – Jac. B. Opera, pp. 282–283

Wallisius in Arithm. Infinit.[2] id sola inductione investigare docet; cui demonstrandi modo, cum parum scientificus sit, alium eumque facillimum hic substituam. Ex. gr. Explorandum sit, an ratio seriei numerorum naturali progressione se excipientium & a cyphra[3] inchoantium, ad seriem totidem maximo aequalium semper sit subdupla. Pono, rem examinatam esse aliquousque; terminumque ultimum, in quo examinando substiti, appello a: eritque numerus terminorum ob initialem cyphram, unitate major, nempe $a+1$: adeoque summa totidem ultimo aequalium $aa+a$, cui cum summa progressionalium inductione supponatur reperta fuisse subdupla, erit haec $\frac{aa+a}{2}$. Augeatur jam series progressionis uno termino, eritque adjectus terminus $a+1$, qui junctus summae praecedentium $\frac{aa+a}{2}$ producit $\frac{aa+3a+2}{2}$ summam totius progressionis: sed cum numerus terminorum jam sit $a+2$, erit summa totidem adjecto ultimo aequalium, $aa+3a+2$, quae summae progressionalium itidem dupla existit. Quod si jam iste terminus, qui modo vocatus erat $a+1$, appelletur a, insuperque novus progressioni adjiciatur, qui erit $a+1$, eadem valebit demonstratio: cum ergo constet, rationem subduplam in qualibet serie deprehensam, inferre eandem in serie uno termino aucta, atque hinc etiam in serie duobus, tribus &c.

1 La publication originale commence avec la référence «Excerpta ex iisdem litteris.» qui renvoie à l'article précédent dans les AE: Jac. B. Op. XXIII, *Narratio Controversiae inter Dn. Hugenium & Abbatem Catelanum agitatae de Centro Oscillationis* ..., qui va être publié dans *Werke* 6. L'original de la lettre que Bernoulli a adressé probablement à l'éditeur des AE, Otto Mencke, dans la première moitié de l'année 1686, est perdu (N.D.L.R.)

2 V. *op. cit. supra* note 3 à Op. CI, p. 129 h.v. (N.D.L.R.)

3 L'utilisation de «cyphra» pour désigner 0 était déjà désuète à l'époque (N.D.L.R.)

infinitis terminis aucta, sequitur universim, quod si haec proprietas in paucis seriebus inductione reperta fuerit, pariter communis sit omnibus[4]. Q.E.D.

Ad eundem modum demonstrabitur, rationem summae seriei quadratorum a cyphra incipientium, ad summam totidem maximo aequalium esse subtripla majorem excessu, quem indigitat ea ratio, quam habet unitas ad sextuplum radicis quadratae termini maximi; item summam seriei trigonalium a duabus, pyramidalium a tribus &c. cyphris inchoatorum, ad summam totidem maximo aequalium esse subtriplam, subquadruplam &c. supponendo nimirum, id aliquo usque saltem inductione compertum esse, illudque deinceps demonstrando de serie uno termino aucta.

4 Cette note, dont Bernoulli devait plus tard trouver des applications à la théorie des séries (v. Op. XXXV, Prop. XIV, pp. 52–54 h.v., et Op. LXXIV, Prop. XLII, pp. 93–95 h.v.) a été composée alors qu'il ne pensait guère encore à ce dernier sujet (v. la préface de Op. XXXV, pp. 45–46 h.v.). En fait, de même que Med. LXIV qui lui est antérieure (v. *Werke* 3, pp. 23–24), elle prélude à ses recherches sur les *nombres figurés* (les coefficients du binôme) et les sommes de puissances d'entiers qui devaient faire l'objet d'un important chapitre de l'*Ars Conjectandi* (*Werke* 3, pp. 157–168). Sur ces questions, d'ailleurs, Bernoulli avait été largement devancé par Pascal et son *Traité du Triangle arithmétique* paru à Paris en 1665; mais visiblement il n'avait pas eu connaissance de cet ouvrage (cf. *Werke* 3, pp. 6–8 et 164). On notera que, tout comme Pascal traitant du même sujet, Bernoulli y trouve l'occasion d'énoncer bien clairement le principe de la méthode dite *d'induction complète* (ou *de récurrence*); même en 1686 ce n'était pas encore une banalité, bien que la méthode elle-même ne fût pas nouvelle puisqu'on en rencontre déjà des exemples chez Euclide.

Op. XXXVII

Vera Constructio Geometrica Problematum Solidorum & Hypersolidorum, per rectas lineas & circulos[1]

AE Septembris 1689, pp. 454–459 – Jac. B. Opera, pp. 411–418

Quadratura Circuli, Inventio quarundam mediarum proportionalium inter datas rectas, Cubi Duplicatio, Trisectio Anguli, &c. Problemata fuere ab omni retro memoria vexatissima & antiquitus usque adeo celebratissima. Inter illa hoc intercedere notatur discriminis, quod Circuli Tetragonismus nullatenus vel calculo exhiberi, vel constructione accurata confici hucusque potuit, dum caetera construi quidem possunt, sed ita, ut ad ipsorum constructionem requirantur lineae, quas Veteres ob difficilem & incommodam earum delineationem, non omnino in Geometriam admittere ausi fuerunt: quapropter praestantissimi omnium seculorum Geometrae in rei arduae molimine quaerentes gloriam, eo semper omnes suas vires intenderunt, ut tum circulum si qua possent arte quadrarent, tum reliqua memoratorum Problematum linearum rectarum & circulorum ope construerent; quorum tamen utrumque pari difficultate involutum senserunt, quousque a perspicacioribus ingeniis omnimoda utriusque impossibilitas hoc nostro aevo detecta fuit. Hac itaque visa, alia sibi incedendum esse via rati sunt; cumque Circuli exactum valorem uno aliquo numero exhiberi posse impossibile ducerent, eundem saltem per seriem infinitorum numerorum exprimere sunt annisi; qualem omnium primus initio horum Actorum vulgavit Cel. Leibnitius[2]. Ei, quod hic in quadrando circulo praestitit, simile nunc ego quiddam circa reliqua illa, & in genere circa omnia solida multaque etiam hypersolida Problemata aggredior, & quod circini normaeque ope una aliqua constructione accurate consequi hactenus non licuit, hoc per seriem, ut sic dicam, constructionis certa lege in infinitum continuandae exequor; eaque ratione id obtineo, ut quaesitae radici ita continuo magis magisque

1 Comme l'observe Cramer, les résultats décrits dans cette note ne sont que la transcription, en termes de la géométrie de la règle et du compas, des Prop. XXIX–XXXV, Op. LIV (pp. 78–80 h.v.); cf. aussi Med. CLIII–CLVI, pp. 206–215 h.v.

2 G.W. Leibniz, *De vera Proportione Circuli ad Quadratum circumscriptum in Numeris rationalibus*: AE Februarii 1682, pp. 41–46 – *Math. Schriften* V, pp. 118–122, donne en fait les séries

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

et

$$\frac{\pi}{8} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(4n+2)^2-1}. \qquad \text{(N.D.L.R.)}$$

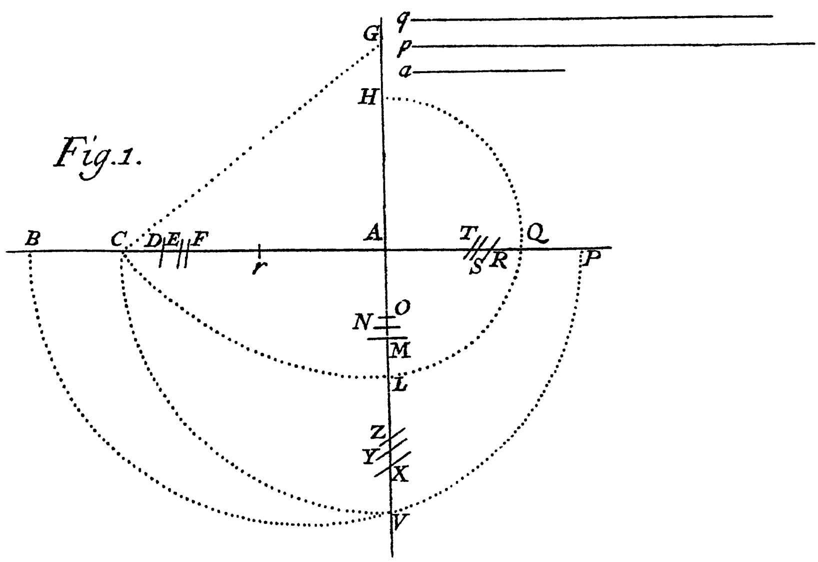
appropinquetur, ut error tandem data quavis quantitate minor fiat, totaque adeo constructionis series exactum ejus valorem exprimere debeat.

Notum, omnes Aequationes Cubicas, ad quas Problematum Solidorum difficultates referuntur, ad unam harum Formularum reduci posse: $x^3 = -apx + aaq$, $x^3 = -apx - aaq$, $x^3 = +apx + aaq$, & $x^3 = +apx - aaq$; quarum prima habet unam radicem veram, altera unam falsam, tertia unam veram cum duabus falsis, & quarta unam falsam cum duabus veris.

1. *Pro invenienda Radice vera Aequationis* $x^3 = -apx + aaq$, *aut falsa hujus,* $x^3 = -apx - aaq$.

Constr. Ductis (fig. 1) indefinitis rectis BP, GV, normaliter se decussantibus in puncto A, assume in earum una AH $= a$, & ex eadem parte AG $= \frac{1}{2}p$; in altera AB $= q$, & in parte opposita punctum utcunque P; tum ita perge:

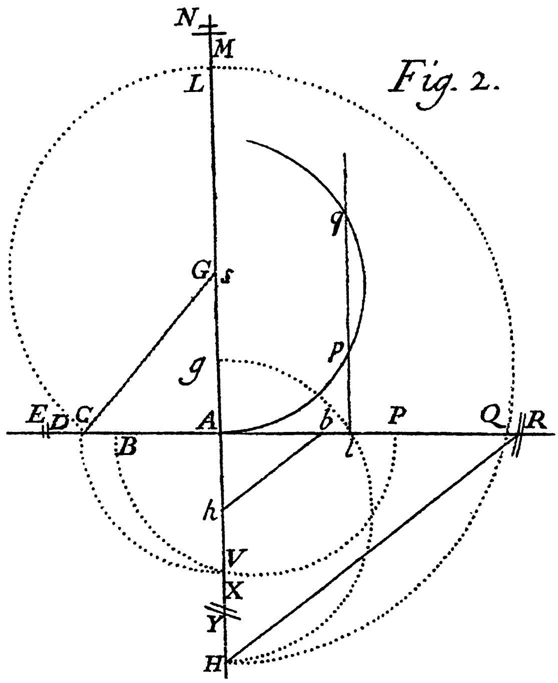
Fig. 1.



Diametro $\left\{\begin{matrix} \text{BP} \\ \text{BQ} \\ \text{BR} \\ \text{BS} \end{matrix}\right\}$ descr. arc. circ. secans AV in $\left\{\begin{matrix} \text{V} \\ \text{X} \\ \text{Y} \\ \text{Z} \end{matrix}\right\}$ ipsique $\left\{\begin{matrix} \text{AV} \\ \text{AX} \\ \text{AY} \\ \text{AZ} \end{matrix}\right\}$ fiat $=$ $\left\{\begin{matrix} \text{AC} \\ \text{AD} \\ \text{AE} \\ \text{AF} \end{matrix}\right\}$ distantiaeque $\left\{\begin{matrix} \text{GC} \\ \text{GD} \\ \text{GE} \\ \text{GF} \end{matrix}\right\}$ sumatur $=$ $\left\{\begin{matrix} \text{GL} \\ \text{GM} \\ \text{GN} \\ \text{GO} \end{matrix}\right\}$ diametroque $\left\{\begin{matrix} \text{HL} \\ \text{HM} \\ \text{HN} \\ \text{HO} \end{matrix}\right\}$ descr. arc. circ. secans AP in $\left\{\begin{matrix} \text{Q} \\ \text{R} \\ \text{S} \\ \text{T}, \end{matrix}\right\}$ &c.

Ubi observandum, quod si punctum P casu sic assumtum fuerit, ut facta deinceps circini revolutione punctum Q coincidat cum puncto P, erit AP vel AQ ipsa quaesita radix accurata: sin minus, rectae AP, AQ, AR, AS &c. ad verum valorem radicis continuo magis magisque, & tandem data quavis quantitate propius accedent.

2. *Pro invenienda Radice vera Aequationis* $x^3 = +apx + aaq$; *aut falsa hujus,* $x^3 = +apx - aaq$.

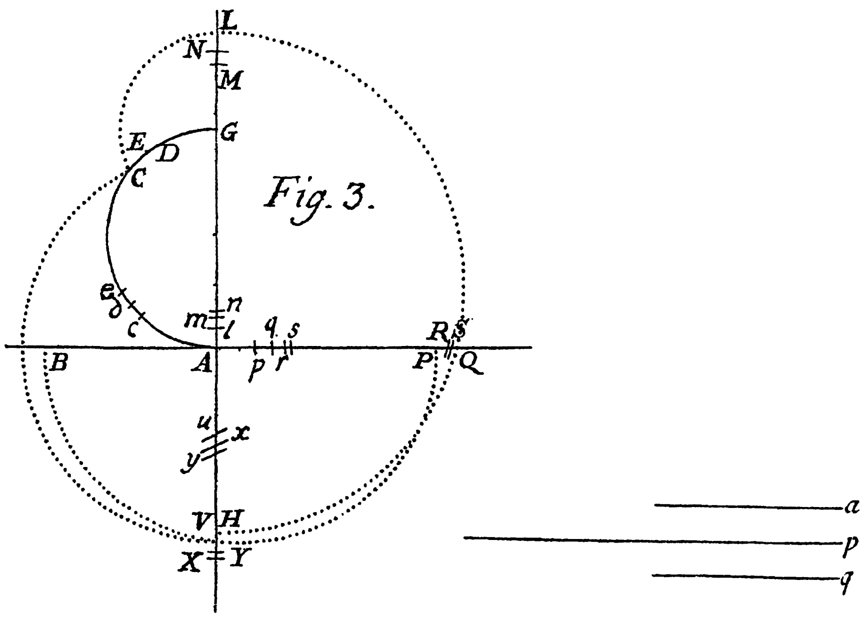


Constructio (fig. 2) eadem, quae praecedens, nisi quod AH & AG ad partes oppositas sumendae, & GL, GM, GN &c. non deorsum versus A, sed sursum abscindendae sunt: qua ratione lineae AP, AQ, AR &c. valori radicis, ut prius, magis magisque appropinquabunt.

3. *Pro inveniendis Radicibus falsis Aequationis* $x^3 = +apx + aaq$; *aut veris hujus,* $x^3 = +apx - aaq$.

Fiat ibidem Ab = AB, sumtoque AR quam minimum & insensibiliter differre a radice vera prioris, aut falsa posterioris Aequationis (prout illa per praecedentem constructionem reperta fuit) jungatur RH, eique parallela ducatur bh; factisque As $= \frac{1}{2}$ AR, & Ag = Ah, diametro gH describatur arcus circuli secans

AP in l, aliusque centro s radio As, quem secet[3] recta lq parallela ipsi AG in punctis p & q; eruntque lp, lq, binae radices quaesitae. *Not.* si circulum centro s descriptum non secet vel tangat recta lq (quod fit, cum ultimus aequationis terminus major est quarta parte cubi, aut quantitas cognita penultimi minor tribus quartis partibus quadrati radicis AR; aut etiam cum quadratum semissis ultimi majus cubo trientis quantitatis cognitae penultimi): indicio est, duas reliquas radices esse imaginarias.



Aliter per peculiarem constructionis seriem: (fig. 3) Fiant eadem, quae supra, nisi quod rectae AC, AD, AE &c. (Ac, Ad, Ae &c.) non jam capiendae sunt in linea AB, sed applicandae semicirculo super diametro AG descripto; distantiisque GC, GD, GE &c. aequales abscindendae GL, GM, GN &c. sursum pro majore radicum quaesitarum (saltem in primo sequentium casuum): & ipsis Gc, Gd, Ge &c. aequales Gl, Gm, Gn &c. deorsum pro minore: Ubi cavendum, ne punctum P (p) quod constructionem inchoat, assumatur vel prope vel remote nimis a puncto A; fieri enim posset, ut sic assumtum alterutram rectarum AC vel AD (Ac, Ad) majorem exhiberet, quam quae circulo inscribi posset: facile autem assignari possunt limites, intra quos si capiatur punctum P, id incommodi evitabitur; nam

3 Dans les *Opera*, on trouve «secet, vel tangat» (N.D.L.R.)

1. Si Quadratum ultimi termini minus est Cubo semissis quantitatis cognitae penultimi: Sumatur (fig. 4) ad BA & AG tertia proportionalis AM, ut & tertia ad HA & inventam AM, quae sit AL, major scilicet futura ipsa AG: hinc semicirculo applicetur GC = GL, junctaque AC quaeratur tertia proportionalis ad AB & AC, quae sit AN; eruntque puncta M & N limites, quos intra quodvis punctum accipi poterit pro invenienda radice majore: pro minore nullo indigemus limite ex parte A, sed quodvis punctum inter A & M pro initio constructionis accipi poterit; quod & de radice majore intelligendum, quando ipsa GL major est, quam ut semicirculo inscribi possit.

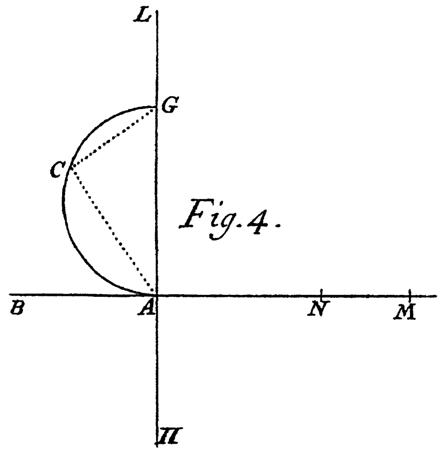


Fig. 4.

2. Si Quadratum ultimi termini aequale est Cubo semissis quantitatis cognitae penultimi; limites M & N indistantes fiunt; proinde ipsa AM vel AN est radix major.

3. Si Quadr. ultimi termini majus est Cubo semissis quant. cogn. penultimi, radix major consistit in indivisibili, hoc est, quo diutius continuatur constructio, eo longius ex utraque parte ab ejus genuino valore receditur: quare tum sola minor appropinquando inveniri poterit: qua tamen cognita nec major latebit amplius, quandoquidem ambarum summa tertiam radicem supra per construct. fig. 2 inventam perpetuo, ut notum est, in istis aequationibus aequat. Sumto igitur rectam AR huic tertiae radici proxime accedere, ut statuminentur porro limites pro invenienda altera, bisecetur AR, poteritque punctum quodvis in sinistra ejus medietate acceptum pro operationis initio statui.

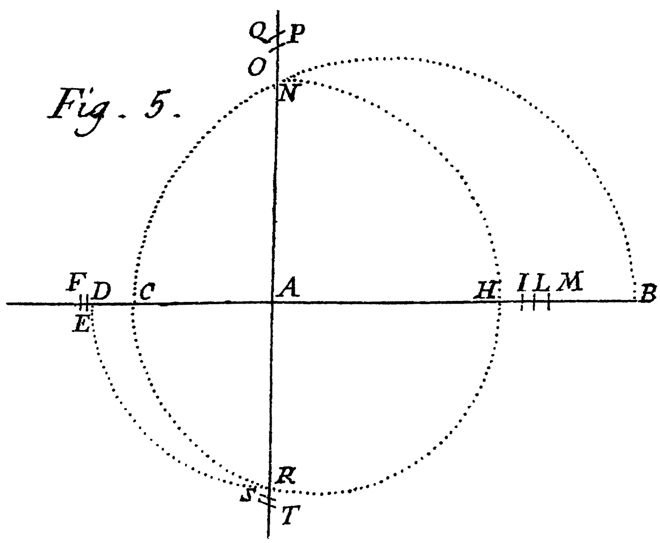
4. Si denique Quadr. semissis ultimi termini aequet cubum trientis quantitatis cognitae penultimi, erit quaesita radix utraque aequalis semissi rectae AR: *sin cubum hunc superet*, constat, utramque esse imaginariam; quare nec per hanc constructionem ulla inveniri potest.

Caeterum observare non injucundum, quo pacto in omnibus istis constructionibus rectae AP, AQ, AR, AS &c. (Ap, Aq, Ar, As &c.) fig. 1, 2, 3 continuis vel incrementis vel decrementis vero radicum valori appropinquant; praeterquam pro sola radice majore figurae tertiae, ubi alternis nunc decrementis nunc incrementis ad ejus valorem accedunt; sic ut verus radicis valor ibi exprimatur per seriem infinitam: AP+PQ+QR+RS &c. vel AP−PQ−QR−RS &c. hic per seriem: AP+PQ−QR+RS−ST &c.

Quemadmodum vero nulla jam dari potest Aequatio Cubica, quae non eo reduci possit, ut juxta allata praecepta solius circini & normae ope construi queat; ita similes omnino afferre possem regulas pro constructionibus Aequationum 4 dimensionum, si Lectori voluptatem easdem proprio Marte eruendi praeripere vellem. Unam exempli loco dabo pro Aequatione $x^4 * + apxx - aaqx - a^3r = 0$, ad quam construendam eadem prorsus observanda, quae fieri jubentur in figura 1, nisi quod insuper in recta BP abscindenda est ex A in alterutram partem recta Ar, quae sit media proportionalis inter *a* & *r*; & tum rectae AC, AD, AE &c. non ipsis AV, AX, AY &c. sed distantiis rV, rX, rY &c. aequales capiendae.

Subjungo nunc applicationem novae hujus construendi methodi ad nobilissimum Problema de Inventione quarundam mediarum proportionalium:

α. Invenire duas medias proportionales inter duas datas: (Fig. 5)



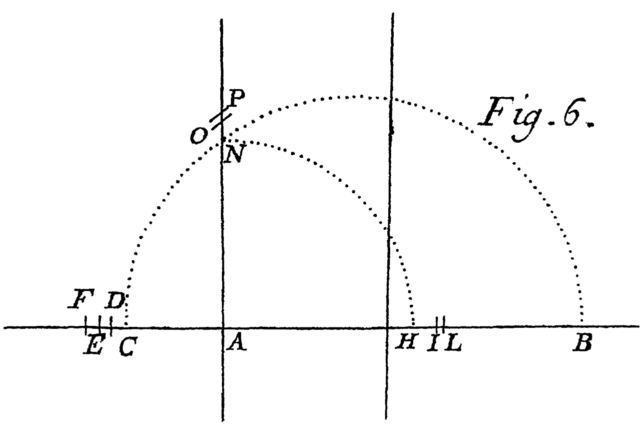
Constr. Ductis normalibus indefinitis CB, NR, sese ad rectos angulos secantibus in A, abscindantur ex earum una rectae AC, AB, aequales datis: quo facto

$$\text{Diametro}\left\{\begin{array}{l} \text{BC}\ --\\ --\text{CH}\\ \text{BD}\ --\\ --\text{CI}\\ \text{BE}\ --\\ --\text{CL}\\ \text{BF}\ --\end{array}\right\}\begin{array}{l}\text{descr. arc.}\\ \text{circ. secans}\end{array}\left\{\begin{array}{l} \text{AN}\ --\\ --\text{AR}\\ \text{AN}\ --\\ --\text{AR}\\ \text{AN}\ --\\ --\text{AR}\\ \text{AN}\ --\end{array}\right\}\ \text{in}\ \left\{\begin{array}{l} \text{N}--\\ --\text{R}\\ \text{O}--\\ --\text{S}\\ \text{P}--\\ --\text{T}\\ \text{Q}--\end{array}\right\}\ \text{ipsi-}$$

$$\text{que}\left\{\begin{array}{l} \text{AN}\ --\\ --\text{AR}\\ \text{AO}\ --\\ --\text{AS}\\ \text{AP}\ --\\ --\text{AT}\\ \text{AQ}\ --\end{array}\right\}\ \text{fiat} = \left\{\begin{array}{l} \text{AH}\ --\\ --\text{AD}\\ \text{AI}\ \ --\\ --\text{AE}\\ \text{AL}\ --\\ --\text{AF}\\ \text{AM}\ --\end{array}\right. \ \text{\&c.}$$

Hac ratione rectae AD, AE, AF &c. magis magisque appropinquabunt primae & rectae AH, AI, AL &c. secundae duarum mediarum proportionalium inter datas AC & AB, quosque easdem post infinitam operationis seriem praecise assequantur.

β. *Invenire quatuor medias proportionales:* (fig. 6)

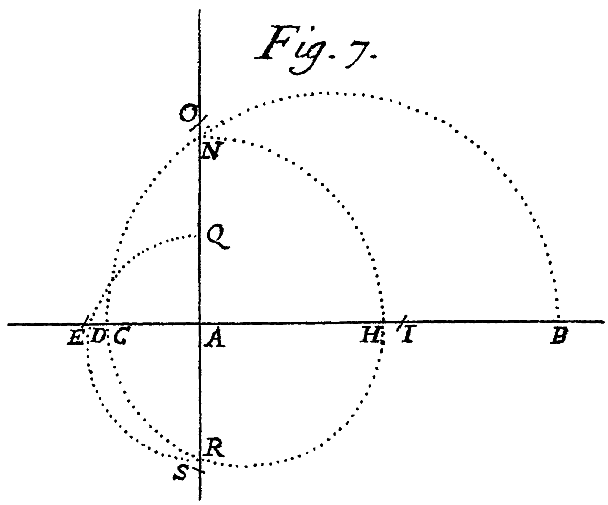


$$\text{Diametro}\left\{\begin{array}{c}\text{BC}\\ \text{BD}\\ \text{BE}\end{array}\right\}\begin{array}{l}\text{descr. arc. circ.}\\ \text{secans AN in}\end{array}\left\{\begin{array}{c}\text{N}\\ \text{O}\\ \text{P}\end{array}\right\}\ \text{ipsique}\left\{\begin{array}{c}\text{AN}\\ \text{AO}\\ \text{AP}\end{array}\right\}\ \text{fiat} = \left\{\begin{array}{c}\text{AH}\\ \text{AI}\\ \text{AL}\end{array}\right\}$$

$$\text{hinc quaeratur per praeced: prima 2 med. proport. inter AC \&}\left\{\begin{array}{c}AH\\AI\\AL\end{array}\right\}\text{ quae sit }\left\{\begin{array}{l}AD\\AE\\AF,\end{array}\right.\qquad\text{\&c.}$$

Hac ratione ipsae AD, AE, AF &c. accedent primae, & AH, AI, AL &c. tertiae quaesitarum quatuor proportionalium inter AC & AB.

γ. *Invenire sex medias proportionales:* (fig. 7)



Datae sint sicut antea, CA & AB; & fiat AQ = AC; tum vero

$$\text{Diametro}\left\{\begin{array}{l}BC----\\--CH--\\----QR\\BD----\\--CI--\\----QS\end{array}\right\}\begin{array}{l}\text{descr. arc. circ.}\\\text{secans}\end{array}\left\{\begin{array}{l}AN----\\--AR--\\----AC\\AN----\\--AR--\\----AC\end{array}\right\}\text{ in }\left\{\begin{array}{l}N--\\-R-\\--D\\O--\\-S-\\--E\end{array}\right\}\text{ ipsi-}$$

$$\text{que, }\left\{\begin{array}{c}AN\\--\\--\\AO\\--\\--\end{array}\right\}\text{ fiat }=\left\{\begin{array}{c}AH\\--\\--\\AI\\--\\--\end{array}\right.\text{ \&c.}$$

Quo pacto ipsae AD, AE &c. appropinquabunt primae; AR, AS &c. secundae; & AH, AI &c. quartae sex mediarum proportionalium.

In plerisque harum, ut & superiorum, constructionum hoc peculiare annotamus, quod delineatis semel normalibus indefinitis & abscissis rite datis, caetera constructio seu appropinquatio fieri possit, ut circinus non amoveatur e charta, sed perpetuo alternis super illa pedibus incedat, & quasi in orbem ambulet; si modo concedatur rectae bisectio mechanica, quae nunc aperiendo, nunc claudendo circinum peragitur.

Observandum etiam, non necessum esse, ut diametro CB arcus describatur, ad determinanda puncta H & D: potest enim alterutrum horum initio statim operationis accipi ad lubitum, & ab illo inchoari constructio: & quidem si constructionem compendifacere desideres, poteris rectas AH vel AD tales assumere, quas judicio oculorum aestimaveris, aut aliunde sciveris, quaesitis proportionalibus quam proxime accedere.

Qualescunque vero assumantur, plerumque paucae admodum circini revolutiones requiruntur, ut error penitus insensibilis evadat; adeo ut praeter Geometricam hujus negotii ἀκρίβειαν, ad ipsam quoque praxin mechanicam vix quicquam accuratius & expeditius dari possit; quod si quis secum rite pensitaverit, fatebitur, & hoc invento non levem Geometriae accessionem factam esse.

Op. XL

Quaestiones nonnullae de Usuris, cum solutione Problematis de Sorte Alearum[1], propositi in Ephem. Gall.[2] A. 1685, artic. 25

AE Maji 1690, pp. 219–223 – Jac. B. Opera, pp. 427–431

Frequens mos obtinet, ut qui alteri pecuniae summam debet, & parato aere instructus non est, cum Creditore suo ita paciscatur, ut quod simul ac semel solvere nequit, hoc successive & per partes solvere, ac interim dilationis nomine legitimam usuram Creditori praestare teneatur, ita quidem ut quod quavis vice ultra debitam usuram solvit, hoc in partem solutae sortis venire censendum sit. Accidit autem post aliquod tempus, ut persoluta jam maxima parte debiti, alter ab altero debitae & acceptae pecuniae rationes poscat, quas aliter format Creditor, aliter Debitor. Creditor hunc in modum:

Sors debita initio temporis b	a
Hinc usura per tempus b, (posito sortem m tempore n parere usuram p)	$\frac{abp}{mn}$
Summa	$a+\frac{abp}{mn}$
Exacto tempore b solvit Debitor	$f+\frac{abp}{mn}$
Residuum sortis initio temporis c	$a-f$
Hinc usura per tempus c	$\frac{acp-fcp}{mn}$
Summa	$a-f+\frac{acp-fcp}{mn}$
Elapso tempore c solvit Debitor	$g+\frac{acp-fcp}{mn}$
Residuum sortis initio temporis d	$a-f-g$

1 Dans les *Opera*, on trouve: «de sorte Aleatorum» (N.D.L.R.)
Cet article, qui a pu être suggéré à Bernoulli par celui de Leibniz dans les AE d'octobre 1683 (*Math. Schriften* VII, pp. 125–132), a déjà été reproduit dans Jac. B. *Werke* 3, pp. 91–93, en raison du paragraphe final sur les probabilités. Cf. Med. CL (*Werke* 3, pp. 94–97, et pp. 202–205 h.v.), où la série pour e^x est déjà obtenue par passage à la limite à partir de la notion d'intérêts composés; cf. aussi, sur cette même série, Med. CLXXVII (p. 235 h.v.) et Op. CI, Prop. LIX, «*Aliter* ...» (pp. 138–140 h.v.).

2 Cette référence renvoie à Jac. B. Op. XIV, *Probleme proposé par M. Bernoulli*: JS 1685 (26. Aoust), p. 314 – *Opera*, p. 207 – *Werke* 3, p. 91 (N.D.L.R.)

Hinc usura per tempus d .... $\dfrac{adp-fdp-gdp}{mn}$

Summa .... $a-f-g+\dfrac{adp-fdp-gdp}{mn}$

Finito tempore d solvit Debitor .... $h+\dfrac{adp-fdp-gdp}{mn}$

Residuum debiti sub finem temporis d,
in die praesenti rationem .... $a-f-g-h$

Debitor rationes suas sic disponit:

Tabula Debiti:

Sors debita .... a

Hinc usura per tempus $b+c+d$, ... $\dfrac{abp+acp+adp}{mn}$

Summa debiti ad diem rationum .... $a+\dfrac{abp+acp+adp}{mn}$

Tabula Soluti:

Exacto tempore b solvi Creditori .... $f+\dfrac{abp}{mn}$

Hinc usura per tempus $c+d$
ad diem usque rationum .... $\dfrac{fcp+fdp}{mn}+\dfrac{abcpp+abdpp}{mmnn}$

Finito tempore c solvi iterum .... $g+\dfrac{acp-fcp}{mn}$

Hinc usura per tempus d ad diem praesentem, ... $\dfrac{gdp}{mn}+\dfrac{acdpp-fcdpp}{mmnn}$

Hoc ipso die rationum solvo denuo .... $h+\dfrac{adp-fdp-gdp}{mn}$

Summa soluti

$$f+g+h+\frac{abp+acp+adp}{mn}+\frac{abcpp+abdpp+acdpp-fcdpp}{mmnn}.$$

{Haec[3] si subtrahatur a summa debiti, remanet pro residuo debiti in diem praesentem $a-f-g-h-\dfrac{abcpp+abdpp+acdpp-fcdpp}{mmnn}$.}

Hoc residuum cum a creditoris residuo $a-f-g-h$ differat, illoque minus sit tota quantitate $\dfrac{abcpp+abdpp+acdpp-fcdpp}{mmnn}$, quaeritur uter recte?

Respondetur facile: Creditoris rationes probas & genuinas, Debitoris vero erroneas esse, & in eo fallere, quod totum hoc quod quavis vice solvit, in sortem computet: cum ab illo prius detrahendum fuisset, quod ad eum usque diem usurae nomine deberet.

Hinc fit, ut quantitas illa $\dfrac{abcpp+abdpp+acdpp-fcdpp}{mmnn}$, qua ambae rationes differunt, praecise exprimat usuram, quam usura creditori persoluta, ut sors spectata, a die solutionis ad diem usque rationum parere posset, adeoque dum hanc sibi remitti vult Debitor, usurae usuram poscere censendus est, quod regulariter in legibus prohibitum esse constat. Sed levia haec sunt, nec monuissem, nisi viderem, ejusmodi supputandi modum, qui in fraudem Creditorum vergit, Mercatoribus ob commodiorem calculum admodum solemnem esse.

Alterius naturae hoc Problema est: Quaeritur, si Creditor aliquis pecuniae summam faenori exponat, ea lege, ut singulis momentis pars proportionalis usurae annuae sorti annumeretur, quantum ipsi finito anno debeatur[4]? Resp. si sors vocetur a, usura annua b, Creditori elapso anno debebitur,

$$a+b+\frac{bb}{2a}+\frac{b^3}{2\,\mathrm{in}\,3aa}+\frac{b^4}{2\,\mathrm{in}\,3\,\mathrm{in}\,4a^3}+\frac{b^5}{2\,\mathrm{in}\,3\,\mathrm{in}\,4\,\mathrm{in}\,5a^4}\ \text{\&c. in infinitum:}$$

quae summa major est, quam $a+b+\dfrac{bb}{2a}$, ut patet; sed minor quam $a+b+\dfrac{bb}{2a-b}$, quoniam $\dfrac{bb}{2a-b}$ est summa progressionis Geometricae

$$\frac{bb}{2a}+\frac{b^3}{2\,\mathrm{in}\,2aa}+\frac{b^4}{2\,\mathrm{in}\,2\,\mathrm{in}\,2a^3}\ \text{\&c.}$$

quae nostra serie

$$\frac{bb}{2a}+\frac{b^3}{2\,\mathrm{in}\,3aa}+\frac{b^4}{2\,\mathrm{in}\,3\,\mathrm{in}\,4a^3}\ \text{\&c.}$$

3 La phrase entre accolades figurait initialement avant la «*Tabula Soluti*»; son déplacement et une modification ont été indiqués dans un *Erratum* publié à la fin des AE de janvier 1691, p. 48. Cette correction a été effectuée dans les *Opera* (N.D.L.R.)

4 Cf. Med. CL, *Werke* 3, pp. 94–97, et pp. 202–205 h.v. (N.D.L.R.)

major est. Idcirco si usura sit subvigecupla sortis, seu $a=20$, & $b=1$, debebitur post annum plus quam $21\frac{1}{40}$, & minus quam $21\frac{1}{39}$: si $a=b$, debebitur plus quam $2\frac{1}{2}a$, & minus quam $3a$. Observo etiam, praesentem seriem in re Geometrica suum usum habere: nam si ad axem curvae Logarithmicae duae rectae applicentur, quarum minor dicatur a, sitque portio axis inter utramque applicatam ad portionem ejusdem inter applicatam quamcunque & respectivam tangentem in constanti ratione b ad a: exprimetur major applicatarum per eandem hanc seriem $a+b+\frac{bb}{2a}+\frac{b^3}{2\,\text{in}\,3aa}$ &c.

Porro seriei hujus infinitae occasione recordor Problematis illius de sorte Aleatorum[5], quod in Ephem. Gall. A. 1685 artic. 25 proposui hunc in modum: Duo Aleatores A & B ludunt una tessera, ea conditione, ut qui primus assignatum in illa punctorum numerum jecerit, vincat: A primo instituit unum jactum, & B unum, dein A duos jactus consequenter, & B duos: hinc A tres, & B tres &c. Vel, A instituit unum jactum, dein B duos, hinc A tres, postea B quatuor &c. quousque alteruter eorum vincat. Quaeritur ratio sortium? Hoc Problema cum frustra hactenus expectarit solutionem, eandem per series infinitas sic exhibeo: sors Collusoris A ad sortem Collusoris B in priori casu se habet, ut[6]

$$1+\boxed{2}\,\frac{5}{6}+\boxed{6}\,\frac{5}{6}+\boxed{12}\,\frac{5}{6}+\boxed{20}\,\frac{5}{6}\ \&\text{c.}-\frac{5}{6}-\boxed{4}\,\frac{5}{6}-\boxed{9}\,\frac{5}{6}-\boxed{16}\,\frac{5}{6}\ \&\text{c.}$$

in posteriori, ut

$$1+\boxed{3}\,\frac{5}{6}+\boxed{10}\,\frac{5}{6}+\boxed{21}\,\frac{5}{6}+\boxed{36}\,\frac{5}{6}\ \&\text{c.}-\frac{5}{6}-\boxed{6}\,\frac{5}{6}-\boxed{15}\,\frac{5}{6}-\boxed{28}\,\frac{5}{6}\ \&\text{c.}$$

ad unitatis complementum. Harum serierum termini repraesentant totidem potestates fractionis $\frac{5}{6}$, quarum indices crescunt differentiis servantibus inter se progressionem Arithmeticam, cujus communis excessus ibi est binarius, hic quaternarius.

5 Voir note 2 *supra*.
On notera, pour cet article, une erreur d'impression de la publication originale qui a été corrigée dans les *Opera*, mais reprise dans *Werke* 3, p. 91: au lieu de «... le premier aura gagné» (ligne 1), lire «... le premier as aura gagné».

6 La notation inhabituelle «$\boxed{2}\,\frac{5}{6}$», «$\boxed{6}\,\frac{5}{6}$» etc. désigne ici $\left(\frac{5}{6}\right)^2$, $\left(\frac{5}{6}\right)^6$ etc. (N.D.L.R.)

Op. XCVII

Section indéfinie des Arcs circulaires En telle raison qu'on voudra, avec la maniére d'en déduire les Sinus, &c.[1]

Mém. Paris 1702 (1704), pp. 281–288 – Jac. B. Opera, pp. 921–929

Dans ce que mon Frere donna des Segmens & des Secteurs cycloïdaux quarrables[2], au mois de Juillet des Actes de Leipsik de 1699, il dît qu'il avoit aussi l'art d'en trouver une infinité de Zones quarrables, dont il donnoit seulement quelques éxemples, en supprimant sa méthode. J'y pensay, & le mois de Septembre suivant j'en donnay une tres-simple dans les mêmes Actes[3], laquelle fournit aussi une infinité de pareilles Zones quarrables, que je déterminay ensuite (au mois de Decembre 1700 de ces Actes[4]) par le moyen d'une Courbe, laquelle (quoyque mécanique) a cela de singulier, qu'outre la cycloïde en question, elle n'éxige pour sa construction que des lignes droites & circulaires; ce qui me parut resoudre le Problême tout aussi simplement que le seroit un Problême solide par la seule regle & le compas outre la Section conique qu'on y voudroit supposer.

Cependant, les mêmes verités se pouvant trouver par des voyes souvent tres-différentes, cette méthode n'étoit point celle de mon Frere: Il a marqué ensuite[5], au mois d'Avril des Actes de Leipsik de 1701, que la sienne consistoit dans une progression telle que sont celles qu'il y donne. Mais prévoyant assés comment une telle progression se pouvoit aussi trouver par la méthode qui m'a donné autrefois[6] celles de M. Leibnitz[7] pour la détermination des Sinus, &c.

1 Le titre continue: «Par M. Bernoulli Professeur à Bâle. Extraite d'une de ses Lettres écrite de Bâle le 13. Juillet 1702.» L'original de cette lettre à Pierre Varignon est perdu; mais nous avons la confirmation de son existence dans la lettre de Varignon à Johann I Bernoulli du 15 août 1702 (v. Joh. I B. *Briefe* 2, n° 68, pp. 321–325), où Varignon cite de larges extraits de la réponse qu'il avait envoyée à Jacob le 22 juillet. V. aussi Jac. B. *Briefe*, n° 45, p. 222. Selon une note en marge des *Mémoires*, la pièce a été présentée à l'Académie des Sciences le 6 décembre. Varignon avait abandonné son opposition à cette publication parce que Jacob lui avait confié le soin de la commenter dans la partie *Histoire* (cf. sa lettre à Johann du 18 décembre, Joh. I B. *Briefe* 3, n° 69, p. 35). Dans sa relation *Sur la section indefinie des Arcs circulaires, Et la maniere de déduire les Sinus des Arcs donnés*, Hist. Paris 1702 (1704), pp. 58–60, Varignon donne en fait une présentation très favorable à Johann et à ses revendications de priorité (N.D.L.R.)
Cf. Med. CLXXVIII (pp. 236–244 h.v.), et l'*Introduction*, pp. 26–31 h.v.

2 Joh. I B. Op. LVIII, *Opera* I, pp. 322–327 – *Streitschriften*, pp. 393–398 (N.D.L.R.)

3 Jac. B. Op. XCII, *Opera*, pp. 871–873 – *Streitschriften*, pp. 400–402 (N.D.L.R.)

4 Jac. B. Op. XCV, *Opera*, pp. 892–894 – *Streitschriften*, pp. 455–456 (N.D.L.R.)

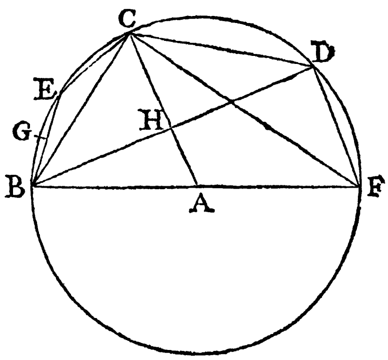
5 Joh. I B. Op. LXIX, *Opera* I, pp. 386–392 – *Streitschriften*, pp. 464–469 (N.D.L.R.)

6 Dans Med. CLXXVIII (pp. 236–244 h.v.), en 1691 ou 1692.

7 Leibniz avait trouvé ces séries dans *Quadratura Arithmetica* ...: AE Aprilis 1691, pp. 178–182 – *Math. Schriften* V, pp. 128–132.

par le moyen des arcs donnés, j'en suis demeuré là jusqu'à ce qu'enfin M. Herman[8] étant parvenu depuis par une route tres-différente & tres-belle à une progression qui peut servir de même à couper telle Courbe qu'on voudra en raison donnée, il me prît envie d'essayer jusqu'où ma méthode me pouvoit conduire de ce côté là: & non-seulement j'apperçus aussi-tôt que la Section indéfinie de l'arc circulaire, & l'invention de son Sinus, &c. tirée de cet art luy-même, ne faisoient proprement qu'un même Problême; mais encore arrivay-je enfin à celle de M. Herman: Voici pour ce qui regarde la question presente.

Lemme. *Si l'on appelle f la corde* CD *d'un arc quelconque d'un cercle dont le rayon soit pris pour l'unité, l'on aura* $\sqrt{4ff-f^4}$ *pour la valeur de la corde* BD *d'un arc double de celuy-là.*



Demonst. En effet, si outre le diametre BF & le rayon AC, l'on fait les droites BC & CF, l'on aura deux triangles isoscelles que leurs angles égaux CDB & AFC rendront semblables; & qui par conséquent donneront

$$\mathrm{AF}.\mathrm{CF}\left(\sqrt{\overline{\mathrm{BF}}^2-\overline{\mathrm{BC}}^2}\right)::\mathrm{CD}.\mathrm{BD},$$

c'est à dire, $1.\sqrt{4-ff}::f.\mathrm{BD}=\sqrt{4ff-f^4},$

ou $\overline{\mathrm{BD}}^2=4ff-f^4.$ *Ce qu'il faloit démontrer.*

8 Il s'agit apparemment ici du travail de Jacob Hermann publié par la suite dans les AE Augusti 1703, pp. 345–352: Na. 005, *Demonstratio Geminae Formulae a Celeberrimo Dn. Joh. Bernoulli, in Actis Erudit. Mens. Apr. A. 1701, pro multisectione anguli vel arcus circularis, sine demonstratione exhibitae*; bien que rien ne semble s'y rapporter à ce qu'en dit Bernoulli («une progression qui peut servir ... à couper telle Courbe qu'on voudra»). Hermann y prend comme point de départ le *lemme de Ptolémée* sur le produit des diagonales d'un quadrilatère inscriptible; et il y cite, non seulement le présent article de Jacob Bernoulli (cf., dans celui-ci, le P.S. ci-dessous), mais aussi Oughtred, Wallis, Leibniz et Newton.

Il suit delà que si dans le demi-cercle BCDF, on prend plusieurs arcs BG, BE, BC, BD, &c. en progression double; c'est à dire, dont le second BE soit double du premier BG pris à discretion, le troisiéme BC double du second, le quatriéme BD double du troisiéme, &c. Et dont les cordes étant aussi BG, BE, BC, BD, celle du premier BG soit appellée x; celle du dernier BD, a; & celle de son complement DF au demi-cercle, $b=\sqrt{4-aa}$: Il suit, dis-je, du Lemme précedent que $\overline{BE}^2$ (quarré de la corde de l'arc double de BG) est $=4xx-x^4$; ce qui étant pris pour ff, l'on aura de même $\overline{BC}^2$ (quarré de la corde de l'arc double de BE, ou quadruple de BG) $=16xx-20x^4+8x^6-x^8$; Et en prenant encore cela pour ff, l'on aura encore de même $\overline{BD}^2$ (quarré de la corde de l'arc double de BC ou octuple de BG) $=64xx-336x^4$, &c. Et toûjours de même comme dans la Table suivante.

Arcs multiples de BG	*Quarrés des cordes de ces arcs*
1	xx
2	$4xx-\quad x^4$
4	$16xx-\ 20x^4+\ \ 8x^6-\ \ x^8$
8	$64xx-336x^4+672x^6-660x^8+352x^{10}-104x^{12}+16x^{14}-x^{16}$

Presentement pour trouver une expression générale de la corde d'un arc indéfiniment multiple d'un autre, il ne s'agit plus que d'observer suivant quelle loy se fait la progression des coëfficiens de tous ces termes. Or je remarque que tous ces coëfficiens résultent de l'addition de nombres figurés entr'eux: Par éxemple, les coëfficiens de la premiere rangée perpendiculaire, qui sont les quarrés 1, 4, 16, 64, naissent de l'addition d'une double rangée de nombres triangulaires, c'est à dire, de nombres figurés du premier ordre; les coëfficiens de la seconde rangée perpendiculaire, qui sont 1, 20, 336, résultent aussi de l'addition d'une double rangée de nombres triangulo-pyramidaux, c'est à dire, de nombres figurés du troisiéme ordre; les coëfficiens de la troisiéme rangée perpendiculaire, qui sont 8, 672, se forment encore de même de l'addition d'une double rangée de triang-triang-pyramidaux, c'est à dire, de nombres figurés du cinquiéme ordre; Et ainsi à l'infini comme on le voit dans la Table suivante.

	1. Ord. Fig.	*3. Ord. Fig.*	*5. Ord. Fig.*
1	1+ 0= **1**	0+ 0= 0	0+ 0= 0
2	3+ 1= **4**	1+ 0= **1**	0+ 0= 0
3	6+ 3= 9	5+ 1= 6	1+ 0= 1
4	10+ 6=**16**	15+ 5= **20**	7+ 1= **8**
5	15+10=25	35+ 15= 50	28+ 7= 35
6	21+15=36	70+ 35=105	84+ 28=112
7	28+21=49	126+ 70=196	210+ 84=294
8	36+28=**64**	210+126=**336**	462+210=**672**

C'est pourquoy la maniére de trouver tous les derniers termes de chaque rangée de nombres figurés par le moyen du nombre de ceux qui les précede, étant connuë, il est visible, que l'on aura aussi celle de trouver tous les termes de la progression dont il s'agit ici: Par éxemple, si n est le nombre des termes, on trouvera nn pour le dernier de la premiére rangée; $\frac{nn\cdot nn-1}{3\cdot 4}$ pour le dernier de la seconde; $\frac{nn\cdot nn-1\cdot nn-4}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}$ pour le dernier de la troisiéme; $\frac{nn\cdot nn-1\cdot nn-4\cdot nn-9}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}$ pour le dernier de la quatriéme, &c. D'où l'on voit qu'en supposant l'arc BD indéfiniment multiple de BG, c'est à dire, comme valant l'arc BG pris autant de fois qu'il y a d'unités dans n; l'on aura $\overline{BD}^2$ (quarré de la corde BD) ou

$$aa = nnxx - \frac{nn\cdot nn-1}{3\cdot 4}x^4 + \frac{nn\cdot nn-1\cdot nn-4}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}x^6 - \frac{nn\cdot nn-1\cdot nn-4\cdot nn-9}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}x^8 + \&c.$$

Et $\overline{DF}^2$ ou

$$bb = 4 - aa = 4 - nnxx + \frac{nn\cdot nn-1}{3\cdot 4}x^4 - \frac{nn\cdot nn-1\cdot nn-4}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}x^6 + \frac{nn\cdot nn-1\cdot nn-4\cdot nn-9}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}x^8 - \&c.$$

Lesquelles valeurs donneront celles de a & de b par le moyen des interpolations de M. Wallis, ou en la maniére que voici.

Soient deux Progressions feintes

$$a = nx - px^3 + qx^5 - rx^7 + sx^9 - tx^{11} + \&c.$$

Et $$b = 2 - pxx + qx^4 - rx^6 + sx^8 - tx^{10} + \&c.$$

qu'il faut ensuite quarrer pour avoir

$$\begin{array}{rcccccl} aa = nnxx & - 2npx^4 & + 2nqx^6 & - 2nrx^8 & + 2nsx^{10} & - \&c. \\ & & + pp & - 2pq & + 2pr & \\ & & & & + qq & \end{array}$$

Et $$\begin{array}{rcccccl} bb = 4 & - 4pxx & + 4qx^4 & - 4rx^6 & + 4sx^8 & - 4tx^{10} & \&c. \\ & & + pp & - 2pq & + 2pr & - 2ps & \\ & & & & + qq & - 2qr & \end{array}$$

Lesquels quarrés comparés terme à terme avec les correspondans des progressions qu'on vient de trouver, détermineront les valeurs des coëfficiens p, q, r, s, &c. Et de cette maniére l'on aura

$$a = nx - \frac{n \cdot nn-1}{4 \cdot 6} x^3 + \frac{n \cdot nn-1 \cdot nn-9}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} x^5 - \frac{n \cdot nn-1 \cdot nn-9 \cdot nn-25}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 14} x^7 + \&c.$$

Et $$b = 2 - \frac{nn}{4} xx + \frac{nn \cdot nn-4}{4 \cdot 6 \cdot 8} x^4 - \frac{nn \cdot nn-4 \cdot nn-16}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12} x^6$$

$$+ \frac{nn \cdot nn-4 \cdot nn-16 \cdot nn-36}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 14 \cdot 16} x^8 - \&c.$$

où la loy de la progression est tres-facile à reconnoître. Mais parceque dans la premiere 1, 9, 25, &c. expriment les quarrés de tous les nombres impairs, & que dans la seconde 4, 16, 36, &c. expriment aussi les quarrés de tous les nombres pairs, on voit que quelque nombre entier rationel que soit n, il y aura toûjours quelque terme qui s'évanoüira avec ceux qui le suivent dans l'une ou dans l'autre de ces progressions: De maniére qu'alors cette progression se changera en une équation Algebraïque finie, laquelle disposée comme l'on dispose d'ordinaire celles dont le premier terme n'est point affecté, se changera en celle-ci

$$x^n - nx^{n-2} + \frac{n \cdot n-3}{2} x^{n-4} - \frac{n \cdot n-4 \cdot n-5}{2 \cdot 3} x^{n-6}$$

$$+ \frac{n \cdot n-5 \cdot n-6 \cdot n-7}{2 \cdot 3 \cdot 4} x^{n-8} \ldots \left\{ \begin{array}{ll} \text{Si } n \text{ est impair} & 8\, nx\, 8\, a \\ \text{Si } n \text{ est pair} & 8 \frac{nnxx}{4} 8\, 2\, 8\, b \end{array} \right\} = 0,$$

laquelle donne tout d'un coup celle de telle Section déterminée qu'on voudra, en prenant n pour le nombre des parties requises: Par éxemple, si l'on veut diviser un arc de cercle ou un angle en 3, 5, 7, ou en 6 parties égales, il faut prendre $n=3$, 5, 7, ou 6 dans la précédente équation générale; & elle se changera en celles-ci

$$\begin{gathered} x^3 - 3x + a = 0 \\ x^5 - 5x^3 + 5x - a = 0 \\ x^7 - 7x^5 + 14x^3 - 7x + a = 0 \\ x^6 - 6x^4 + 9xx - 2 + b = 0 \end{gathered}$$

pour les Sections requises, lesquelles sont precisément les mêmes qui se trouvent par la voye ordinaire.

Voilà pour ce qui regarde la Section des arcs circulaires ou des angles en tel nombre de parties égales qu'on voudra; presentement ces arcs étant donnés, voici la maniére d'en trouver les cordes ou les sinus: le passage de l'un à l'autre est facile. Pour cela concevons que la corde BG (que nous avons appellée x) est infiniment petite, de maniére qu'elle se confonde avec l'arc BG, & que le nombre n (qui marque combien de fois cet arc BG est surpassé par l'arc BD) soit infini: Alors on aura l'arc BD (que j'appelle presentement f) $= nx$. Cela posé, les nombres 1, 9, 25, &c. de même que 4, 16, 36, &c. se trouvant nuls par raport à nn, les équations $a = nx$ &c. et $b = 2 - \frac{nnxx}{4}$ &c. qu'on vient de trouver, se changeront en celles ci:

$$a = nx - \frac{n^3x^3}{4 \cdot 6} + \frac{n^5x^5}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} - \frac{n^7x^7}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 14} + \text{\&c.}$$

$$\text{Et } b = 2 - \frac{nnxx}{4} + \frac{n^4x^4}{4 \cdot 6 \cdot 8} - \frac{n^6x^6}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12} + \frac{n^8x^8}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 14 \cdot 16} - \text{\&c.}$$

lesquelles (à cause de $nx = f$) se changent encore en

$$\text{BD} = a = f - \frac{f^3}{4 \cdot 6} + \frac{f^5}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} - \frac{f^7}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 14} + \text{\&c.}$$

Et en

$$DF = b = 2 - \frac{ff}{4} + \frac{f^4}{4\cdot 6\cdot 8} - \frac{f^6}{4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12} + \frac{f^8}{4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12\cdot 14\cdot 16} - \&c.$$

C'est ainsi que l'arc BD étant donné, j'en ay autrefois déterminé la corde BD, & celle de son complement DF.

Si presentement on veut le Sinus d'un arc proposé, soit cet arc $BC\left(\frac{arc.\ BD}{2} = \frac{1}{2}f\right) = g$, son Sinus $BH\left(\frac{1}{2}BD = \frac{a}{2}\right) = s$; $AH\left(\frac{1}{2}DF = \frac{1}{2}b\right) = c$; $HC = v$: à ce compte l'on aura $a = 2s$, $b = 2c$, & $f = 2g$; lesquelles valeurs de a, b, f, étant substituées en leurs places dans les deux derniéres égalités précedentes, l'on aura

$$s \text{ (Sin. droit de l'arc BC)} = g - \frac{g^3}{2\cdot 3} + \frac{g^5}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \frac{g^7}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7} + \&c.$$

$$c \text{ (Sin. compl.)} = 1 - \frac{gg}{2} + \frac{g^4}{2\cdot 3\cdot 4} - \frac{g^6}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} + \&c.$$

Donc

$$v \text{ (Sin. vers.)} = 1 - c = \frac{gg}{2} - \frac{g^4}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{g^6}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} - \frac{g^8}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8} + \&c.$$

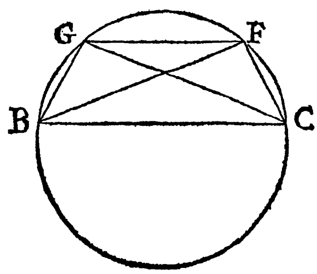
lesquelles progressions sont précisément les mêmes que celles que M. Leibnitz a données dans les Actes de Leipsik[9] au mois d'Avril de 1691, pag. 179. Et de cette maniére l'on voit que nous avons donné la solution de deux Problêmes à la fois: sçavoir, la division d'un angle ou d'un arc de cercle en raison donnée, & réciproquement le Sinus d'un arc circulaire ou d'un angle donné quelconque. Au reste il est à remarquer que M. Newton en résolvant le premier de ces Problêmes, est tombé dans la même progression que nous, comme on le voit pag. 384 de l'Algebre de M. Wallis[10] imprimée à Oxfort en 1693.

9 *op. cit.* note 7 *supra* (N.D.L.R.)

10 J. Hermann, dans son article cité note 8 *supra*, donne aussi la référence au tome III des *Opera Mathematica* de Wallis, p. 625, où Wallis reproduit la lettre de Newton à Leibniz du 13 juin 1676 et en donne la date; son maître Bernoulli ne pouvait guère ignorer cette référence. Il semblerait que celui-ci ait éprouvé quelque peine à reconnaître que la priorité de Newton remontait à une date si éloignée.

P. S.

Un des principes sur lesquels M. Herman s'est fondé dans la recherche de la multisection de l'angle, est la proprieté du quadrilatére inscrit dans le cercle, dont le produit des diagonales est égal à la somme des produits des côtés opposés. Sur quoy j'ay trouvé que l'on peut aussi déduire nôtre formule de cette même propriété, en cherchant sans interruption les cordes ou les quarrés des cordes de l'arc double, triple, quadruple, quintuple, &c. Et non par sauts, comme j'ay fait celles de l'arc double, quadruple, octuple, &c. par l'autre méthode: en voici la démonstration.



Dans le quadrilatére inscrit au cercle BGFC, soit BG $=$ FC $= x$, GF $= s$, BF ou GC $= t$, & BC $= v$; l'on aura par ladite propriété $tt = xx + sv$; & par conséquent $v = \frac{tt - xx}{s}$, & $vv = \frac{t^4 - 2ttxx + x^4}{ss}$. Or si GF ou s est posée égale à BG ou x, BF ou t sera la corde de l'arc double, & BC ou v la corde de l'arc triple de BG; & si s est la corde de l'arc double, t sera celle du triple, & v celle du quadruple de l'arc BG; & si s est celle du triple, t sera celle du quadruple, & v celle du quintuple; & ainsi de suite. Donc la corde de l'arc simple étant x, & celle du double $\sqrt{4xx - x^4}$, l'on connoîtra par cette équation celle du triple; & de même par la corde de l'arc double & par celle du triple, on trouvera celle du quadruple; & par celles des arcs triple & quadruple, l'on sçaura celle du quintuple, &c. ainsi de suite, comme l'on voit ici.

Quarrés des Cordes.

$$\begin{array}{r|l}
1 & xx \\
2 & 4xx - x^4 \\
3 & 9xx - 6x^4 - x^6 \\
4 & 16xx - 20x^4 + 8x^6 - x^8 \\
5 & 25xx - 50x^4 + 35x^6 - 10x^8 + x^{10} \\
6 & 36xx - 105x^4 + 112x^6 - 54x^8 + 12x^{10} - x^{12}
\end{array}$$

Cordes elles-mêmes.

$$\begin{array}{r|l}
1 & x \\
2 & x\sqrt{4-xx} \\
3 & 3x - x^3 \\
4 & \overline{2x-x^3}\ \sqrt{4-xx} \\
5 & 5x - 5x^3 + x^5 \\
6 & \overline{3x-4x^3+x^5}\ \sqrt{4-xx}
\end{array}$$

Où l'on remarque avec plaisir que toutes les cordes dont l'exposant du multiple est un nombre impair, deviennent rationelles pendant que les autres sont sourdes, mais toutes commensurables entr'elles, & divisibles par $\sqrt{4-xx}$.

Manuskripte

Manuscrits

VP I

Attollere Infinitinomium ad potestatem indefinitam[1]

Ms UB Basel L I a 1, pp. 1–2 – Jac. B. Opera, pp. 993–998

Audio Cl. Moivraeum docere[2], in *Transact. Anglicanis* 1697, modum attollendi Infinitinomium

$$ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 + \text{\&c.}$$

ad potestatem indefinitam m. Sed quia Infinitinomium hoc est particulare, nec adeo Canones Auctoris applicari possunt ad quaevis alia Infinitinomia, ex. gr. ad

$$ax + bx^3 + cx^6 + dx^{10} + ex^{15}\ \text{\&c.}^3;$$

methodum docebo conficiendi rem generalissime, posito Infinitinomio

$$a + b + c + d + e + f + \text{\&c.}$$

ubi per litteras a, b, c &c. non soli coefficientes, sed ipsi termini integri intelliguntur. Id vero gemino modo efficio.

MODUS PRIMUS.

Quia per combinationum Doctrinam [Vide *Stochasticen* meam Part. II cap. 8][4] discimus, membra potestatis cujusvis Multinomii alicujus aliter non exprimi, nisi per coacervationem combinationum partium radicis, factarum secundum exponentem aequalem potestatis indici; coefficientem vero termini cujusvis exprimi, per numerum permutationum litterarum illum terminum constituentium: idcirco si Series convergens

$$a + b + c + d + e\ \ \text{\&c.}$$

elevanda sit ad potestatem m, multiplico a^m per 1; a^{m-1} per singulas reliquarum b, c, d, e, &c.; a^{m-2} per singulos biniones caeterarum bb, bc, bd, be, &c., nec non

1 Cf. Med. CCLXV (pp. 249–253 h.v.), que Jacob a transcrite ici avec peu de modifications. Le fait qu'il lui ait donné la priorité pour l'insertion dans ses *Varia Posthuma* semble suggérer qu'il y attachait quelque importance (opinion que le lecteur moderne ne saurait guère partager).

2 C'est l'article d'Abraham de Moivre, *A Method of Raising an infinite Multinomial to any given Power, or Extracting any given Root of the same* dans les *Philosophical Transactions of the Royal Society* de 1697, pp. 619–625.

3 Ici Cramer (*Opera*, p. 993, note (a)) note avec raison: *Pourquoi pas?* Pourquoi, en effet, une méthode qui s'applique à une série de puissances quelconque ne s'appliquerait-elle pas à une série où manquent quelques termes?

4 La référence est à l'*Ars Conjectandi*, pp. 130–132 (*Werke* 3, pp. 190–191).

Varia Posthuma Jac. Bernoulli.

Artic. I.

Attollere Infinitinomium ad Potestatem infinitam.

Audio, Cl. Moyvreum docere in Transact. Anglicanis 1697 modum attollendi Infinitinomium $ax+bx^2+cx^3+dx^4+ex^5$ &c. ad Potestatem indefinitam m. Et quia Infinitinomium hoc est particulare, nec adeo Canones Autoris applicari possunt ad quaevis alia Infinitinomia, ex. gr. ad $ax+bx^3+cx^6+dx^{10}+ex^{15}$ &c. methodum docebo, conficiendi rem generalissime, posito infiniti nomio $a+b+c+d+e+f$ &c. ubi per literas a, b, c &c. non soli coefficientes, sed ipsi termini integri intelliguntur. Id vero gemino modo efficio: Mod. I. Quia per Combinationum Doctrinam (vid. Stochasticen meam Part. II. cap. VIII) didicimus, membra potestatis cujusvis multinomii alicujus aliter non exprimi, nisi per coacervationem combinationum partium radicis, factarum secundum exponentem aequalem potestatis indici; coefficientem vero termini cujusvis exprimi per numerum permutationum literarum illum terminum constituentium: Dicimus si series convergens $a+b+c+d+e+f$ &c. elevanda sit ad potestatem m, multiplico a^m per 1, a^{m-1} per singulas reliquarum b, c, d, e &c., a^{m-2} per singulos biniones caeterarum bb, bc, bd, be &c. nec non cc, cd, ce &c., a^{m-3} per singulos earum terniones b^3, bbc, bbd &c. bcc, bcd &c. & ita consequenter, quousque progredi fuerit necesse; hac ratione

$$
\begin{array}{ll}
1 & \text{in } a^m \\
b+c+d+e+f \text{ \&c.} & \text{in } a^{m-1} \\
\left.\begin{array}{l} +bb+bc+bd+be \text{ \&c.} \\ +cc+cd \text{ \&c.} \end{array}\right\} & \text{in } a^{m-2} \\
\left.\begin{array}{l} +b^3+bbc+bbd \text{ \&c.} \\ +bcc \text{ \&c.} \end{array}\right\} & \text{in } a^{m-3} \\
+b^4+b^3c \text{ \&c.} & \text{in } a^{m-4} \\
+b^5 \text{ \&c.} & \text{in } a^{m-5} \\
\text{\&c.} & \text{in } \text{\&c.}
\end{array}
$$

Coefficiens cujusque termini invenitur, considerando, numerum permutationum literarum quotcunque $a^p b^q c^r d^s$ (sumto $p+q+r+s=m$) generaliter esse $\dfrac{1.2.3.4\ldots m}{1.2.3\ldots p \times 1.2.3\ldots q \times 1.2.3\ldots r \times \ldots}$ h.e. (facta divisione per $1.2.3.4\ldots p$) $\dfrac{m.m-1.m-2\ldots p+1}{1.2.3\ldots q \times 1.2.3\ldots r \times 1.2.3\ldots s}$. Ita ex. gr. terminus $a^{m-3}b^3$ (ubi p valet $m-3$, & q, 3) coefficientem habebit $\dfrac{m.m-1.m-2}{1.2.3}$: terminus $a^{m-3}bcc$ (ubi $p=m-3$, $q=1$, $r=2$) pro suo adsumet $\dfrac{m.m-1.m-2}{1.2}$; terminus $a^{m-10}b^2c^3d^5$ (ubi $p=m-10$, $q=2$, $r=3$, $s=5$) pro suo obtinebit $\dfrac{m.m-1.m-2.m-3.m-4.m-5.m-6.m-7.m-8.m-9}{1.2 \times 1.2.3 \times 1.2.3.4.5}$. Et sic de reliquis omnibus.

Première page du manuscrit des «Varia Posthuma» (Ms UB Basel L I a 1) *cc*, *cd*, *ce*, &c., &c.; a^{m-3} per singulos earum terniones b^3, b^2c, b^2d, &c. *bcc*, *bcd*, &c., &c., & ita consequenter, quousque progredi necesse fuerit; hac ratione[5]

$$\begin{array}{rl}
1 & \times a^m \\
b+c+d+e+f+g \quad \&c. & \times a^{m-1} \\
\left.\begin{array}{r} bb+bc+bd+be+bf \quad \&c. \\ +cc+cd+ce \quad \&c. \\ +dd \quad \&c. \end{array}\right\} & \times a^{m-2} \\
\left.\begin{array}{r} b^3+b^2c+b^2d+b^2e \quad \&c. \\ +bc^2+bcd \quad \&c. \\ \&c. \end{array}\right\} & \times a^{m-3} \\
\left.\begin{array}{r} b^4+b^3c+b^3d \quad \&c. \\ +b^2c^2 \&c. \\ \&c. \end{array}\right\} & \times a^{m-4} \\
\left.\begin{array}{r} b^5+b^4c \quad \&c. \\ \&c. \end{array}\right\} & \times a^{m-5} \\
\left.\begin{array}{r} b^6 \quad \&c. \\ \&c. \end{array}\right\} & \times a^{m-6} \\
\&c. & \times \&c.
\end{array}$$

Coefficiens cujusque termini invenitur considerando numerum permutationum litterarum quotcunque $a^p b^q c^r d^s$ (sumpto $p+q+r+s=m$) generaliter esse

$$\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 \ldots m}{1\cdot 2\ldots p\times 1\cdot 2\ldots q\times 1\cdot 2\ldots r\times 1\cdot 2\ldots s},$$

hoc est, facta divisione per $1\cdot 2\ldots p$

$$=\frac{m\cdot m-1\cdot m-2\ldots p+1}{1\cdot 2\ldots q\times 1\cdot 2\ldots r\times 1\cdot 2\ldots s}.$$

Ita, ex.gr. terminus $a^{m-3}b^3$ (ubi p valet $m-3$, & q 3), coefficientem habebit

$$\frac{m\cdot m-1\cdot m-2}{1\cdot 2\cdot 3};$$

5 C'est l'arrangement dit *lexicographique*; cf. Med. CCLXV, note 3, p. 251 h.v.

terminus $a^{m-3}bcc$ (ubi $p=m-3$, $q=1$, $r=2$), pro suo adsumet

$$\frac{m\cdot m-1\cdot m-2}{1\times 1\cdot 2};$$

terminus $a^{m-10}b^2c^3d^5$ (ubi $p=m-10$, $q=2$, $r=3$, $s=5$), pro suo obtinebit

$$\frac{m\cdot m-1\cdot m-2\cdot m-3\cdot m-4\cdot m-5\cdot m-6\cdot m-7\cdot m-8\cdot m-9}{1\cdot 2\times 1\cdot 2\cdot 3\times 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}.$$

Et sic de reliquis omnibus.

MODUS ALTER.

Elegantior est & legem progressionis melius ob oculos ponit. Ponatur

$$(a+b+c+d+e+f\ \&\text{c.})^m = p+q+r+s+t+u\ \&\text{c.}:$$

unde, sumptis utrinque logarithmis, fit

$$m\mathfrak{l}(a+b+c+d+e+f\ \&\text{c.}) = \mathfrak{l}(p+q+r+s+t+u\ \&\text{c.});$$

differentiandoque emergit

$$\begin{aligned}(m\mathrm{d}a + m\mathrm{d}b + m\mathrm{d}c + m\mathrm{d}d + m\mathrm{d}e + m\mathrm{d}f\ \&\text{c.}):(a+b+c+d+e+f\ \&\text{c.})\\ = (\mathrm{d}p+\mathrm{d}q+\mathrm{d}r+\mathrm{d}s+\mathrm{d}t+\mathrm{d}u\ \&\text{c.}):(p+q+r+s+t+u\ \&\text{c.})\end{aligned}$$

(ubi pro nota differentialis ponitur d ad distinctionem termini d), &, multiplicando decussatim,

$$\begin{array}{rcr}
mp\mathrm{d}a + mp\mathrm{d}b + mp\mathrm{d}c + mp\mathrm{d}d + mp\mathrm{d}e + mp\mathrm{d}f\ \&\text{c.} & = & a\mathrm{d}p + a\mathrm{d}q + a\mathrm{d}r + a\mathrm{d}s + a\mathrm{d}t + a\mathrm{d}u\ \&\text{c.}\\
+ mq\mathrm{d}a + mq\mathrm{d}b + mq\mathrm{d}c + mq\mathrm{d}d + mq\mathrm{d}e\ \&\text{c.} & & + b\mathrm{d}p + b\mathrm{d}q + b\mathrm{d}r + b\mathrm{d}s + b\mathrm{d}t\ \&\text{c.}\\
+ mr\mathrm{d}a + mr\mathrm{d}b + mr\mathrm{d}c + mr\mathrm{d}d\ \&\text{c.} & & + c\mathrm{d}p + c\mathrm{d}q + c\mathrm{d}r + c\mathrm{d}s\ \&\text{c.}\\
+ ms\mathrm{d}a + ms\mathrm{d}b + ms\mathrm{d}c\ \&\text{c.} & & + d\mathrm{d}p + d\mathrm{d}q + d\mathrm{d}r\ \&\text{c.}\\
+ mt\mathrm{d}a + mt\mathrm{d}b\ \&\text{c.} & & + e\mathrm{d}p + e\mathrm{d}q\ \&\text{c.}\\
+ mu\mathrm{d}a\ \&\text{c.} & & + f\mathrm{d}p\ \&\text{c.}\\
\&\text{c.} & & \&\text{c.}
\end{array}$$

Igitur, facta comparatione terminorum ejusdem ordinis[6], habetur

1. $mp\mathrm{d}a - a\mathrm{d}p = 0$
2. $mq\mathrm{d}a - a\mathrm{d}q = b\mathrm{d}p - mp\mathrm{d}b$
3. $mr\mathrm{d}a - a\mathrm{d}r = b\mathrm{d}q - mq\mathrm{d}b + c\mathrm{d}p - mp\mathrm{d}c$
4. $ms\mathrm{d}a - a\mathrm{d}s = b\mathrm{d}r - mr\mathrm{d}b + c\mathrm{d}q - mq\mathrm{d}c + d\mathrm{d}p - mp\mathrm{d}d$
5. $mt\mathrm{d}a - a\mathrm{d}t = b\mathrm{d}s - ms\mathrm{d}b + c\mathrm{d}r - mr\mathrm{d}c + d\mathrm{d}q - mq\mathrm{d}d + e\mathrm{d}p - mp\mathrm{d}e$

&c. &c. &c. &c. &c. &c. &c. &c. &c. &c.

6 Cf. Med. CCLXV, note 4, p. 252 h.v.

quarum aequationum prima $mp\,\mathrm{d}a - a\,\mathrm{d}p = 0$, dat $p = a^m$. Ad caeteras resolvendas, fingatur generalis aequatio

$$my\,\mathrm{d}a \;-\; a\,\mathrm{d}y \;=\; \mathrm{d}z;$$

sitque $y = a^m h$, erit $\mathrm{d}y = a^m\mathrm{d}h + ma^{m-1}h\,\mathrm{d}a$; adeoque

$$my\,\mathrm{d}a \;-\; a\,\mathrm{d}y[=\mathrm{d}z] \;=\; ma^m h\,\mathrm{d}a \;-\; a^{m+1}\mathrm{d}h \;-\; ma^m h\,\mathrm{d}a \;=\; -\; a^{m+1}\mathrm{d}h;$$

indeque $\mathrm{d}h = -\mathrm{d}z : a^{m+1}$, & $h = \int(-\mathrm{d}z : a^{m+1})$,

& $$y\,[a^m h] \;=\; a^m \int(-\mathrm{d}z : a^{m+1});$$

quo canone ad praecedentes aequationes applicato (quod fit interpretando pro secunda y per q & $\mathrm{d}z$ per $b\,\mathrm{d}p - mp\,\mathrm{d}b$, pro tertia y per r & $\mathrm{d}z$ per $b\,\mathrm{d}q - mq\,\mathrm{d}b + c\,\mathrm{d}p - mp\,\mathrm{d}c$, &c.], eliciuntur

1. $p \;=\; a^m$

2. $q \;=\; a^m \displaystyle\int \frac{mp\,\mathrm{d}b - b\,\mathrm{d}p}{a^{m+1}}$

3. $r \;=\; a^m \displaystyle\int \frac{mq\,\mathrm{d}b - b\,\mathrm{d}q + mp\,\mathrm{d}c - c\,\mathrm{d}p}{a^{m+1}}$

4. $s \;=\; a^m \displaystyle\int \frac{mr\,\mathrm{d}b - b\,\mathrm{d}r + mq\,\mathrm{d}c - c\,\mathrm{d}q + mp\,\mathrm{d}d - d\,\mathrm{d}p}{a^{m+1}}$

5. $t \;=\; a^m \displaystyle\int \frac{ms\,\mathrm{d}b - b\,\mathrm{d}s + mr\,\mathrm{d}c - c\,\mathrm{d}r + mq\,\mathrm{d}d - d\,\mathrm{d}q + mp\,\mathrm{d}e - e\,\mathrm{d}p}{a^{m+1}}$

&c. &c.

e quibus lex progressionis facile patescit. Liquet igitur, cum data sint a & m, dari p, adeoque & $\mathrm{d}p$; igitur cum & data sint b & $\mathrm{d}b$, dari quoque q & $\mathrm{d}q$; ac proinde propter data c & $\mathrm{d}c$, dari quoque r & $\mathrm{d}r$; sic porro.

Nota. Iidem valores litterarum p, q, r, s, t, &c. valent etiam pro Multinomio finito, puta Trinomio $a+b+c$, ad potestatem indefinitam m elevando: solum enim litterae sequentes, d, e, f, &c. earumque differentialia $\mathrm{d}d$, $\mathrm{d}e$, $\mathrm{d}f$, &c. nihilo sunt aequales ponendae.

Exemplo sit Infinitinomium $\alpha x+\beta x^3+\gamma x^6+\delta x^{10}+\varepsilon x^{15}+$&c. ubi

$$\begin{array}{ll} a = \alpha x & \mathrm{d}a = \alpha\, \mathrm{d}x \\ b = \beta x^3 & \mathrm{d}b = 3\,\beta x^2\,\mathrm{d}x \\ c = \gamma x^6 & \mathrm{d}c = 6\,\gamma x^5\,\mathrm{d}x \\ d = \delta x^{10} & \mathrm{d}d = 10\delta x^9\,\mathrm{d}x \\ e = \varepsilon x^{15} & \mathrm{d}e = 15\varepsilon x^{14}\mathrm{d}x \\ \text{\&c.} & \text{\&c.} \end{array}$$

e quibus eliciuntur

$$p = \alpha^m x^m \qquad \mathrm{d}p = m\alpha^{m-1}x^{m-1}\mathrm{d}x$$

$$q = m\cdot\alpha^{m-1}\beta x^{m+2} \qquad \mathrm{d}q = m\cdot(m+2)\alpha^{m-1}\beta x^{m+1}\mathrm{d}x$$

$$r = \frac{m\cdot m-1}{1\cdot 2}\,\alpha^{m-2}\beta^2 x^{m+4} + m\alpha^{m-1}\gamma x^{m+5}.$$

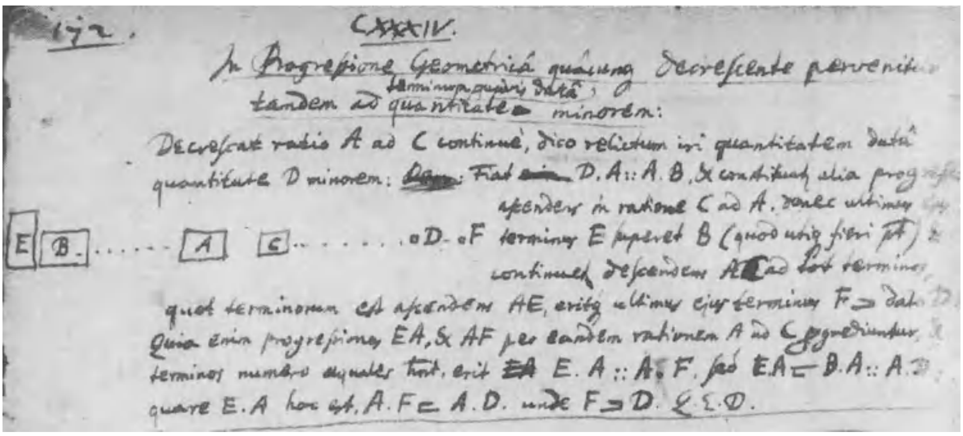
Index des *Meditationes*

Med. CXXXIV

In Progressione Geometrica quacunque decrescente pervenitur tandem ad terminum quavis data quantitate minorem[1]

Ms UB Basel L I a 3, p. 172 [TP: 1687, TA: 7/VI/1689]

Decrescat ratio A ad C continue, dico relictum iri quantitatem data quantitate D minorem: Fiat $D.A :: A.B$, & constituatur alia progressio ascendens in ratione C ad A, donec ultimus ejus terminus E superet B (quod utique fieri potest)


172. CXXXIV.
In Progressione Geometrica quacunq decrescente pervenit tandem ad quantitate[m] terminum quavis data minorem:
Decrescat ratio A ad C continue, dico relictum iri quantitatem data quantitate D minorem: ~~Fiat~~ Fiat D.A :: A.B, & constituat alia prog[ressio] ascendens in ratione C ad A, donec ultimus
E B ..... A C ...... D. F terminus E superet B (quod utiq fieri pt) & continuet descendens AC ad tot terminos
quot terminorum est ascendens AE, eritq ultimus ejus terminus F $\sqsupset$ dato D.
Quia enim progressiones EA, & AF per eandem rationem A ad C progrediuntur, & terminos numero aequales habent, erit E.A :: A.F, sed E.A $\sqsubset$ B.A :: A.D
quare E.A hoc est, A.F $\sqsubset$ A.D. unde F $\sqsupset$ D. Q.E.D.

& continuetur descendens AC ad tot terminos, quot terminorum est ascendens AE, eritque ultimus ejus terminus $F \sqsupset$ dato D. Quia enim progressiones EA, & AF per eandem rationem A ad C progrediuntur, & terminos numero aequales habent, erit $E.A :: A.F$, sed $E.A \sqsubset B.A :: A.D$; quare $E.A$ hoc est, $A.F \sqsubset A.D$, unde $F \sqsupset D$. Q.E.D.

1 Cf. Op.XXXV, Prop.VI (p. 48 h.v.).

Med. CXXXV

Si infinitae sint fractiones, quarum & numeratores & denominatores constituant progressionem Arithmeticam, erit ultimus terminus fractio, cujus numerator & denominator sunt communes differentiae progressionum[1]

Ms UB Basel L I a 3, p. 172 [TP: 1687, TA: 7/VI/1689]

$$\begin{array}{cccc} \text{I.} & \text{II.} & \text{III.} & \\ \dfrac{a}{b}\,. & \dfrac{a+c}{b+d}\,. & \dfrac{a+2c}{b+2d} & \text{etc.} \end{array}$$

Ad hoc analytice investigandum, consideretur quaesitus terminus ut cognitus, & vocetur $\frac{f}{g}$, numerus vero termini ut quaesitus, & dicatur x, eritque ex generatione progressionis terminus optatus

$$\frac{a+cx-c}{b+dx-d} = \frac{f}{g},$$

hoc est,

$$x = 1 + \frac{bf-ag}{cg-df},$$

quod cum debeat aequari infinito, oportet ut sit $cg-df=0$, hoc est, $cg=df$, hoc est $\frac{f}{g} = \frac{c}{d}$. Q.E.D.

Aliter brevius: Ultimus terminus est

$$\frac{a+\infty\, c}{b+\infty\, d} = \frac{\infty\, c}{\infty\, d} = \frac{c}{d}. \qquad \text{Q.E.D.}$$

NB. Summa omnium terminorum necessario infinita est, sive ultimus terminus primo major minorve sit; infiniti enim termini minori horum duorum aequales infinitam dant summam: unde a fortiori &c. Q.E.D.

1 Cf. Op. XXXV, Prop. X (p. 50 h.v.).

Med. CXXXVI

Si infinitae sint fractiones, quarum numeratores crescant progressione Arithm. & denominatores Geometrica, erit ultimus terminus 0; sin illi crescant Geometr., hi Arithm. erit ultimus terminus[1] ∞

Ms UB Basel L I a 3, p. 172 [TP: 1687, TA: 7/VI/1689]

I.

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{a+c}{db}\cdot\frac{a+2c}{ddb}\quad\text{etc.}$$

II.

$$\frac{b}{a}\cdot\frac{db}{a+c}\cdot\frac{ddb}{a+2c}$$

$$\left.\begin{array}{ll}
\textit{Dem.}\text{: Quia enim} & \dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{a+c}{db} :: \dfrac{a+c}{db}\cdot\dfrac{a+2c}{ddb}+\dfrac{cc}{addb}, \\[2ex]
\text{erit} & \dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{a+c}{db} \sqsupset \dfrac{a+c}{db}\cdot\dfrac{a+2c}{ddb} \\[2ex]
\text{ut \& ...} & \dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{db}{a+c} :: \dfrac{db}{a+c}\cdot\dfrac{ddb}{a+2c+\dfrac{cc}{a}}, \\[2ex]
\text{erit} & \dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{db}{a+c} \sqsubset \dfrac{db}{a+c}\cdot\dfrac{ddb}{a+2c}
\end{array}\right\}\ \text{unde}$$

si ibi primus terminus secundo major sit, aut hic secundus primo, manifestum progressionem ibi desituram in 0, hic in ∞.

1 Cf. Op. XXXV, Prop. XIII (p. 51 h.v.).

Med. CXXXIX

Invenire summam seriei infinitarum fractionum, quarum numeratores progrediantur vel juxta numeros naturales 1, 2, 3, vel trigonales 1, 3, 6, 10, vel pyramidales 1, 4, 10, 20, &c. denominatores vero constituant progressionem Geometricam[1]

Ms UB Basel L I a 3, pp. 176–177 [TP: 1687, TA: 7/VI/1689]

Superius Artic. 136 ostendimus, ultimum terminum ejusmodi seriei esse 0, summam vero quod attinet, ea invenitur resolvendo propositam seriem in infinitas alias series, quae singulae progressionem Geometricam constituunt, quarumque summae itidem Geometrice progrediuntur: En operationem:

$$\text{Series} \quad \frac{a}{b}+\frac{a+c}{db}+\frac{a+2c}{ddb}+\frac{a+3c}{d^3b}+\frac{a+4c}{d^4b}+\frac{a+5c}{d^5b}\text{ etc.}$$

resolvitur in

$$\begin{array}{rl}
\mathrm{I} = & \frac{a}{b}+\frac{a}{db}+\frac{a}{ddb}+\frac{a}{d^3b}+\frac{a}{d^4b}+\frac{a}{d^5b}\text{ etc.} = \frac{ad}{db-b}
\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{rl}
\mathrm{II} = & +\frac{c}{db}+\frac{c}{ddb}+\frac{c}{d^3b}+\frac{c}{d^4b}+\frac{c}{d^5b}\text{ etc.} = \frac{c}{db-b} \\
\mathrm{III} = & +\frac{c}{ddb}+\frac{c}{d^3b}+\frac{c}{d^4b}+\frac{c}{d^5b}\text{ etc.} = \frac{c}{ddb-db} \\
\mathrm{IV} = & +\frac{c}{d^3b}+\frac{c}{d^4b}+\frac{c}{d^5b}\text{ etc.} = \frac{c}{d^3b-ddb} \\
\mathrm{V} = & +\frac{c}{d^4b}+\frac{c}{d^5b}\text{ etc.} = \frac{c}{d^4b-d^3b} \\
\mathrm{VI} = & +\frac{c}{d^5b}\text{ etc.} = \frac{c}{d^5b-d^4b}
\end{array}\right\} = \frac{cd}{ddb-2db+b}$$

cui additus primus terminus $\dfrac{ad}{db-b}$, producit totius propositae seriei summam

$$= \frac{ad-\overline{a+c}\times d}{\square : \overline{d-1}\times b} = \frac{add-ad+cd}{ddb-2db+b}.$$

NB. doctrinae methodus requirit ut prius numerator primi termini ponatur aequalis differentiae numeratorum.

1 Cf. Op. XXXV, Prop. XIV (pp. 52–54 h.v.); il s'y trouve des énoncés un peu plus généraux.

Cor.: Si sit series infinita Geometrice proportionalium $A.B.C.D$ etc. erunt summa omnium, summa omnium excepta prima, summa omnium exceptis duabus primis etc. etiam continue proportionales, & quidem in eadem ratione A ad B.

Dem.: Quia enim $A.B::B.C::C.D$ etc. erit tum $Aq.Bq::Bq.Cq$, tum $A.B::A-B.B-C::B-C.C-D$; quare dividendo rationes aequales per aequales
$$\frac{Aq}{A-B}.\frac{Bq}{B-C}::\frac{Bq}{B-C}.\frac{Cq}{C-D},$$
hoc est summa omnium ad omnes sequentes primum, ut hi ad omnes sequentes secundum. Q.E.D.

& proinde summa illa ad hanc, ut reliquum ad reliquum, hoc est ut A ad B. Q.E.D.

Si numeratores sint Trigonales vertenda est series in aliam, cujus numeratores sint juxta praecedentem hypothesin, ita:

Series $$\frac{a}{b}+\frac{a+c}{db}+\frac{a+3c}{ddb}+\frac{a+6c}{d^3b}+\frac{a+10c}{d^4b}\text{ etc.}$$
resolvitur in
$$\left.\begin{array}{l}
\frac{a}{b}+\frac{a}{db}+\frac{a}{ddb}+\frac{a}{d^3b}+\frac{a}{d^4b}\text{ etc.} = \frac{ad}{db-b} \\
\phantom{\frac{a}{b}}+\frac{c}{db}+\frac{c}{ddb}+\frac{c}{d^3b}+\frac{c}{d^4b}\text{ etc.} = \frac{c}{db-b} \\
\phantom{\frac{a}{b}+\frac{c}{db}}+\frac{2c}{ddb}+\frac{2c}{d^3b}+\frac{2c}{d^4b}\text{ etc.} = \frac{2c}{ddb-db} \\
\phantom{\frac{a}{b}+\frac{c}{db}+\frac{2c}{ddb}}+\frac{3c}{d^3b}+\frac{3c}{d^4b}\text{ etc.} = \frac{3c}{d^3b-ddb} \\
\phantom{\frac{a}{b}+\frac{c}{db}+\frac{2c}{ddb}+\frac{3c}{d^3b}}+\frac{4c}{d^4b}\text{ etc.} = \frac{4c}{d^4b-d^3b}
\end{array}\right\} = \text{(ex praeced.)}\ \frac{cdd}{\text{C.}\,\overline{d-1}\times b}\,*$$

cui additus primus terminus producit totius seriei summam
$$\frac{\text{Q.}\,\overline{d-1}\times a+cd\times d}{\text{C.}\,\overline{d-1}\times b}$$

* NB. haec est ad praecedentem ut d ad $d-1$.

Eodem modo proceditur, si numeratores sint quadrati, vel quadratorum aequemultiplices, ut series

$$\frac{1c}{b}+\frac{4c}{db}+\frac{9c}{ddb}+\frac{16c}{d^3b}+\frac{25c}{d^4b}\,\&\text{c.} =$$

resolvitur in

$$\begin{array}{rll}
\frac{c}{b}+\frac{c}{db}+\frac{c}{ddb}+\frac{c}{d^3b}+\frac{c}{d^4b}\,\&\text{c.} & =\frac{cd}{bd-b} & =\frac{cd}{bd-b} \\
+\frac{3c}{db}+\frac{3c}{ddb}+\frac{3c}{d^3b}+\frac{3c}{d^4b}\,\&\text{c.} & =\frac{3c}{bd-b} & =\frac{c}{bd-b}+\frac{c}{bd-b}+\frac{c}{bd-b} \\
+\frac{5c}{ddb}+\frac{5c}{d^3b}+\frac{5c}{d^4b}\,\&\text{c.} & =\frac{5c}{bdd-bd} & =\frac{c}{bdd-bd}+\frac{c}{bdd-bd}+\frac{c}{bdd-bd}+\frac{c}{bdd-bd}+\frac{c}{bdd-bd} \\
+\frac{7c}{d^3b}+\frac{7c}{d^4b}\,\&\text{c.} & =\frac{7c}{bd^3-bdd} & \\
+\frac{9c}{d^4b} & =\frac{9c}{bd^4-bd^3} & \\
\hline
\frac{cd^3+cdd}{b\times \mathrm{C}.\overline{d-1}} & \multicolumn{2}{l}{=\frac{cdd}{b\times\square:d-1}+\frac{2cd}{b\times\square:d-1}+\frac{2c}{b\times\square:d-1}+\frac{2c}{db\times\square:d-1}}
\end{array}$$

Med. CXL

Summa seriei fractionum infinitae, quarum numeratores sunt aequales, denominatores Arithmetice proportionales, est infinita$\vee 0$[1]

Ms UB Basel L I a 3, pp. 177–178 [TP: 1687, TA: 7/VI/1689]

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\text{ etc:}$$
$$A.$$

Dem: Superat enim datum quemvis numerum. Esto datus numerus A quantumcunque magnus. Abscinde a principio seriei aliquot terminos, quorum summa aequet vel superet unam unitatem numeri A, & a serie reliqua iterum aliquos abscinde, quorum summa aliam unitatem numeri A superet, idque toties repete quot in numero A sunt unitates, sic termini abscissi omnes superabunt totum numerum, multo magis igitur tota series eundem superabit: si neges, abscissis aliquot reliquos unitatem superare posse, esto primus reliquorum qui post abscissionem ultimam remanserunt $\frac{1}{a}$, eruntque sequentes $\frac{1}{a+1}, \frac{1}{a+2}, \frac{1}{a+3}$; constituatur ad primos duos terminos progressio Geometrica quae erit $\frac{1}{a}, \frac{1}{a+1}$, $\frac{1}{a+2+\frac{1}{a}}, \frac{1}{a+3+\frac{3}{a}+\frac{1}{aa}}$ etc: cujus singuli termini singulis respondentibus in progressione Harmonica (exceptis duobus primis) minores erunt, continuetur haec usque ad $\frac{1}{aa}$ (quod quidem fiet in terminis numero finitis propter a numerum finitum) eritque haec series Geometrica finita = unitati, Harmonica itaque terminorum totidem superabit unitatem. Q.E.D.

Coroll. Hinc in progressione Harmonica initio sumpto a quolibet termino erunt ab illo deinceps omnes usque ad illum cujus locus designatur per quadratum numeri prioris, simul sumti unitate majores; hinc a 2do ad 4tum unitatem superant, hinc a 5to ad 25tum, hinc a 26 ad 676 ($\Box$26), hinc a 677 ad 458329 ($\Box$677). Nam in Geometrica termini his limitibus intercepti unitatem aequant, ergo in Harmonica superant, cum & plures sint & majores, majores ut vidimus, plures quia in Geometrica denominatores terminorum plus unitate se excedunt, unde citius ad illum limitem pervenitur.

1 Cf. Op. XXXV, Prop. XVI (pp. 56–58 h.v.), où se trouve également la démonstration de Johann Bernoulli pour le même résultat (sur celle-ci, cf. aussi Med. CXLIII, p. 195 h.v.).

Med. CXLI

Invenire summam infinitarum fractionum, quarum numeratores aequantur, denominatores constituunt seriem Trigonalium, eorumve aequemultiplicium[1]

Ms UB Basel L I a 3, pp. 178; 179 [TP: 1687, TA: IX/1689]

Operatio talis:

$$\begin{array}{ll} \text{A serie} & \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6} \ \text{\&c.} = A \\ \text{subtrahatur} & \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7} \ \text{\&c.} = B \\ \hline \text{relinquitur} & \frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42} \ \text{\&c.} = A - B = 1 \end{array}$$

cumque denominatores harum fractionum sint Trigonalium dupli, erit ipsa Trigonalium series

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21} \ \text{\&c.} = 2.$$

NB.[2] Vid. post prop. CXLIV.

NB. supra ad prop: CXLI:[3]

$$\begin{array}{ll} \text{Si a serie} & \frac{2}{1}+\frac{3}{2}+\frac{4}{3}+\frac{5}{4}+\frac{6}{5}+\frac{7}{6} \ \text{etc:} = A \\ \text{subtrahatur} & \frac{3}{2}+\frac{4}{3}+\frac{5}{4}+\frac{6}{5}+\frac{7}{6}+\frac{8}{7} \ \text{etc:} = B \\ \hline \text{relinquitur} & \frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42} \ \text{etc:} \quad A - B = 2 \end{array}$$

supra vero eadem series reperta fuit = 1, quae videntur contrariari. *Rs.*: summa est 1, non 2: dum enim B de A subtraho, remanet semper primus terminus seriei A minus ultimo ipsius B, quod residuum primo termino ipsius A aequari nequit, nisi ultimus ipsius B sit 0, est vero hic = 1 per prop. CXXXV. Ergo caute hac methodo utendum.

1 Cf. Op.XXXV, Prop.XV (pp. 54–55 h.v.).
2 Ce renvoi au paragraphe qui suit a été ajouté en marge.
3 Cf. les remarques à la suite de Op.XXXV, Prop.XV («Observandum tamen ...», p. 55 h.v.). Bien entendu, la référence à «prop. CXLI» se rapporte à Med. CXLI, et de même ailleurs.

Med. CXLII

Invenire summam serierum Leibnitzianarum[1]

Ms UB Basel L I a 3, pp. 178–179 [TP: 1687, TA: 7/VI/1689]

A serie $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}$ &c. $= A$ subtrahatur eadem demtis

duobus $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9}$ &c. $= B$

relinquitur $\frac{2}{3} + \frac{2}{8} + \frac{2}{15} + \frac{2}{24} + \frac{2}{35} + \frac{2}{48} + \frac{2}{63}$ &c. $= A - B = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

& propterea $\frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} + \frac{1}{35} + \frac{1}{48} + \frac{1}{63}$ &c. $= \frac{3}{4} = C$

A serie $\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13}$ &c. $= A$ subtrahatur eadem dempto

primo $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15}$ &c. $= B$

relinquitur $\frac{2}{3} + \frac{2}{15} + \frac{2}{35} + \frac{2}{63} + \frac{2}{99} + \frac{2}{143} + \frac{2}{195}$ &c. $= A - B = 1$,

& propterea $\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{63} + \frac{1}{99} + \frac{1}{143} + \frac{1}{195}$ &c. $= \frac{1}{2} = D$,

& proinde $\frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \frac{1}{48} + \frac{1}{80} + \frac{1}{120} + \frac{1}{168} + \frac{1}{224}$ &c. $= C - D = \frac{1}{4}$

quod & ex resolutione hujus seriei patere potest:

Ex serie $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12}$ etc. A subtrahatur eadem dempto

primo $\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12} + \frac{1}{14}$ &c. B.

$\frac{2}{8} + \frac{2}{24} + \frac{2}{48} + \frac{2}{80} + \frac{2}{120} + \frac{2}{168}$ &c. $= A - B = \frac{1}{2}$

& proinde $\frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \frac{1}{48} + \frac{1}{80} + \frac{1}{120} + \frac{1}{168}$ &c. $= \frac{1}{4}$

In genere invenietur summa cujusque seriei, cujus numeratores sunt series aequalium, & denominatores series quadratorum minutorum communi aliquo quadrato.

1 Cf. Op. XXXV, Prop. XVII (pp. 58–61 h.v.).

Ex. gr. $\frac{1}{7} + \frac{1}{16} + \frac{1}{27} + \frac{1}{40} + \frac{1}{55} + \frac{1}{72}$ etc: cujus

$$\begin{array}{lccccccl} \text{denominatores sunt } \square\text{:} & 16\,. & 25\,. & 36\,. & 49\,. & 64\,. & 81\,. & \text{etc:} \\ \text{minuta communi } \square\text{:} & 9\,. & 9\,. & 9\,. & 9\,. & 9\,. & 9\,. & \\ \hline & 7\,. & 16\,. & 27\,. & 40\,. & 55\,. & 72\,. & \text{etc:} \end{array}$$

Etenim a serie

$$A = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} \text{ etc:}$$

solummodo subtrahenda series

$$B = \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} \text{ etc:}$$

$$C = \frac{6}{7} + \frac{6}{16} + \frac{6}{27} + \frac{6}{40} + \frac{6}{55} + \frac{6}{72} + \frac{6}{91} + \frac{6}{112} + \frac{6}{135} \text{ etc:} = A - B =$$

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = 2\,\frac{9}{20}$$

adeoque $\frac{1}{7} + \frac{1}{16} + \frac{1}{27} + \frac{1}{40} + \frac{1}{55}$ etc: $= \frac{C}{6} = \frac{49}{120}$.

Med. CXLIII

Transmutare seriem infinitarum fractionum, quarum numeratores crescunt juxta numeros naturales, denominatores juxta Trigonales[1]

Ms UB Basel L I a 3, p. 179 [TP: 1687, TA: IX/1689]

En operationem:

$$\frac{1}{1}+\frac{2}{3}+\frac{3}{6}+\frac{4}{10}+\frac{5}{15}+\frac{6}{21}+\frac{7}{28}+\frac{8}{36}\text{ etc:}\qquad\text{series haec resolvatur in}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21}+\frac{1}{28}+\frac{1}{36}\text{ etc:} = 2\text{ (per CXLI. h.)} = \frac{2}{1}\\
&\quad+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21}+\frac{1}{28}+\frac{1}{36}\text{ etc:} = 1 = \frac{2}{2}\\
&\qquad+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21}+\frac{1}{28}+\frac{1}{36}\text{ etc:} = 1-\frac{1}{3} = \frac{2}{3}\\
&\qquad\quad+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21}+\frac{1}{28}+\frac{1}{36}\text{ etc:} = 1-\frac{1}{3}-\frac{1}{6} = \frac{2}{4}\\
&\qquad\qquad+\frac{1}{15}+\frac{1}{21}+\frac{1}{28}+\frac{1}{36}\text{ etc:} = 1-\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{10} = \frac{2}{5}
\end{aligned}$$

Hinc $\frac{1}{1}+\frac{2}{3}+\frac{3}{6}+\frac{4}{10}$ etc: = duplo seriei $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$ etc: licet utraque sit infinita.

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+\frac{1}{49}\ \&\text{c.} = A\\
&\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+\frac{1}{49}+\frac{1}{64}\ \&\text{c.} = B = A-1
\end{aligned}$$

$$\frac{3}{4}+\frac{5}{36}+\frac{7}{144}+\frac{9}{400}+\frac{11}{900}+\frac{13}{1764}+\frac{15}{3136}\ \&\text{c.} = 1\qquad\text{hoc est,}$$

$$\frac{3}{\Box 2}+\frac{5}{\Box 6}+\frac{7}{\Box 12}+\frac{9}{\Box 20}+\frac{11}{\Box 30}+\frac{13}{\Box 42}+\frac{15}{\Box 56}\ \&\text{c.} = 1\qquad\text{hinc}$$

$$\frac{3}{\Box 1}+\frac{5}{\Box 3}+\frac{7}{\Box 6}+\frac{9}{\Box 10}+\frac{11}{\Box 15}+\frac{13}{\Box 21}+\frac{15}{\Box 28}\ \&\text{c.} = 4.$$

1 A un facteur 2 près, la série du titre n'est autre que la série *B* qui figure dans la démonstration de Johann I Bernoulli sur la divergence de la série harmonique (Op. XXXV, Prop. XVI: p. 56 h.v.), et le calcul qui suit est le même que dans cette démonstration. Sur les trois dernières formules dans Med. CXLIII, cf. Op. LIV, Prop. XXII (pp. 70–71 h.v.).

Med. CXLIV

Invenire summam seriei finitae Trigonalium[1]

Ms UB Basel L I a 3, p. 179 [TP: 1687, TA: IX/1689]

$$\frac{1}{1}\quad\frac{1}{3}\quad\frac{1}{6}\quad\frac{1}{10}\quad\frac{1}{15}\quad\frac{1}{21}\quad\frac{1}{28}$$

Experiamur Inductione:

$$\frac{1}{1}=\frac{2}{2}$$

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$$

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{6}{4}$$

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}=\frac{8}{5}$$

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}=\frac{10}{6}$$

& generaliter quia numerator summae est duplum numeri terminorum, & denominator est ipse terminorum numerus unitate auctus, si pro numero terminorum ponatur n, erit optata summa $=\frac{2n}{n+1}$, unde si $n=\infty$, erit $\frac{2n}{n+1}=\frac{2\infty}{\infty+1}=\frac{2\infty}{\infty}=\frac{2}{1}=2$, ut sup. propos: CXLI.

1 Cf. Op. LIV, Prop. XIX (pp. 66–67 h.v.).

Med. CXLVII

Invenire ultimum terminum seriei infinitae fractionum, quarum denominatores praecedentium sunt multiplices, sed numeratores praecedentium aequemultiplices aucti vel minuti communi quodam numero[1]

Ms UB Basel L I a 3, p. 181 [TP: 1687, TA: IX/1689]

$$\frac{a}{b}, \frac{ca \pm d}{cb}, \frac{cca \pm cd \pm d}{ccb}, \frac{c^3a \pm ccd \pm cd \pm d}{c^3b},$$

$$\frac{c^4a \pm c^3d \pm ccd \pm cd \pm d}{c^4b} = \frac{a}{b} \pm \frac{d}{cb} \pm \frac{d}{ccb} \pm \frac{d}{c^3b} \pm \frac{d}{c^4b},$$

unde patet, terminum infinitesimum resolvi in $\frac{a}{b} \pm$ serie infinitorum Geometrice progressionalium in ratione c ad 1, quorum summa $= \frac{d}{bc-b}$, quae addita vel subtracta a primo $\frac{a}{b}$, dat terminum infinitesimum $\frac{ac-a \pm d}{bc-b}$, cujus numerator est differentia numeratorum primi & secundi termini, uti & denominator denominatorum eorundem differentia est; cumque per Pr. CXXXV pateat terminum ultimum hujus progressionis

$$\frac{a}{b}, \frac{ca \pm d}{cb}, \frac{2ca-a \pm 2d}{2cb-b}, \frac{3ca-2a \pm 3d}{3cb-2b}, \frac{4ca-3a \pm 4d}{4cb-3b}, \frac{5ca-4a \pm 5d}{5cb-4b}, \text{etc:}$$

sive $$\frac{a}{b}, \frac{a}{b} \pm \frac{d}{cb}, \frac{a}{b} \pm \frac{2d}{2cb-b}, \frac{a}{b} \pm \frac{3d}{3cb-2b}, \frac{a}{b} \pm \frac{4d}{4cb-3b}, \frac{a}{b} \pm \frac{5d}{5cb-4b}, \text{etc.}$$

etiam esse $$\frac{ac-a \pm d}{bc-b} \quad \text{sive} \quad \frac{a}{b} \pm \frac{d}{bc-b},$$

sequitur, in utraque progressione primis duobus terminis existentibus iisdem ultimos quoque esse pares, quamvis incrementa vel decrementa prioris magis subitanea sint, cum ejus termini non nisi per saltum excerpti sint ex posteriore;

1 Cf. Op. LIV, Prop. XXVI (pp. 76–78 h.v.).

invenio enim quod memorabile est, tertium terminum prioris esse $c+2$, quartum $cc+c+2$, quintum $c^3+cc+c+2$ posterioris; ex. gr.: [$a=2$, $b=3$, $c=3$, $d=1$][2]

$$\frac{2}{3},\ \frac{7}{9},\ \frac{22}{27},\ \frac{67}{81},\ \frac{192}{243},\ \frac{577}{729},\ \frac{1732}{2187},\ \text{etc.:} \qquad \text{ultimus } \frac{5}{6}.$$

$$\frac{2}{3},\ \frac{7}{9},\ \frac{12}{15},\ \frac{17}{21},\ \underset{*}{\frac{22}{27}},\ \frac{27}{33},\ \frac{32}{39},\ \frac{37}{45},\ \frac{42}{51},\ \frac{47}{57},\ \frac{52}{63},\ \frac{57}{69},\ \frac{62}{75},\ \underset{*}{\frac{67}{81}},\ \text{etc:} \qquad \text{ultimus } \frac{5}{6}.$$

2 Les égalités reprises entre crochets [ ] se trouvent dans la marge (N.D.L.R.).

Med. CXLVIII

Invenire summam infinitarum fractionum, quarum denominatores sunt numeri Trigonales, Pyramidales, Triang. Pyramid. etc. in infinitum, & infinitarum summarum summam[1]

Ms UB Basel L I a 3, p. 182 [TP: 1687, TA: IX/1689]

Si a serie fractionum harmonice progressionalium eadem dempto primo termino subtrahatur, nascitur series fractionum, quarum numeratores sunt unitates, denominatores trigonalium dupli per CXLI; ita si a serie trigonalium eadem dempto primo subtrahatur, relinquitur series, cujus numeratores progrediuntur juxta numeros naturales 2, 3, 4, sed quae reduci possunt ad fractiones, quarum omnium numeratores sunt binarii, denominatores vero pyramidalium tripli, unde ipsa series ad seriem pyramidalium ut $\frac{2}{3}$ ad 1; pariter si a serie pyramidalium ipsamet dempto primo subtrahatur, relinquitur series, cujus numeratores progrediuntur juxta numeros trigonales 3, 6, 10, etc.: sed quae reduci possunt ad fractiones alias, quarum omnes numeratores sunt ternarii, denominatores vero triang. pyramidalium quadrupli, unde ipsa series ad seriem talem ut $\frac{3}{4}$ ad 1, & sic in infinitum.

$$\begin{array}{ll}
A \text{ Natur.} & \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\text{ etc:} = \frac{1}{0} = 1\frac{1}{0}\\
B \text{ Trigon.} & \frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21}+\frac{1}{28}\text{ etc:} = \frac{2}{1} = 1\frac{1}{1}\\
C \text{ Pyram.} & \frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{10}+\frac{1}{20}+\frac{1}{35}+\frac{1}{56}+\frac{1}{84}\text{ etc:} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}\\
D \text{ Triang. Pyr.} & \frac{1}{1}+\frac{1}{5}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{70}+\frac{1}{126}+\frac{1}{210}\text{ etc:} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}\\
E \text{ Pyr. Pyr.} & \frac{1}{1}+\frac{1}{6}+\frac{1}{21}+\frac{1}{56}+\frac{1}{126}+\frac{1}{252}+\frac{1}{462}\text{ etc:} = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}
\end{array}$$

Ergo series

$$\left.\begin{array}{c} B\\ C\\ D\\ E\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{demptis duobus}\\ \text{primis terminis}\end{array} \left\{\begin{array}{l} =\frac{1}{1}-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}\\ =\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{2}{8}\\ =\frac{1}{3}-\frac{1}{5}=\frac{2}{15}\\ =\frac{1}{4}-\frac{1}{6}=\frac{2}{24}\end{array}\right\} = \frac{3}{2} \quad \text{per CXLII.}$$

1 Cf. Op. LIV, Prop. XVIII (pp. 65–66 h.v.).

Med. CXLIX

Invenire summam seriei finitae fractionum Trigonalium, Pyramidalium, etc.[1]

Ms UB Basel L I a 3, p. 182 [TP: 1687, TA: IX/1689]

NB. n ponitur indefinite pro numero terminorum.

A serie $$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\text{ etc. }+\frac{1}{n}$$

subtrahatur $$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\text{ etc: }+\frac{1}{n+1}$$

relinquitur $$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}\text{ etc: }+\frac{1}{nn+n}=\frac{1}{1}-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1},$$

eorumque dupli $$\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}\text{ etc: }+\frac{2}{nn+n}=\frac{2}{1}-\frac{2}{n+1}=\frac{2n}{n+1},\text{ Trigonales}$$

Ab his subtr. $$\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21}\text{ etc: }+\frac{2}{nn+3n+2}$$

relinquitur $$\frac{2}{3}+\frac{2}{12}+\frac{2}{30}+\frac{2}{60}+\frac{2}{105}\text{etc: }+\frac{4}{n^3+3nn+2n}=1-\frac{2}{nn+3n+2}=\frac{nn+3n}{nn+3n+2},$$

eorumque sesquialteri $$\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{10}+\frac{1}{20}+\frac{1}{35}\text{ etc: }+\frac{6}{n^3+3nn+2n}=\frac{3}{2}-\frac{3}{nn+3n+2}=\frac{3}{2}-\frac{3}{\overline{n+1}\times\overline{n+2}},$$

Pyramidales

Ab his subtr. $$\frac{1}{4}+\frac{1}{10}+\frac{1}{20}+\frac{1}{35}+\frac{1}{56}\text{ etc: }\frac{6}{n^3+6nn+11n+6}$$

relinquitur $$\frac{3}{4}+\frac{3}{20}+\frac{3}{60}+\frac{3}{140}+\frac{3}{280}\text{etc: }\frac{18}{n^4+6n^3+11nn+6n}=1-\frac{6}{n^3+6nn+11n+6}$$

$$=\frac{n^3+6nn+11n}{n^3+6nn+11n+6},$$

eorumque sesquitertii $$\frac{1}{1}+\frac{1}{5}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{70}\text{ etc: }\frac{24}{n^4+6n^3+11nn+6n}=\frac{4}{3}-\frac{8}{n^3+6nn+11n+6}$$

$$=\frac{4}{3}-\frac{8}{\overline{n+1}\times\overline{n+2}\times\overline{n+3}}\quad\text{Triang. Pyramid.}$$

1 Cf. Op. LIV, Prop. XIX (pp. 66–67 h.v.).

$$\text{hoc est, Trigonales} \quad = \frac{2}{1} - \overline{\frac{2}{1} \times \frac{1}{n+1}}$$

$$\text{Pyramidales} \quad = \frac{3}{2} - \overline{\frac{3}{2} \times \frac{1\times 2}{n+1\times n+2}}$$

$$\text{Triang: Pyramid.} \quad = \frac{4}{3} - \overline{\frac{4}{3} \times \frac{1\times 2\times 3}{n+1\times n+2\times n+3}}$$

$$\text{atque ita Pyramid: Pyramid.} \quad = \frac{5}{4} - \overline{\frac{5}{4} \times \frac{1\times 2\times 3\times 4}{n+1\times n+2\times n+3\times n+4}} \quad \text{etc.}$$

Et quoniam $\frac{2}{1}+\frac{3}{2}+\frac{4}{3}+\frac{5}{4}$ etc: est summa infinitorum trigonalium, Pyramidalium &c. sequitur reliquos esse summam infinitorum demptis ab omnibus n terminis; reperio autem posito demptorum numero n, reliquorum infinitorum omnium summam fore $= \frac{2n-1}{nn-n}$, adeoque existente $n = 2$, summam fore $\frac{3}{2}$, ut per CXLII.

Med. CL

Creditor quidam ita convenit cum Debitore suo, ut singulis momentis pars proportionalis usurae annuae annumeretur sorti, quaeritur quantum ipsi finito anno debeatur[1]?

Ms UB Basel L I a 3, pp. 183–184 [TP: 1687, TA: IX/1689]

Esto sors a, usura annua b: Jam si usura sorti non adjiceretur, finito anno deberetur $a+b$: si singulis semestribus usurae pars proportionalis adjicienda sorti, elapso primo semestri deberetur $a+\frac{1}{2}b$, hinc pro secundo semestri dicendum: sors a uno semestri affert $a+\frac{1}{2}b$: quid afferet $a+\frac{1}{2}b$, &c. atque ita debebitur finito anno $\dfrac{aa+ab+\frac{1}{4}bb}{a}$, hoc est, $\dfrac{\square\,\overline{a+\frac{1}{2}b}}{a}$: Deinde si singulis quadrimestribus usurae pars conveniens annumeranda sorti, debebitur exacto primo quadrimestri $a+\frac{1}{3}b$, pro secundo fiat: ut a ad $a+\frac{1}{3}b$, ita $a+\frac{1}{3}b$, ad $\dfrac{\square\,\overline{a+\frac{1}{3}b}}{a}$, pro tertio vero, ut a ad $a+\frac{1}{3}b$, ita $\dfrac{\square\,\overline{a+\frac{1}{3}b}}{a}$ ad $\dfrac{\mathrm{C.}\ \overline{a+\frac{1}{3}b}}{aa}$; debebitur ergo finito anno $\dfrac{\mathrm{C.}\ \overline{a+\frac{1}{3}b}}{aa}$. Porro si singulis trimestribus usura fuisset adjicienda sorti, exacto primo trimestri deberetur $a+\frac{1}{4}b$, exacto secundo $\dfrac{\square\,\overline{a+\frac{1}{4}b}}{a}$, tertio $\dfrac{\mathrm{C.}\ \overline{a+\frac{1}{4}b}}{aa}$, tandem quarto, hoc est, finito anno $\dfrac{\mathrm{BQ.}\ \overline{a+\frac{1}{4}b}}{a^3}$. Pari ratione invenietur, quod si singulis quintis aut sextis partibus anni usura adjiciatur sorti, id quod debebitur post annum fore $\dfrac{\mathrm{Surs.}\ \overline{a+\frac{1}{5}b}}{a^4}$, vel $\dfrac{\mathrm{QC.}\ \overline{a+\frac{1}{6}b}}{a^5}$ atque indefinite si singulis n partibus anni usura sorti apponenda, post annum debitum

1 Cf. G.W. Leibniz, *Meditatio Juridico-Mathematica de Interusurio simplice*: AE Octobris 1683, pp. 425–432 – *Math. Schriften* VII, pp. 125–132, et Jac.B. Op.XL (*Werke* 3, pp. 91–93, et pp. 160–163 h.v.); à cause de ses rapports avec Op.XL, la présente Med. CL a déjà été reproduite dans *Werke* 3, pp. 94–97.

iri $\dfrac{\boxed{n}\, a+\frac{1}{n}\,b}{a^{\overline{n-1}}}$, unde si n sit pars anni infinitesima seu momentum, problema eo redactum videmus ut pro eo solvendo opus tantum sit, potestatem infinitesimam ex sorte & parte infinitesima usurae annuae dividere per potestatem una minorem infinitesima ipsius sortis; quod sic fiet:
Scribantur ordine omnes Potestates, primo $a+b$; deinde Quad: ex $a+\frac{1}{2}\,b$; postmodum Cub: ex $a+\frac{1}{3}\,b$, Biquad: ex $a+\frac{1}{4}\,b$ etc. & dividantur per 1, a, aa, a^3 &c. hac ratione:

divisae per

$$1)\quad 1a + 1b$$

$$a)\quad 1aa + 2a \times \tfrac{1}{2}\,b + \;1\; \times \square\,\tfrac{1}{2}\,b$$

$$aa)\quad 1a^3 + 3aa \times \tfrac{1}{3}b + \;3a\; \times \square\tfrac{1}{3}\,b + \;1\; \times \mathrm{C.}\tfrac{1}{3}\,b$$

$$a^3)\quad 1a^4 + 4a^3 \times \tfrac{1}{4}\,b + 6aa \times \square\tfrac{1}{4}\,b + \;4a\; \times \mathrm{C.}\tfrac{1}{4}\,b + 1 \;\times \mathrm{BQ.}\tfrac{1}{4}\,b$$

$$a^4)\quad 1a^5 + 5a^4 \times \tfrac{1}{5}\,b + 10a^3 \times \square\tfrac{1}{5}\,b + 10aa \times \mathrm{C.}\tfrac{1}{5}\,b + 5a \times \mathrm{BQ.}\tfrac{1}{5}\,b + 1 \times \mathrm{Ss.}\tfrac{1}{5}b.$$

Ubi considerandum, coëfficientes primorum terminorum esse unitates, secundorum numeros naturales, tertiorum trigonales, quartorum pyramidales, quorum ultimi numero potestatum existente n, generaliter inveniuntur

$$1, n, \frac{n \times n-1}{2}, \frac{n \times n-1 \times n-2}{2 \times 3}, \frac{n \times n-1 \times n-2 \times n-3}{2 \times 3 \times 4}, \frac{n \times n-1 \times n-2 \times n-3 \times n-4}{2 \times 3 \times 4 \times 5} \text{ etc:}$$

sic ut $\dfrac{\boxed{n}\, a+\frac{1}{n}\,b}{a^{\overline{n-1}}}$ resolvatur in istam seriem

$$a^{n-1})\quad 1a^n + na^{n-1} \times \frac{1}{n}\,b + \frac{n \times n-1}{2}\,a^{n-2} \times \frac{1}{nn}\,bb + \frac{n \times n-1 \times n-2}{2 \times 3}\,a^{n-3} \times \frac{1}{n^3}\,b^3$$

$$+ \frac{n \times n-1 \times n-2 \times n-3}{2 \times 3 \times 4}\,a^{n-4} \times \frac{1}{n^4}\,b^4, \text{ etc.}$$

hoc est, quia a^n, a^{n-1}, a^{n-2}, a^{n-3} etc. divisa per a^{n-1} producunt[2] $a, 1, \frac{1}{a}, \left[\frac{1}{aa}\right]$, etc: in istam:

$$a + n \times \frac{1}{n} b + \frac{n \times n-1}{2a} \times \frac{1}{nn} bb + \frac{n \times n-1 \times n-2}{2 \times 3aa} \times \frac{1}{n^3} b^3 + \frac{n \times n-1 \times n-2 \times n-3}{2 \times 3 \times 4a^3} \times \frac{1}{n^4} b^4 \text{ etc:}$$

sive in hanc:

$$a + \frac{n}{n} b + \frac{n \times n-1}{2ann} bb + \frac{n \times n-1 \times n-2}{2 \times 3aan^3} b^3 + \frac{n \times n-1 \times n-2 \times n-3}{2 \times 3 \times 4a^3n^4} b^4 \text{ etc:}$$

jam quoniam n existente ∞, omnia haec $n-1$, $n-2$, $n-3$, $n-4$, &c. tantundem valent atque n, aequivalebit ista series huic

$$a + \frac{n}{n} b + \frac{nnbb}{2ann} + \frac{n^3b^3}{2 \times 3aan^3} + \frac{n^4b^4}{2 \times 3 \times 4a^3n^4},$$

hoc est, huic

$$a + b + \frac{bb}{2a} + \frac{b^3}{2 \times 3aa} + \frac{b^4}{2 \times 3 \times 4a^3} \text{ etc.}$$

vel etiam quia $\frac{n \times n-1}{nn}, \frac{n \times n-1 \times n-2}{n^3}, \frac{n \times n-1 \times n-2 \times n-3}{n^4}$

$$= \frac{nn-n}{nn}, \quad \frac{n^3-3nn+2n}{n^3}, \quad \frac{n^4-6n^3+11nn-6n}{n^4}$$

$$= 1-\frac{1}{n}, \quad 1-\frac{3}{n}+\frac{2}{nn}, \quad 1-\frac{6}{n}+\frac{11}{nn}-\frac{6}{n^3}, \text{ etc:}$$

& vero propter $n = \infty$ omnes hae fractiones adjectae unitatibus evanescant, fit ut inde eadem resultet series,

$$a + b + \frac{bb}{2a} + \frac{b^3}{2 \times 3aa} + \frac{b^4}{2 \times 3 \times 4a^3} \text{ etc:}$$

2 Bernoulli a écrit $a, 1, \frac{1}{a}, \frac{1}{2a}$.

cujus summa minor est $\frac{aa}{a-b}$, quia $\frac{aa}{a-b}$ = progressioni Geometricae

$$a + b + \frac{bb}{a} + \frac{b^3}{aa} + \frac{b^4}{[a^3]} \text{ \&c.}$$

qua altera illa minor est.

NB. si supponatur $a = b$, fiet series ista:

$$2a + \frac{a}{2} + \frac{a}{2\times3} + \frac{a}{2\times3\times4} + \frac{a}{2 \times 3 \times 4 \times 5} \text{ etc:}$$

Reperio autem per subductionem hujus seriei a seipsa[3], quod

$$2a + \frac{a}{2} + \frac{2a}{2\times3} + \frac{3a}{2\times3\times4} + \frac{4a}{2\times3\times4\times5} \text{ etc.}$$

hoc est

$$2a + \frac{a}{2} + \frac{a}{3} + \frac{a}{2\times4} + \frac{a}{2\times3\times5} + \frac{a}{2\times3\times4\times6} \text{ \&c.} = 3a,$$

adeoque $$2a + \frac{a}{2} + \frac{a}{2\times3} + \frac{a}{2\times3\times4} \text{ \&c.} \sqsupset 3a.$$

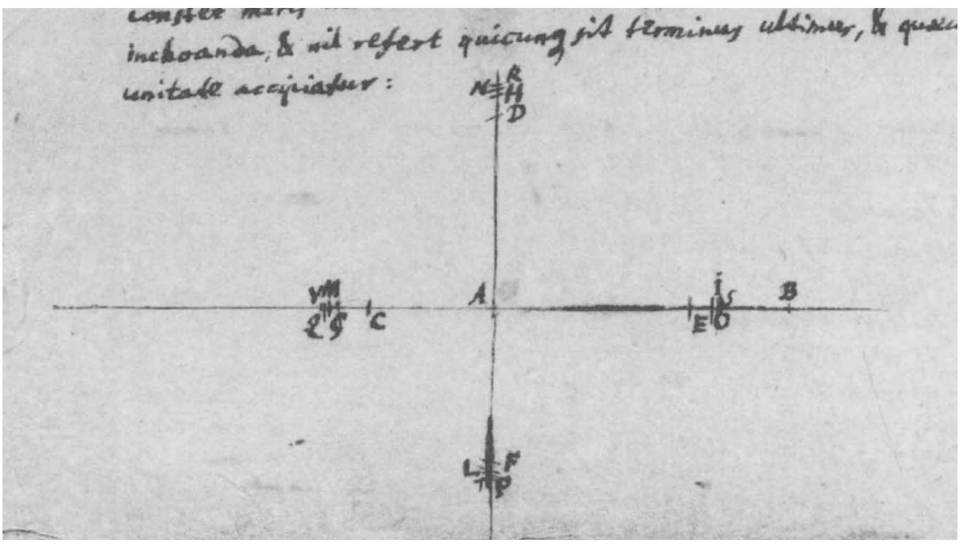
3 Sur cette méthode de former une série *par différence d'une autre avec elle-même*, cf. la *Praefatio* de Op.XXXV (p. 46 h.v.), et l'*Introduction* (p. 10 h.v.).

Med. CLIII

Summam hujus seriei infinitae: $\sqrt{a\sqrt{b\sqrt{a\sqrt{b\sqrt{a\sqrt{b}}}}}}$ etc: indagare, & duas medias proportionales invenire inter duas datas a & b, solius circini & normae ope per seriem constructionis in infinitum continuandae[1]

Ms UB Basel L I a 3, pp. 192–193 [TP: 1689, TA: IX/1689]

Ponatur $x = \sqrt{a\sqrt{b\sqrt{a\sqrt{b}}}}$ etc.: erit $xx = a\sqrt{b\sqrt{a\sqrt{b}}}$, & $\frac{xx}{a} = \sqrt{b\sqrt{a\sqrt{b}}}$ &c., & $\frac{x^4}{aa} = b\sqrt{a\sqrt{b}}$ &c. & $\frac{x^4}{aab} = \sqrt{a\sqrt{b}}$ &c. $= x$, unde $x^4 = aabx$, seu $x^3 = aab$, & $x = \sqrt{C.aab}$, hoc est $x =$ primae duarum mediarum proportionalium inter a & b, quae adeoque appropinquando inveniri potest, solo circino & norma, cum series illa infinita constet meris lateribus □tis. NB. ejusmodi serierum constructio a fine inchoanda, & nil refert quicunque sit terminus ultimus, & quaecunque linea pro unitate accipiatur:



1 Pour cette Méditation et les trois suivantes (Med. CLIV, CLV et CLVI), cf. Op. XXXVII (pp. 151–159 h.v.) et Op. LIV, Prop. XXVII–XXXV (pp. 78–80 h.v.).

Constr.: Ductis normalibus infinitis DF, CB, sese intersecantibus in A, inveniendae sint duae mediae proportionales inter CA & AB (a & b):

Diametro CB describatur arcus circuli secans AD in D. Fiat AE = AD $= \sqrt{ab}$

Diamet. CE describatur arcus circuli secans AF in F. Fiat AG = AF $= \sqrt{a\sqrt{ab}}$

.... GB .... AD in H. Fiat AI = AH $= \sqrt{b\sqrt{a\sqrt{ab}}}$

.... CI .... AF in L. Fiat AM = AL $= \sqrt{a\sqrt{b\sqrt{a\sqrt{ab}}}}$

.... MB .... AD in N. Fiat AO = AN $= \sqrt{b\sqrt{a\sqrt{b\sqrt{a\sqrt{ab}}}}}$

.... CO .... AF in P. Fiat AQ = AP $= \sqrt{a\sqrt{b\sqrt{a\sqrt{b\sqrt{a\sqrt{ab}}}}}}$

.... QB .... AD in R. Fiat AS = AR $= \sqrt{b\sqrt{a\sqrt{b}}}$ &c.

.... CS .... AF in T. Fiat AV = AT $= \sqrt{a\sqrt{b\sqrt{a\sqrt{b}}}}$ &c.

etc:

NB. Diameter primi describendi arcus CB accipi potest quantacunque; hoc est AD vel AE sumi potest pro lubitu.

Hac autem ratione rectae AG, AM, AQ, AV &c. magis magisque appropinquabunt primae, ut & ab altera parte rectae AE, AI, AO, AS &c. magis magisque secundae duarum mediarum proportionalium inter AC & AB, quousque post infinitam operationem verae & exactae prodeant: interim post paucas operationes discrimen insensibile fit, ut nescio an ad mechanicam constructionem quicquam exactius dari possit. Quod si tamen quam citissime ad scopum pervenire velis, pro prima AE selige talem, quam judicio oculorum existimaveris secundae quaesitarum proportionalium quam proxime accedere[2].

2 Cf. Op. XXXVII (*Opera*, p. 417, l. 6-5 du bas; p. 159, l. 11–12 h.v.).

Invenire inter duas datas *a* & *b* sex medias proportionales:

Ponatur $$x = \sqrt{a\sqrt{a\sqrt{b\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{b\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{b}}}}}}}}}\ \&c.:$$

erit $$xx = a\sqrt{a\sqrt{b\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{b}}}}}\ \&c.$$

& $$\frac{xx}{a} = \sqrt{a\sqrt{b\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{b}}}}}\ \&c.$$

& $$\frac{x^4}{aa} = a\sqrt{b\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{b}}}}\ \&c.$$

& $$\frac{x^4}{a^3} = \sqrt{b\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{b}}}}\ \&c.$$

& $$\frac{x^8}{a^6} = b\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{b}}}\ \&c.$$

& $$\frac{x^8}{a^6b} = \sqrt{a\sqrt{a\sqrt{b}}}\ \&c. = x;$$

unde $x^8 = a^6bx$, & $x^7 = a^6b$, & $x = \sqrt{\text{Bss}:a^6b}$, hoc est, x = primae 6 mediarum proportionalium:

& $$\frac{xx}{a} = \sqrt{a\sqrt{b\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{b}}}}}\ \&c. = \sqrt{\text{Bss}:a^5bb} = \text{secundae}:$$

& $$\frac{x^4}{a^3} = \sqrt{b\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{b}}}}\ \&c. = \sqrt{\text{Bss}:a^3b^4}$$

= quartae sex mediarum proportionalium.

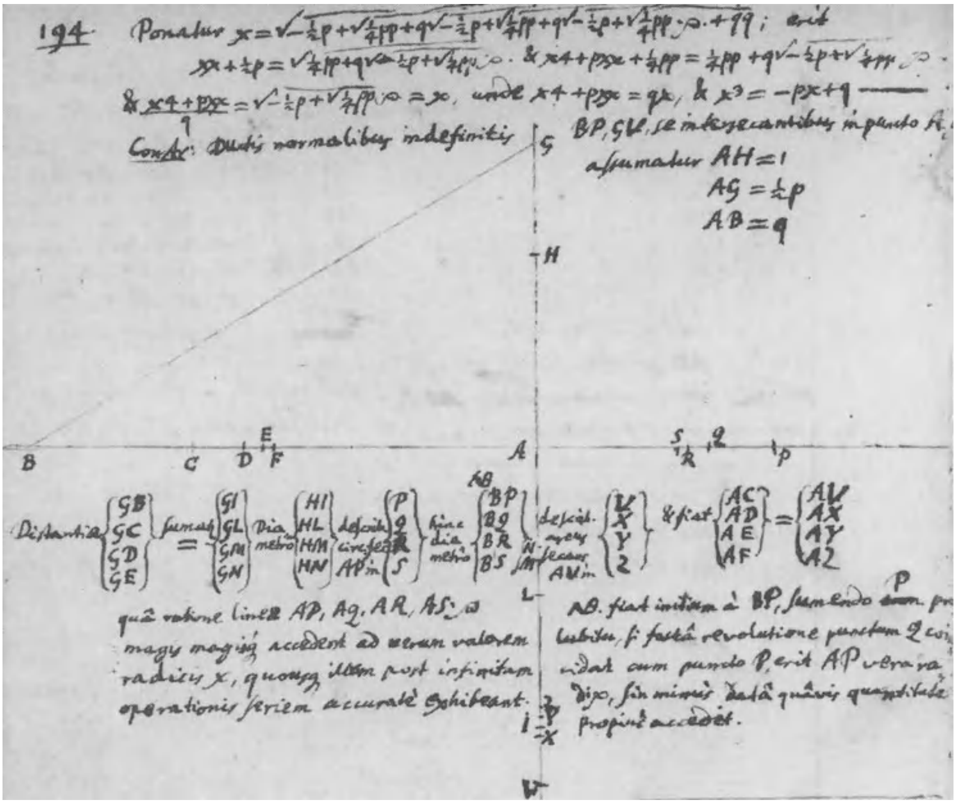
Invenire 4 medias proportionales:

Ponatur $x = \sqrt{a\sqrt{\text{C}.ab\sqrt{a\sqrt{\text{C}.ab}}}}$ &c. erit $xx = a\sqrt{\text{C}.ab\sqrt{a\sqrt{\text{C}.ab}}}$ &c. & $\frac{xx}{a} = \sqrt{\text{C}.ab\sqrt{a\sqrt{\text{C}.ab}}}$ &c. & $\frac{x^6}{a^3} = ab\sqrt{a\sqrt{\text{C}.ab}}$ &c. & $\frac{x^6}{a^4b} = \sqrt{a\sqrt{\text{C}.ab}}$ &c. $= x$; unde $x^6 = a^4bx$, & $x^5 = a^4b$, & $x = \sqrt{\text{Ss}.a^4b}$, hoc est x = primae, & $\frac{xx}{a} = \sqrt{\text{C}.ab\sqrt{a\sqrt{\text{C}.ab}}}$ &c. $= \sqrt{\text{Ss}.a^3bb}$ = secundae 4 proportionalium.

Med. CLIV

Aequationem Cubicam $x^3 = -px + q$, construere circino & norma per seriem

Ms UB Basel L I a 3, pp. 193–194 [TP: 1689, TA: IX/1689]


194 Ponatur $x=\sqrt{-\frac{1}{2}p+\sqrt{\frac{1}{4}pp+q\sqrt{-\frac{1}{2}p+\sqrt{\frac{1}{4}pp+q\sqrt{-\frac{1}{2}p+\sqrt{\frac{1}{4}pp}\ \&c.+qq}}}}}$; erit $xx+\frac{1}{2}p=\sqrt{\frac{1}{4}pp+q\sqrt{-\frac{1}{2}p+\sqrt{\frac{1}{4}pp}\ \&c.}}$ & $x^4+pxx+\frac{1}{4}pp=\frac{1}{4}pp+q\sqrt{-\frac{1}{2}p+\sqrt{\frac{1}{4}pp}\ \&c.}$ & $\frac{x^4+pxx}{q}=\sqrt{-\frac{1}{2}p+\sqrt{\frac{1}{4}pp}\ \&c.}=x$, unde $x^4+pxx=qx$, & $x^3=-px+q$

Constr: Ductis normalibus indefinitis BP, GV, se intersecantibus in puncto A, assumatur $AH=1$, $AG=\frac{1}{2}p$, $AB=q$

Distantiae GB, GC, GD, GE sumantur = GI, GL, GM, GN; Diametro HI, HL, HM, HN describantur circuli secantes AP in P, Q, R, S; hinc diametro BP, BQ, BR, BS describantur arcus secantes AV in V, X, Y, Z & fiat AC, AD, AE, AF = AV, AX, AY, AZ

qua ratione lineae AP, AQ, AR, AS &c magis magisque accedent ad verum valorem radicis x, quousque illam post infinitam operationis seriem accurate exhibeant.

AB. fiat initium a BP, sumendo [illegible] pro lubitu, si facta revolutione punctum Q coincidat cum puncto P, erit AP vera radix, sin minus data quavis quantitate propius accedet.

Ponatur

$$x = \sqrt{-\frac{1}{2}p + \sqrt{\frac{1}{4}pp + q\sqrt{-\frac{1}{2}p + \sqrt{\frac{1}{4}pp + q\sqrt{-\frac{1}{2}p + \sqrt{\frac{1}{4}pp}\ \&c. + qq}}}}};$$

erit $$xx + \frac{1}{2}p = \sqrt{\frac{1}{4}pp + q\sqrt{-\frac{1}{2}p + \sqrt{\frac{1}{4}pp}\ \&c.}}$$

& $$x^4 + pxx + \frac{1}{4}pp = \frac{1}{4}pp + q\sqrt{-\frac{1}{2}p + \sqrt{\frac{1}{4}pp}\ \&c.}$$

$$\& \qquad \frac{x^4+pxx}{q} = \sqrt{-\tfrac{1}{2}p + \sqrt{\tfrac{1}{4}pp \ \&c.}} = x,$$

$$\text{unde} \qquad x^4 + pxx = qx,$$

$$\& \qquad x^3 = -px + q.$$

Constr.: Ductis normalibus indefinitis BP, GV, se intersecantibus in puncto A, assumatur AH = 1

AG $= \frac{1}{2}p$

AB $= q$

$$\text{Distantiae} \begin{Bmatrix} \text{GB} \\ \text{GC} \\ \text{GD} \\ \text{GE} \end{Bmatrix} \text{sumatur} = \begin{Bmatrix} \text{GI} \\ \text{GL} \\ \text{GM} \\ \text{GN} \end{Bmatrix} \text{Diametro} \begin{Bmatrix} \text{HI} \\ \text{HL} \\ \text{HM} \\ \text{HN} \end{Bmatrix} \begin{matrix} \text{describ. circ.} \\ \text{sec. AP in} \end{matrix} \begin{Bmatrix} \text{P} \\ \text{Q} \\ \text{R} \\ \text{S} \end{Bmatrix}$$

$$\text{hinc diametro} \begin{Bmatrix} \text{BP} \\ \text{BQ} \\ \text{BR} \\ \text{BS} \end{Bmatrix} \begin{matrix} \text{describ. arcus} \\ \text{secans AV in} \end{matrix} \begin{Bmatrix} \text{V} \\ \text{X} \\ \text{Y} \\ \text{Z} \end{Bmatrix} \text{ \& fiat } \begin{Bmatrix} \text{AC} \\ \text{AD} \\ \text{AE} \\ \text{AF} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \text{AV} \\ \text{AX} \\ \text{AY} \\ \text{AZ} \end{Bmatrix}$$

qua ratione lineae AP, AQ, AR, AS &c. magis magisque accedent ad verum valorem radicis x, quousque illam post infinitam operationis seriem accurate exhibeant.

NB. fiat initium a BP, sumendo P pro lubitu, si facta revolutione punctum Q coincidat cum puncto P, erit AP vera radix, sin minus data quavis quantitate propius accedet.

Med. CLV

Radicem veram Aequationis Cubicae $x^3 = px + q$ aut falsam hujus $x^3 = px - q$, circino & norma invenire

Ms UB Basel L I a 3, pp. 194–195 [TP: 1689, TA: IX/1689]

Ponatur $\pm x = \sqrt{\frac{1}{2}p + \sqrt{\frac{1}{4}pp + q\sqrt{\frac{1}{2}p + \sqrt{\frac{1}{4}pp + q\sqrt{\&c.}}}}}$

erit $xx - \frac{1}{2}p = \sqrt{\frac{1}{4}pp + q\sqrt{\frac{1}{2}p + \sqrt{\frac{1}{4}pp + [q]\sqrt{\&c.}}}}$

& $x^4 - pxx + \frac{1}{4}pp = \frac{1}{4}pp + q\sqrt{\frac{1}{2}p + \sqrt{\frac{1}{4}pp\ \&c.}}$

& $\dfrac{x^4 - pxx}{q} = \sqrt{\frac{1}{2}p + \sqrt{\frac{1}{4}pp + q\sqrt{\&c.}}} = \pm x,$

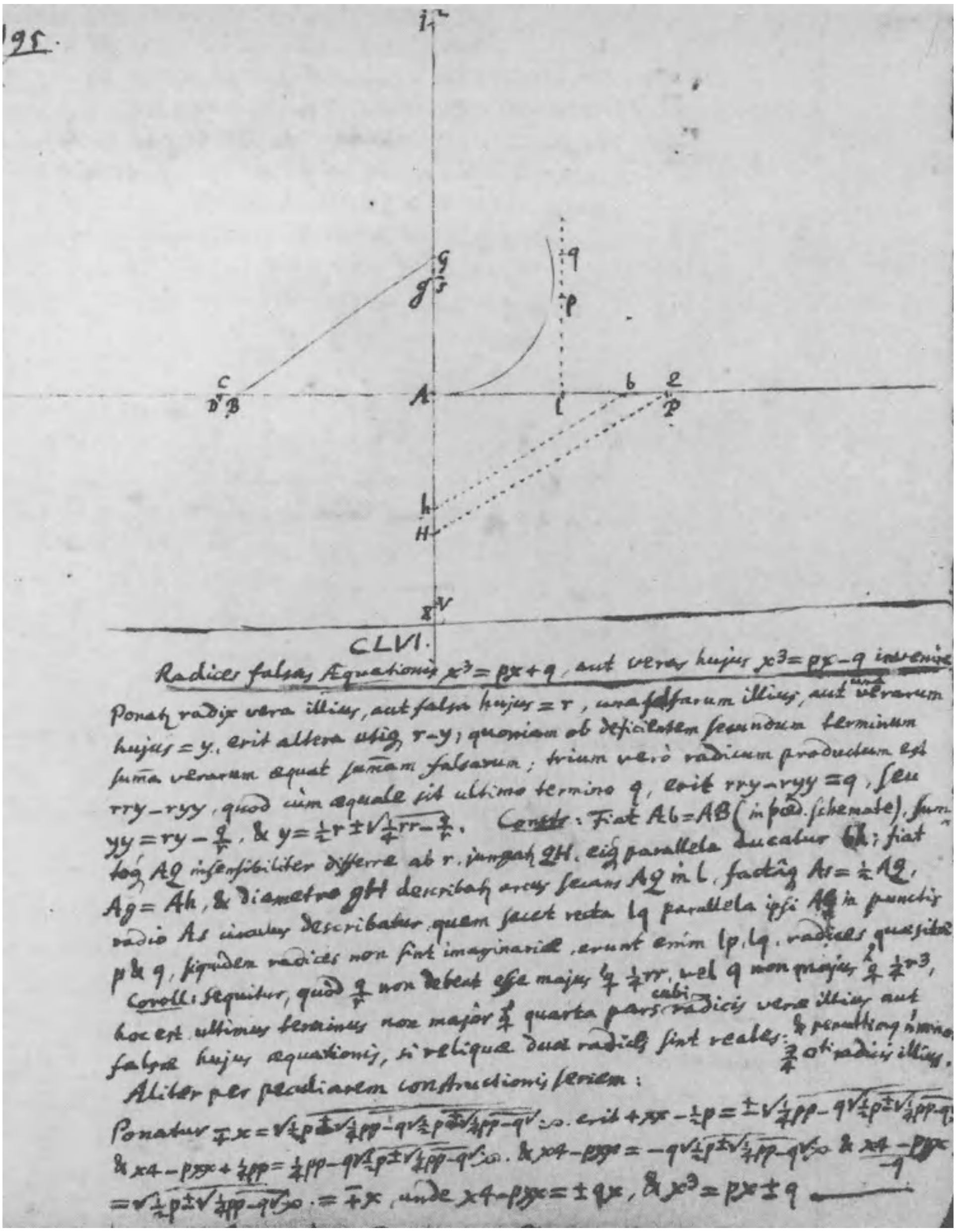
unde $x^4 - pxx = \pm qx,$

& $x^3 = px \pm q.$

Constructio eadem quae supra, nisi quod GI, GL &c. sursum, & AH deorsum sumendae[1].

NB. In his constructionibus hoc peculiare est, quod delineatis semel rectis AH, AG, AB appropinquatio fieri possit non amovendo circinum e charta, sed ita ut perpetuo alternis super illa pedibus [incedat] in orbem ambulet, si vid. concedatur rectae bisectio mechanica, quae fit nunc aperiendo nunc claudendo circinum[2].

1 V. la figure de la page suivante.
2 Cf. Op. XXXVII, *Opera*, p. 417, l. 18–12 du bas – p. 159 h.v., l. 1–6.



195.

CLVI.

Radices falsas Aequationis $x^3 = px + q$, aut veras hujus $x^3 = px - q$ invenire.

Ponatur radix vera illius, aut falsa hujus $= r$, una falsarum illius, aut una verarum hujus $= y$, erit altera utique $r - y$; quoniam ob deficientem secundum terminum summa verarum aequat summam falsarum; trium vero radicum productum est $rry - ryy$, quod cum aequale sit ultimo termino q, erit $rry - ryy = q$, seu $yy = ry - \frac{q}{r}$, & $y = \frac{1}{2}r \pm \sqrt{\frac{1}{4}rr - \frac{q}{r}}$. Constr: Fiat $Ab = AB$ (in praeced. schemate), sumtoque AQ insensibiliter differre ab r, jungatur gH, eique parallela ducatur bh; fiat $Ag = Ah$, & diametro gH describatur arcus secans AQ in l, factoque $As = \frac{1}{2}AQ$, radio As circulus describatur, quem secet recta lq parallela ipsi AQ in punctis p & q, siquidem radices non sint imaginariae, erunt enim lp, lq radices quaesitae.

Coroll: Sequitur, quod $\frac{q}{r}$ non debeat esse majus quam $\frac{1}{4}rr$, vel q non majus quam $\frac{1}{4}r^3$, hoc est ultimus terminus non major quam quarta pars cubi radicis verae illius aut falsae hujus aequationis, si reliquae duae radices sint reales: & penultimus minor $\frac{3}{4}$ quadrati radicis illius.

Aliter per peculiarem constructionis seriem:

Ponatur $\mp x = \sqrt{\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}pp - q\sqrt{\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}pp - q\sqrt{\&c.}}}}}$, erit $+xx - \frac{1}{2}p = \pm\sqrt{\frac{1}{4}pp - q\sqrt{\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}pp - q\sqrt{\&c.}}}}$ & $x^4 - pxx + \frac{1}{4}pp = \frac{1}{4}pp - q\sqrt{\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}pp - q\sqrt{\&c.}}}$, & $x^4 - pxx = -q\sqrt{\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}pp - q\sqrt{\&c.}}}$ & $\frac{x^4 - pxx}{-q} = \sqrt{\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}pp - q\sqrt{\&c.}}} = \mp x$, unde $x^4 - pxx = \pm qx$, & $x^3 = px \pm q$

Reproduction du manuscrit des *Meditationes*, p. 195.
La figure appartient aux articles CLV et CLVI.

Med. CLVI

Radices falsas Aequationis $x^3 = px + q$, aut veras hujus $x^3 = px - q$ invenire

Ms UB Basel L I a 3, pp. 195–196 [TP: 1689, TA: IX/1689]

Ponatur radix vera illius, aut falsa hujus $= r$, una falsarum illius, aut una verarum hujus $= y$, erit altera utique $r - y$; quoniam ob deficientem secundum terminum summa verarum aequat summam falsarum; trium vero radicum productum est $rry - ryy$, quod cum aequale sit ultimo termino q, erit

$$rry - ryy = q, \text{ seu } yy = ry - \frac{q}{r},$$

& $$y = \frac{1}{2}r \pm \sqrt{\frac{1}{4}rr - \frac{q}{r}}.$$

Constr.: Fiat Ab = AB (in praeced. schemate[1]), sumtoque AQ insensibiliter differre ab r, jungatur QH, eique parallela ducatur bh; fiat Ag = Ah, & diametro gH describatur arcus secans AQ in l, factaque As $= \frac{1}{2}$ AQ, radio As circulus describatur, quem secet recta lq parallela ipsi AG in punctis p & q, siquidem radices non sint imaginariae, erunt enim lp, lq radices quaesitae.

Coroll.: Sequitur, quod $\frac{q}{r}$ non debeat esse majus quam $\frac{1}{4}rr$, vel q non majus quam $\frac{1}{4}r^3$, hoc est, ultimus terminus non major quam quarta pars cubi radicis verae illius aut falsae hujus aequationis, si reliquae duae radices sint reales, & penultimus non minor $\frac{3}{4}$ $\square^{\text{ti}}$ radicis illius.

Aliter per peculiarem constructionis seriem:

Ponatur $$\mp x = \sqrt{\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}pp - q\sqrt{\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}pp - q\sqrt{\&c.}}}}}$$

erit $$+ xx - \frac{1}{2}p = \pm\sqrt{\frac{1}{4}pp - q\sqrt{\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}pp - q\sqrt{\&c.}}}}$$

& $$x^4 - pxx + \frac{1}{4}pp = \frac{1}{4}pp - q\sqrt{\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}pp - q\sqrt{\&c.}}}$$

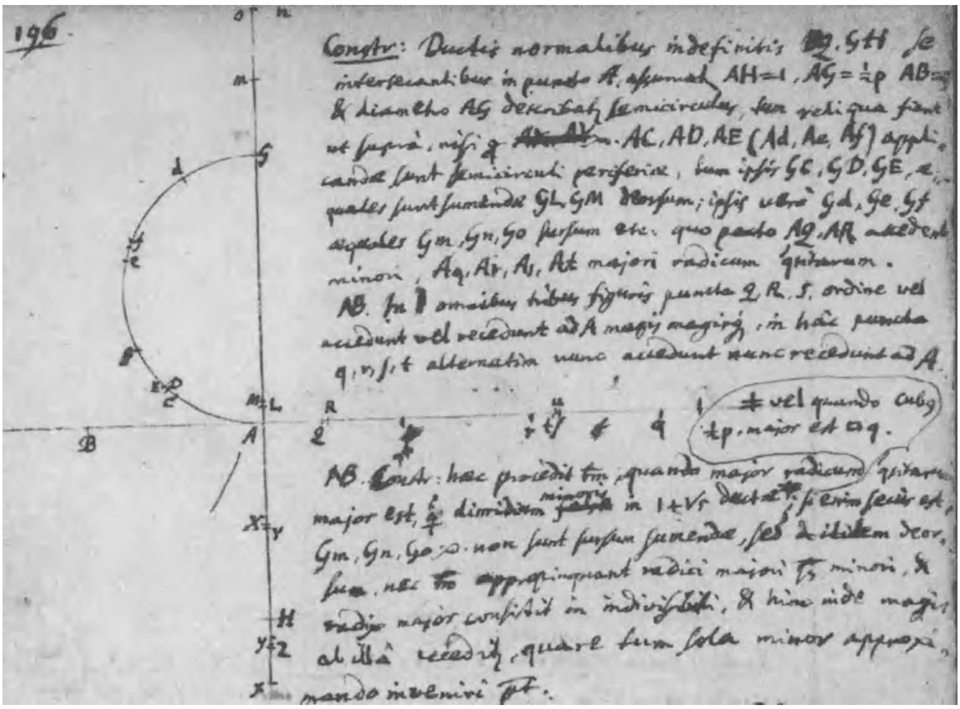
1 Bernoulli se réfère encore à la figure de Med. CLV, dessinée sur la même page du manuscrit.

& $$x^4 - pxx = -q\sqrt{\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}pp - q\sqrt{\&c.}}}$$

& $$\frac{x^4 - pxx}{-q} = \sqrt{\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}pp - q\sqrt{\&c.}}} = \mp x,$$

unde $$x^4 - pxx = \pm qx,$$

& $$x^3 = px \pm q.$$



Constr.: Ductis normalibus indefinitis BQ, GH se intersecantibus in puncto A, assumatur AH = 1, AG = $\frac{1}{2}$ *p*, AB = *q*, & diametro AG describatur semicirculus, tum reliqua fiant ut supra, nisi quod AC, AD, AE (Ad, Ae, Af) applicandae sunt semicirculi periferiae, tum ipsis GC, GD, GE, aequales sunt sumendae GL, GM deorsum; ipsis vero Gd, Ge, Gf aequales Gm, Gn, Go sursum etc: quo pacto AQ, AR accedent minori, Aq, Ar, As, At majori radicum quaesitarum.

NB. In omnibus tribus figuris puncta Q, R, S, ordine vel accedunt vel recedunt ad A magis magisque, in hac puncta q, r, s, t alternatim nunc accedunt nunc recedunt ad A.

NB. Constr. haec procedit tantum, quando major radicum quaesitarum major est, quam dimidium minoris in $1+\sqrt{5}$ ductae, vel quando cubus $\frac{1}{2}p$ major est $\square q$; si enim secus est, Gm, Gn, Go, &c. non sunt sursum sumendae, sed itidem deorsum, nec tamen appropinquant radici maiori sed minori, & radix major consistit in indivisibili, & hinc inde magis ab illa receditur, quare tum sola minor approximando inveniri potest.

Sic & constructio potest reperiri pro Aequationibus 4 dimensionum:

Ponatur $$x = \sqrt{-\tfrac{1}{2}p + \sqrt{\tfrac{1}{4}pp + r + q\sqrt{-\tfrac{1}{2}p\ \&c.}}}$$

eritque $$xx + \tfrac{1}{2}p = \sqrt{\tfrac{1}{4}pp + r + q\sqrt{-\tfrac{1}{2}p\ \&c.}}$$

& $$x^4 + pxx + \tfrac{1}{4}pp = \tfrac{1}{4}pp + r + q\sqrt{-\tfrac{1}{2}p\ \&c.}$$

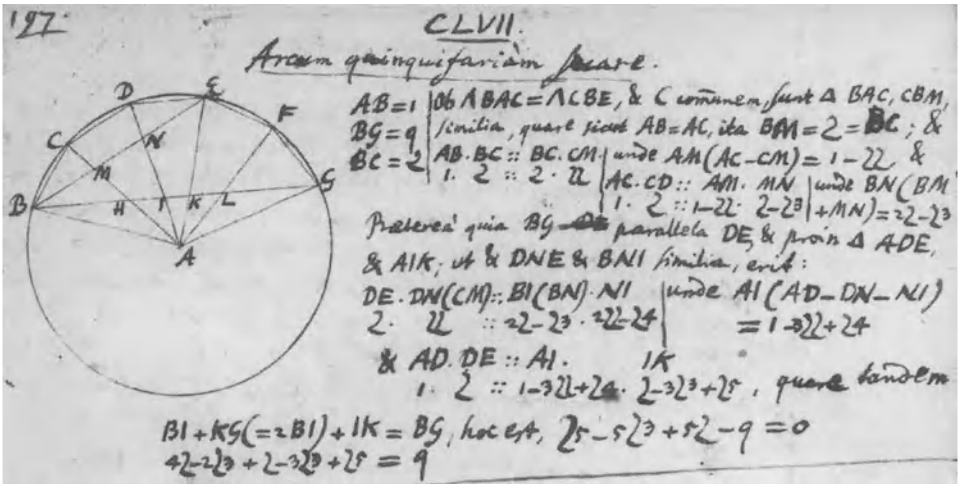
& $$\frac{x^4+pxx-r}{q} = \sqrt{-\tfrac{1}{2}p\ \&c.} = x,$$

& $$x^4 * pxx - qx - r = 0.$$

Med. CLVII

Arcum quinquifariam secare[1]

Ms UB Basel L I a 3, p. 197 [TP: 1689, TA: I/1691] – Werke 2, pp. 502–503


197

CLVII.

Arcum quinquifariàm secare.

$AB=1$ | Ob $\wedge$ BAC $= \wedge$ CBE, & C communem, sunt $\triangle$ BAC, CBM,

$BG=q$ | similia, quare sicut $AB=AC$, ita $BM=z=BC$; &

$BC=z$ | AB.BC :: BC.CM | unde $AM(AC-CM)=1-zz$ &

$1.\ z :: z.\ zz$ | AC.CD :: AM.MN | unde $BN(BM+MN)=2z-z^3$

$1.\ z :: 1-zz.\ z-z^3$

Praeterea quia BG parallela DE, & proin $\triangle$ ADE & AIK; ut & DNE & BNI similia, erit:

DE.DN(CM) :: BI(BN).NI | unde $AI(AD-DN-NI)$

$z.\ zz :: 2z-z^3.\ 2zz-z^4$ | $=1-3zz+z^4$

& AD.DE :: AI.IK

$1.\ z :: 1-3zz+z^4.\ z-3z^3+z^5$, quare tandem

$BI+KG(=2BI)+IK=BG$, hoc est, $z^5-5z^3+5z-q=0$

$4z-2z^3+z-3z^3+z^5=q$

$$AB = 1$$
$$BG = q$$
$$BC = z$$

Ob $\wedge$ BAC $=$ $\wedge$ CBE, & C communem, sunt $\triangle$ BAC, CBM similia, quare sicut AB = AC, ita BM = z = BC; &

$$AB.BC :: BC.CM$$
$$1 \,.\, z :: z \,.\, zz$$

unde $$AM(AC-CM) = 1 - zz,$$

& $$AC.CD :: AM \,.\, MN$$
$$1 \,.\, z :: 1 - zz . z - z^3$$

unde $$BN(BM+MN) = 2z - z^3.$$

1 Sur cette Méditation et la suivante, cf. l'*Introduction*, p. 26 h.v.

Praeterea quia BG parallela DE, & proin $\triangle$ADE & AIK, ut & DNE & BNI similia, erit:

$$\mathrm{DE}.\mathrm{DN}(\mathrm{CM}) :: \mathrm{BI}(\mathrm{BN}).\mathrm{NI}$$
$$z\ .zz \quad :: \ 2z - z^3\ .2zz - z^4$$

unde
$$\mathrm{AI}(\mathrm{AD} - \mathrm{DN} - \mathrm{NI}) = 1 - 3zz + z^4$$

&
$$\mathrm{AD}.\mathrm{DE} :: \quad \mathrm{AI} \quad . \quad \mathrm{IK}$$
$$1\ .\ z\ :: 1 - 3zz + z^4 . z - 3z^3 + z^5,$$

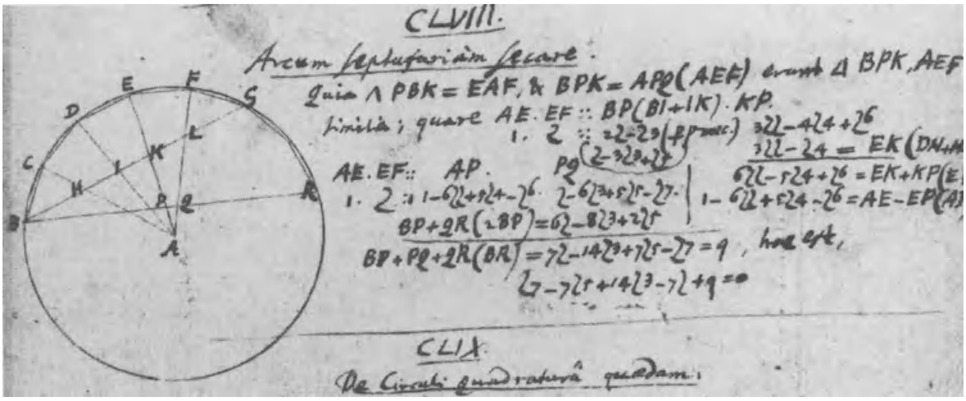
quare tandem
$$\mathrm{BI} + \mathrm{KG}(= 2\mathrm{BI}) + \mathrm{IK} = \mathrm{BG},$$
$$4z - 2z^3 + z - 3z^3 + z^5 = q$$

hoc est,
$$z^5 - 5z^3 + 5z - q = 0.$$

Med. CLVIII

Arcum septufariam secare

Ms UB Basel L I a 3, p. 197 [TP: 1689, TA: I/1691] – Werke 2, p. 504



Quia $\wedge$ PBK = EAF, & BPK = APQ(AEF), erunt $\triangle$ BPK, AEF similia;

quare[1]

$$\begin{array}{ll} \mathrm{AE}\,.\,\mathrm{EF} :: \mathrm{BP}(\mathrm{BI}+\mathrm{IK}) & .\quad \mathrm{KP} \\ 1\ .\ z\ :: 2z - z^3 \text{ (per praec.)} & .\ 3zz - 4z^4 + z^6 \\ \qquad\qquad z - 3z^3 + z^5 & \end{array}$$

$$3zz - z^4 = \mathrm{EK}(\mathrm{DN}+\mathrm{NI})$$

$$6zz - 5z^4 + z^6 = \mathrm{EK} + \mathrm{KP}(\mathrm{EP})$$

$$1 - 6zz + 5z^4 - z^6 = \mathrm{AE} - \mathrm{EP}(\mathrm{AP})$$

$$\begin{array}{lll} \mathrm{AE}\,.\,\mathrm{EF} :: & \mathrm{AP} & .\quad \mathrm{PQ} \\ 1\ .\ z\ :: & 1 - 6zz + 5z^4 - z^6 & .\ z - 6z^3 + 5z^5 - z^7 \end{array}$$

$$\mathrm{BP} + \mathrm{QR}(2\mathrm{BP}) = 6z - 8z^3 + 2z^5$$

$$\mathrm{BP} + \mathrm{PQ} + \mathrm{QR}(\mathrm{BR}) = 7z - 14z^3 + 7z^5 - z^7 = q,$$

hoc est,

$$z^7 - 7z^5 + 14z^3 - 7z + q = 0.$$

1 Dans ce qui suit, Bernoulli utilise des valeurs de segments calculées dans la Med. CLVII précédente (pp. 216–217 h.v.).

Med. CLIX

De Circuli Quadratura quaedam

Ms UB Basel L I a 3, p. 197 [TP: 1689, TA: I/1691]

Posito radio circuli $= a$, erit

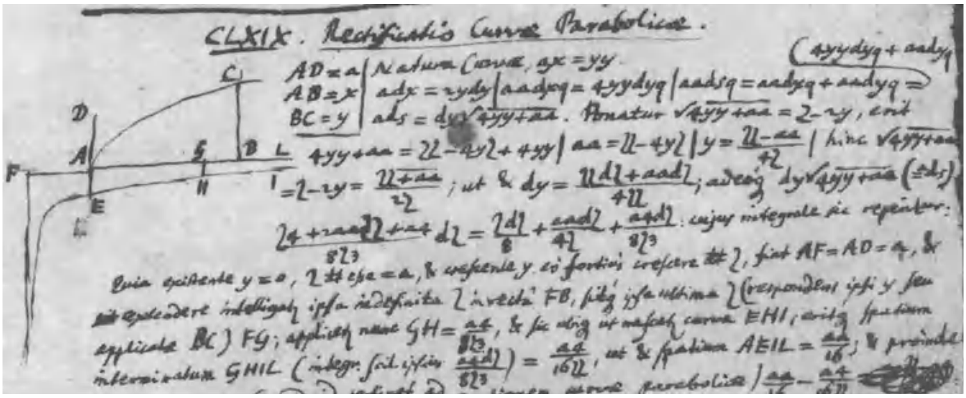
$$\begin{array}{lrcl}
\text{Circumferentia} & \text{4goni} & = & 4a\sqrt{2} \\
 & \text{8goni} & = & 8a\sqrt{2-\sqrt{2}} \\
 & \text{16goni} & = & 16a\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} \\
 & \text{32goni} & = & 32a\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \\
 & \text{64goni} & = & 64a\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}} \\
\text{adeoque circuli seu} & \infty\text{goni} & = & 4\times 2^{\infty}\, a\sqrt{2-\sqrt[\infty]{2}} = \\
 & & & 2^{\infty+2} a\sqrt{2-\sqrt[\infty]{2}} = \\
 & & & 2^{\infty}\, a\sqrt{2-\sqrt[\infty-2]{2}}
\end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl}
\text{Area} & \text{4goni} & = & 2aa \\
 & \text{8goni} & = & 2aa\sqrt{2} \\
 & \text{16goni} & = & 4aa\sqrt{2-\sqrt{2}} \\
 & \text{32goni} & = & 8aa\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} \\
 & \text{64goni} & = & 16aa\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \\
 & \infty\text{goni} & = & 2\times 2^{\infty}\, aa\sqrt{2-\sqrt[\infty]{2}} = \\
 & & & 2^{\infty+1} aa\sqrt{2-\sqrt[\infty]{2}} = \\
 & & & 2^{\infty}\, aa\sqrt{2-\sqrt[\infty-1]{2}}\,.
\end{array}$$

Med. CLXIX

Rectificatio Curvae Parabolicae

Ms UB Basel L I a 3, pp. 209–210 [TP: 25/V/1691, TA: V/1692]


CLXIX. Rectificatio Curvae Parabolicae.

$$\begin{aligned} AD &= a \\ AB &= x \\ BC &= y \end{aligned}$$

Natura Curvae, $ax = yy$.

$$\begin{aligned} a\,dx &= 2y\,dy \\ aa\,dx\text{q} &= 4yy\,dy\text{q} \\ aa\,ds\text{q} &= aa\,dx\text{q} + aa\,dy\text{q} = 4yy\,dy\text{q} + aa\,dy\text{q} \\ a\,ds &= dy\sqrt{4yy+aa}. \end{aligned}$$

Ponatur $$\sqrt{4yy+aa} = z - 2y,$$

erit $$4yy+aa = zz - 4yz + 4yy$$

$$aa = zz - 4yz$$

$$y = \frac{zz-aa}{4z}$$

hinc $$\sqrt{4yy+aa} = z - 2y = \overline{\frac{zz+aa}{2z}};$$

ut & $$dy = \frac{zz\,dz + aa\,dz}{4zz};$$

adeoque $$dy\sqrt{4yy+aa}\ (= a\,ds) = \frac{z^4 + 2aazz + a^4}{8z^3}\,dz$$

$$= \frac{z\,dz}{8} + \frac{aa\,dz}{4z} + \frac{a^4dz}{8z^3}:$$

cujus integrale sic reperitur:

Quia existente $y = 0$, z debet esse $= a$, & crescente y, eo fortius crescere debet z, fiat AF $=$ AD $= a$, & extendere intelligatur ipsa indefinita z in recta FB, sitque ipsa ultima z (respondens ipsi y seu applicatae BC) FG; applicetur nunc GH $= \frac{a^4}{8z^3}$, & sic ubique ut nascatur curva EHI; eritque spatium interminatum GHIL (integr. scil. ipsius $\frac{a^4dz}{8z^3}$) $= \frac{a^4}{16zz}$, ut & spatium AEIL $= \frac{aa}{16}$; & proinde spatium AEHG (quod vid. pertinet ad portionem curvae parabolicae) $\frac{aa}{16} - \frac{a^4}{16zz}$.

Eodem ratiocinio invenitur integrale ipsius $\frac{z\,dz}{8}$ huc pertinens $= \frac{zz-aa}{16}$; adeoque integralia primi & 3$^{\text{tii}}$ membri simul addita

$$= \frac{zz-aa}{16} + \frac{aa}{16} - \frac{a^4}{16zz} = \frac{z^4 - a^4}{16zz}.$$

Integrale medii membri $\frac{aa\,dz}{4z}$ est portio hyperbolae, quae invenitur per ea quae habentur in Epistola mea[2] 25 Maji 1691 (ponendo $z = a+t$)

$$\frac{at}{4\cdot 1} - \frac{tt}{4\cdot 2} + \frac{t^3}{4\cdot 3a} - \frac{t^4}{4\cdot 4aa} + \frac{t^5}{4\cdot 5a^3}\ \&c.$$

adeoque integrale omnium trium membrorum seu ipsum

$$as = \frac{z^4-a^4}{16zz} + \frac{at}{4\cdot 1} - \frac{tt}{4\cdot 2} + \frac{t^3}{4\cdot 3a} - \frac{t^4}{4\cdot 4aa} + \frac{t^5}{4\cdot 5a^3}\ \&c.$$

adeoque $$s = \frac{z^4-a^4}{16azz} + \frac{t}{4\cdot 1} - \frac{tt}{4\cdot 2a} + \frac{t^3}{4\cdot 3aa} - \frac{t^4}{4\cdot 4a^3}\ \&c.$$

jam si pro a & t ponatur 1, erit $z = a+t = 2$, & $y = \frac{zz-aa}{4z} = \frac{3}{8}$, &

$$s = \frac{15}{64} + \frac{1}{4\cdot 1} - \frac{1}{4\cdot 2} + \frac{1}{4\cdot 3} - \frac{1}{4\cdot 4}\ \&c.$$

seu $$4s = \frac{15}{16} + \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\ \&c.$$

jam si a unitas discerpatur in partes quadruplo minores, hoc est, si ponatur $a = 4$, erit numerus partium in $4s$ quadruplo major, adeoque in s tantus, quantus antea in $4s$: quare tum s erit $= \frac{15}{16}+\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$ &c. sed $y = \frac{3}{2}$ seu $x = \frac{yy}{a} = \frac{9}{16}$.

Vel brevius, ponatur statim pro a & t, 4; eritque $z=a+t = 8$, & $y = \frac{3}{2}$, & $s = \frac{15}{16}+\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$ &c.

2 Cf. les notes de O. Spiess dans Joh. I B. *Briefe* 1: Nr.(2,1), note 1, p. 106, et Nr.(3,1), note 3, pp. 113–114; cf. aussi Op. XC, Prop. LI (pp. 118–121 h.v.), où le contenu de la présente *Meditatio* se trouve reproduit (en 1696) presque sans changement.
Comme l'a observé O. Spiess (*loc. cit.*), le résultat final,

$$\frac{15}{16} + \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \text{etc.},$$

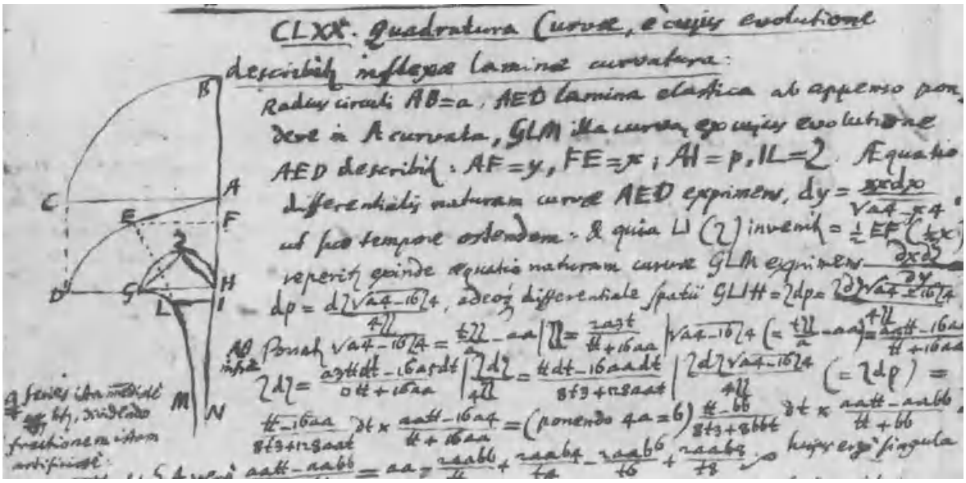
n'est autre que celui $$\left(\frac{23}{16} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\ \text{etc.}\right)$$

qui avait été annoncé à Jacob par Johann dans sa lettre du 12 mai 1691 (Joh. I B. *Briefe* 1, Nr. 1, p. 103), et la lettre de Jacob du 25 mai 1691 qu'il cite ici était sans doute la réponse à son frère.

Med. CLXX

Quadratura Curvae, e cujus evolutione describitur inflexae laminae curvatura[1]

Ms UB Basel L I a 3, pp. 210–211 [TP: 25/V/1691, TA: V/1692]



Radius circuli AG $= a$, AED lamina elastica ab appenso pondere in A curvata, GLM illa curva, ex cujus evolutione AED describitur: AF $= y$, FE $= x$; AI $= p$, IL $= z$. Aequatio differentialis naturam curvae AED exprimens,

$$dy = \frac{xx\,dx}{\sqrt{a^4 - x^4}},$$

ut suo tempore ostendam: & quia LI (z) invenitur $= \frac{1}{2}$ EF ($\frac{1}{2}x$), reperitur exinde aequatio naturam curvae GLM exprimens

$$\frac{dx\,dz}{dy} = dp = \frac{dz\sqrt{a^4 - 16z^4}}{4zz},$$

adeoque differentiale spatii GLIH

$$= z\,dp = \frac{z\,dz\,\sqrt{a^4 - 16z^4}}{4zz}.$$

1 Cf. Op.CI, Prop.LX (pp. 140–143 h.v.), et aussi Op.LVIII, où le résultat final de Med.CLXX est énoncé au n° 11 de la troisième partie (*Opera*, p. 594; ce travail sera reproduit dans *Werke* 6).

Ponatur {NB infra}[2]

$$\sqrt{a^4 - 16z^4} = \frac{tzz}{a} - aa$$

$$zz = \frac{2a^3t}{tt + 16aa}$$

$$\sqrt{a^4 - 16z^4}\left(= \frac{tzz}{a} - aa\right) = \frac{aatt - 16a^4}{tt + 16aa}$$

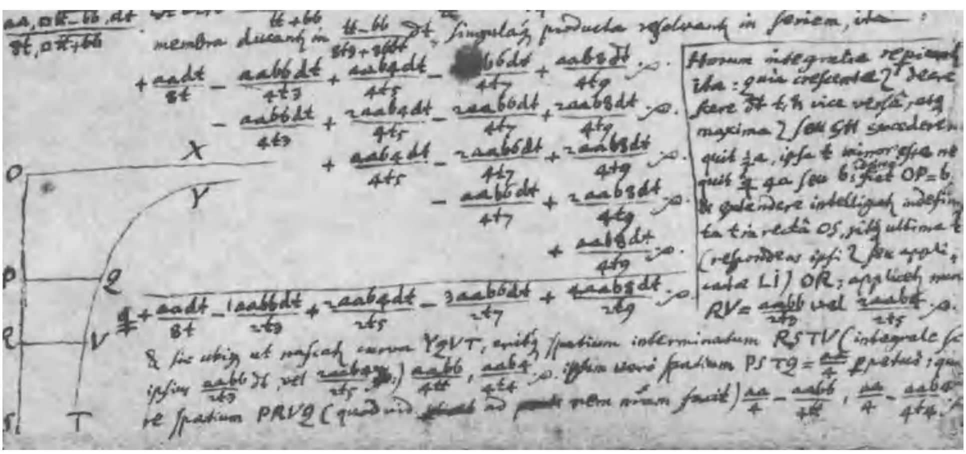
$$z\,dz = \frac{a^3tt\,dt - 16a^5dt}{\square\, tt + 16aa}$$

$$\frac{z\,dz}{4zz} = \frac{tt\,dt - 16aa\,dt}{8t^3 + 128aat}$$

$$\frac{z\,dz\sqrt{a^4 - 16z^4}}{4zz} (= z\,dp) = \frac{\overline{tt - 16aa}}{8t^3 + 128aat}dt \times \frac{aatt - 16a^4}{tt + 16aa} =$$

(ponendo $4a = b$) $$\frac{tt - bb}{8t^3 + 8bbt}dt \times \frac{aatt - aabb}{tt + bb}.$$

Est vero $\dfrac{aatt - aabb}{tt + bb} = aa - \dfrac{2aabb}{tt} + \dfrac{2aab^4}{t^4} - \dfrac{2aab^6}{t^6} + \dfrac{2aab^8}{t^8}$ &c.



2 Cette note marginale renvoie au passage écrit dans la marge de la page 211 du manuscrit, que nous reproduisons entre accolades à la fin de Med. CLXX (N.D.L.R.)

hujus ergo singula membra ducantur in

$$\frac{tt-bb}{8t^3+8bbt}dt,$$

singulaque producta resolvantur in seriem, ita:

$$\begin{array}{rcccccccccl}
+\dfrac{aa\,dt}{8t} & - & \dfrac{aabb\,dt}{4t^3} & + & \dfrac{aab^4dt}{4t^5} & - & \dfrac{aab^6dt}{4t^7} & + & \dfrac{aab^8dt}{4t^9} & \&c. \\
 & - & \dfrac{aabb\,dt}{4t^3} & + & \dfrac{2aab^4dt}{4t^5} & - & \dfrac{2aab^6dt}{4t^7} & + & \dfrac{2aab^8dt}{4t^9} & \&c. \\
 & & & + & \dfrac{aab^4dt}{4t^5} & - & \dfrac{2aab^6dt}{4t^7} & + & \dfrac{2aab^8dt}{4t^9} & \&c. \\
 & & & & & - & \dfrac{aab^6dt}{4t^7} & + & \dfrac{2aab^8dt}{4t^9} & \&c. \\
 & & & & & & & + & \dfrac{aab^8dt}{4t^9} & \&c. \\
\hline
+\dfrac{aa\,dt}{8t} & - & \dfrac{1aabb\,dt}{2t^3} & + & \dfrac{2aab^4dt}{2t^5} & - & \dfrac{3aab^6dt}{2t^7} & + & \dfrac{4aab^8dt}{2t^9} & \&c.
\end{array}$$

{Series[3] ista immediate quoque habetur, dividendo fractionem istam artificiose[4]:

$$\frac{aa,\square\,\overline{tt-bb},dt}{8t,\square\,\overline{tt+bb}}.\}$$

3 Le passage entre accolades a été ajouté dans la marge de la page 210 du manuscrit (N.D.L.R.)

4 La «divisio artificiosa» de Bernoulli (ici, et de nouveau dans Med. CLXXIV et dans la communication qu'il fait de celle-ci à Leibniz le 4 mars 1696: Leibniz, *Math. Schriften* III, p. 29; cf. Jac. B. *Briefe*, p. 83) est l'opération à laquelle il faisait déjà allusion dans Med. CLXIX en se référant à sa lettre du 25 mai 1691, et c'est la même aussi qu'il qualifie plus tard de «divisio continua» (v. Op. LXXIV, Prop. XXXVI, XXXVII, XL, pp. 87–92 h.v., et Op. CI, Prop. LIII, pp. 127–131 h.v.); c'est en somme le développement d'une fraction rationnelle en série de puissances d'une variable convenablement choisie (ici, $\frac{1}{t}$). Chez Newton et Wallis, cette opération portait depuis longtemps le nom de «divisio speciosa» ou «in speciebus» (v. p.ex. Wallis, *Operum Mathematicorum Volumen alterum*, Oxoniae 1693, p. 369), par allusion peut-être à l'«algebra speciosa» de Viète.

Horum integralia reperiuntur ita: Quia crescente z decrescere debet t, & vice versa, atque maxima z seu GH excedere nequit $\frac{1}{2}a$, ipsa t minor esse nequit quam $4a$ seu b; idcirco fiat $\mathrm{OP} = b$, & extendere intelligatur indefinita t in recta OS, sitque ultima t (respondens ipsi z seu applicatae LI) OR; applicetur nunc

$$\mathrm{RV} = \frac{aabb}{2t^3} \quad \text{vel} \quad \frac{2aab^4}{2t^5} \text{ \&c.}$$

& sic ubique, ut nascatur curva YQVT, eritque spatium interminatum RSTV (integrale sc. ipsius $\frac{aabb}{2t^3}dt$, vel $\frac{2aab^4}{2t^5}dt$ &c.) $\frac{aabb}{4tt}$, $\frac{aab^4}{4t^4}$ &c.; ipsum vero spatium PSTQ $= \frac{aa}{4}$ perpetuo; quare spatium PRVQ (quod vid. ad rem nostram facit) $\frac{aa}{4} - \frac{aabb}{4tt}$, $\frac{aa}{4} - \frac{aab^4}{4t^4}$ &c., unde integrale seriei

$$-\frac{1aabb}{2t^3}dt + \frac{2aab^4}{2t^5}dt - \frac{3aab^6}{2t^7}dt + \frac{4aab^8}{2t^9}dt \qquad \text{\&c.}$$

$$= + \frac{aabb}{4tt} - \frac{aab^4}{4t^4} + \frac{aab^6}{4t^6} - \frac{aab^8}{4t^8} + \frac{aab^{10}}{4t^{10}} \text{ \&c.} = \frac{aabb}{4tt+4bb}$$

ob progressionem Geometricam

$$-\frac{aa}{4} + \frac{aa}{4} - \frac{aa}{4} + \frac{aa}{4} - \frac{aa}{4} \text{ \&c.} = -\frac{1}{8}aa$$

est enim $\frac{1}{1+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1$ &c.

Quantum ad primum membrum seriei differentialium $\frac{aadt}{8t}$, ejus integrale est spatium hyperbolicum: quare fingatur YQVT esse hyperbola & PR dicatur s; unde erit $\mathrm{OR}\ (= t) = b[+s,]$ &

$$\mathrm{RV}\left(= \frac{aa}{8t}\right) = \frac{aa}{8b+8s} = \frac{aa}{8b} - \frac{aas}{8bb} + \frac{aass}{8b^3} - \frac{aas^3}{8b^4} \text{ \&c.:}$$

adeoque differentiale spatii PRVQ

$$= \frac{aa\,ds}{8b} - \frac{aas\,ds}{8bb} + \frac{aass\,ds}{8b^3} - \frac{aas^3ds}{8b^4} \text{ \&c.}$$

& spatium ipsum $\quad = \frac{aas}{8b} - \frac{aass}{16bb} + \frac{aas^3}{24b^3} - \frac{aas^4}{32b^4}$ &c.

Quare denique integrale totius seriei

$$+\frac{aa\,dt}{8t}-\frac{1aabb\,dt}{2t^3}+\frac{2aab^4dt}{2t^5}-\frac{3aab^6dt}{2t^7}\ \&c.$$

est $\dfrac{aas}{8b}-\dfrac{aass}{16bb}+\dfrac{aas^3}{24b^3}-\dfrac{aas^4}{32b^4}\ \&c.-\dfrac{1}{8}aa+\dfrac{aabb}{4tt+4bb}$ = spatio GLIH.

Quod si ponatur $\dfrac{aa}{8}=1$, & $s=b=4a=8\sqrt{2}$, adeoque $t=b+s=2b=8a=16\sqrt{2}$, (quo casu GH $=\frac{1}{2}a$ fiet $=\sqrt{2}$ & LI $(z)=\sqrt{\dfrac{2a^3t}{tt+16aa}}=\sqrt{\dfrac{8}{5}}$, & HZ $=1$) erit spatium GLIH $=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\ \&c.-\frac{3}{5}$; spatium vero LMNI est infinitum.

NB. LGD = LE $=\dfrac{aa}{4z}$.

{NB. supra: Si ponatur $\sqrt{a^4-16z^4}=\dfrac{aaz}{t}-aa$ reperitur positis, ut antea, $z=\sqrt{\dfrac{8}{5}}$,

$$\text{spatium GLIH}=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{24}+\frac{1}{64}+\frac{1}{160}\ \&c.-\frac{3}{5};$$

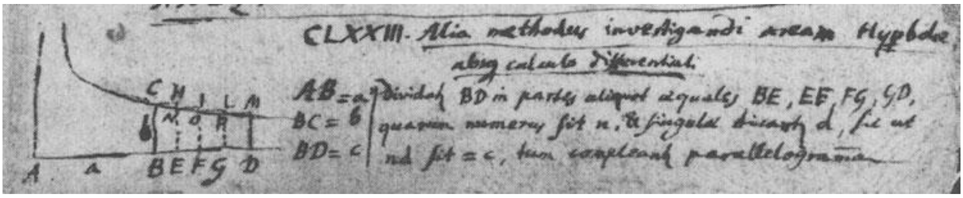
unde sequitur

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\ \&c.=\frac{1}{2}+\frac{1}{12}+\frac{1}{30}+\frac{1}{56}+\frac{1}{90}\ \&c.$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{24}+\frac{1}{64}+\frac{1}{160}\ \&c.\}$$

Med. CLXXIII

Alia methodus investigandi aream Hyperbolae, absque calculo differentiali[1]

Ms UB Basel L I a 3, pp. 211–212 [TP: 25/V/1691, TA: V/1692]



AB $= a$
BC $= b$
BD $= c$

Dividatur BD in partes aliquot aequales BE, EF, FG, GD, quarum numerus sit n, & singulae dicantur d, sic ut nd sit $= c$, tum compleantur parallelogramma BH, EI, FL, GM. Jam BC $= b$, EN $= \frac{ab}{a+d}$, FO $= \frac{ab}{a+2d}$, GP $= \frac{ab}{a+3d}$, DM $= \frac{ab}{a+nd}$: unde Parallelogramma

$$\begin{aligned}
\text{BH} &= bd = bd \\
\text{EI} &= \frac{abd}{a+d} = bd - \frac{bdd}{a} + \frac{bd^3}{aa} - \frac{bd^4}{a^3} + \frac{bd^5}{a^4} \quad \&\text{c.} \\
\text{FL} &= \frac{abd}{a+2d} = bd - \frac{2bdd}{a} + \frac{4bd^3}{aa} - \frac{8bd^4}{a^3} + \frac{16bd^5}{a^4} \quad \&\text{c.} \\
\text{GM} &= \frac{abd}{a+3d} = bd - \frac{3bdd}{a} + \frac{9bd^3}{aa} - \frac{27bd^4}{a^3} + \frac{81bd^5}{a^4} \quad \&\text{c.} \\
\text{Ultim.} &= \frac{abd}{a+nd} = bd - \frac{nbdd}{a} + \frac{nnbd^3}{aa} - \frac{n^3bd^4}{a^3} + \frac{n^4bd^5}{a^4} \quad \&\text{c.}
\end{aligned}$$

1 Cf. Op. LXXIV, Prop. XLII (pp. 93–95 h.v.).

Harum serierum termini primi sunt aequales, 2di progrediuntur ut numeri naturales, 3^{tii} ut eorundem □ta, 4^{ti} ut cubi &c., quare ubi numerus terminorum n infinitus est (uti hic ponitur) summa primorum terminorum aequalis, secundorum dimidia, tertiorum subtripla &c. est summae totidem ultimo aequalium, unde summa omnium hac serie exprimitur:

$$nbd - \frac{nnbdd}{2a} + \frac{n^3bd^3}{3aa} - \frac{n^4bd^4}{4a^3} + \frac{n^5bd^5}{5a^4} \text{ \&c.}$$

vel ponendo c loco nd,

$$\frac{bc}{1} - \frac{bcc}{2a} + \frac{bc^3}{3aa} - \frac{bc^4}{4a^3} + \frac{bc^5}{5a^4} \text{ \&c.}$$

hoc est, ponendo $AB = BD$ seu $a = c$,

$$\frac{ab}{1} - \frac{ab}{2} + \frac{ab}{3} - \frac{ab}{4} + \frac{ab}{5} \text{ \&c.}$$

iterumque ab loco unitatis, $\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7}$ &c.

{NB.[2] Inscribantur potius parallelogr.
vidi deinde demonstrationem similem Wallis. mechan. p. 550}

2 Ce NB. a été écrit dans la marge. La dernière phrase, écrite avec une autre encre, a été ajoutée encore plus tard. Elle renvoie à J. Wallis, *Mechanica: sive, de motu, Tractatus Geometricus*, Londini 1670, Pars II, Cap. V: *De calculo Centri Gravitatis*; à la page 550, Wallis exécute cette même sommation en se référant à son *Arithmetica Infinitorum* (N.D.L.R.)

Med. CLXXIV

Numerum quemcunque surdum seu irrationalem $\sqrt{n}$ vel $\sqrt{c.n}$ &c. per infinitam seriem rationalium exhibere[1]

Ms UB Basel L I a 3, pp. 212–213 [TP: 11/VI/1691, TA: V/1692]

Convertatur numerus n in fractionem hujus formae $\dfrac{a}{a-b}$. Haec fractio (ut & ejus $\square^{\text{tum}}$, Cubus, Biquad. &c.) convertantur per divisionem artificiosam (cujus fundamenta habes praeced. pag 210 & in literis meis de 11. Jun. 1691)[2] in series, hoc pacto:

[E]xpon. [Po]test.	Potestates
0	$1 = 1 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0$ &c.
$\frac{1}{2}$	$\sqrt{\dfrac{a}{a-b}} = 1 + \dfrac{b}{2a} + \dfrac{1\cdot 3bb}{2\cdot 4aa} + \dfrac{1\cdot 3\cdot 5b^3}{2\cdot 4\cdot 6a^3} + \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7b^4}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8a^4}$ &c.
1	$\dfrac{a}{a-b} = 1 + \dfrac{b}{a} + \dfrac{bb}{aa} + \dfrac{b^3}{a^3} + \dfrac{b^4}{a^4} + \dfrac{b^5}{a^5}$ &c.
$1\frac{1}{2}$	$\dfrac{a}{a-b}\sqrt{\dfrac{a}{a-b}} = 1 + \dfrac{3b}{2a} + \dfrac{3\cdot 5bb}{2\cdot 4aa} + \dfrac{3\cdot 5\cdot 7b^3}{2\cdot 4\cdot 6a^3} +$
2	$\dfrac{aa}{\square a-b} = 1 + \dfrac{2b}{a} + \dfrac{3bb}{aa} + \dfrac{4b^3}{a^3} + \dfrac{5b^4}{a^4} + \dfrac{6b^5}{a^5}$ &c.
$2\frac{1}{2}$	
3	$\dfrac{a^3}{\text{C}.a-b} = 1 + \dfrac{3b}{a} + \dfrac{6bb}{aa} + \dfrac{10b^3}{a^3} + \dfrac{15b^4}{a^4} + \dfrac{21b^5}{a^5}$ &c.
$3\frac{1}{2}$	
4	$\dfrac{a^4}{\text{B}.a-b} = 1 + \dfrac{4b}{a} + \dfrac{10bb}{aa} + \dfrac{20b^3}{a^3} + \dfrac{35b^4}{a^4} + \dfrac{56b^5}{a^5}$ &c.

1 Cf. Op. LXXIV, Prop. XXXVI–XL (pp. 87–92 h.v.) et Op. CI, Prop. LIII (pp. 127–131 h.v.); Bernoulli a aussi envoyé à Leibniz, en mars 1696, le texte de cette Med. CLXXIV (jusqu'à «sic consequenter» seulement, sans le corollaire ni le scholie); cf. Jac. B. *Briefe*, p. 83.

2 La référence à la p. 210 (du manuscrit des *Meditationes*) renvoie à Med. CLXX (p. 225 h.v.). Quant à la lettre du 11 juin 1691, c'est sans doute, d'après la conjecture de O. Spiess, la lettre (perdue) à Johann, Nr.(2,3): v. Joh. I B. *Briefe* 1, pp. 106–107, e.p. p. 107 note 1.

Harum serierum perpendicularium primi termini sunt unitates, secundi numeri naturales, tertii trigonales &c.; hinc ad inveniendas potestates intermedias seu radices (quarum exponentes sunt intermedii inter exponentes integros) numeri terminorum figurati sunt interpolandi, juxta doctrinam Wallisii prop. 172 seqq. Arith. infinit.[3] unde habetur

$$\sqrt{n} \text{ seu } \sqrt{\frac{a}{a-b}} = 1 + \frac{b}{2a} + \frac{1\cdot 3bb}{2\cdot 4aa} + \frac{1\cdot 3\cdot 5b^3}{2\cdot 4\cdot 6a^3} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7b^4}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8a^4} \ \&c.$$

$$\& \ \sqrt{C.n} \text{ seu } \sqrt{C.\,\frac{a}{a-b}} = 1 + \frac{b}{3a} + \frac{1\cdot 4bb}{3\cdot 6aa} + \frac{1\cdot 4\cdot 7b^3}{3\cdot 6\cdot 9a^3} + \frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot 10b^4}{3\cdot 6\cdot 9\cdot 12a^4} \ \&c.$$

$\sqrt{n^3}$ seu $n\sqrt{n}$ (cujus potestatis exponens est $1\frac{1}{2}$)

$$= 1 + \frac{3b}{2a} + \frac{3\cdot 5bb}{2\cdot 4aa} + \frac{3\cdot 5\cdot 7b^3}{2\cdot 4\cdot 6a^3} + \frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9b^4}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8a^4} \ \&c.$$

& sic consequenter.

Coroll.1. Si ponatur $b = a$, erit

$$\infty = \sqrt{n} = \sqrt{\frac{a}{a-b}} = \sqrt{\frac{a}{a-a}} = \sqrt{\frac{a}{0}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8} \&c.$$

quod & sic patet: Quia series harmonica

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1\cdot 2}{2\cdot 3} + \frac{1\cdot 2\cdot 3}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}$$

hoc est, $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+ \ldots = \infty$, erit multo fortius illa $= \infty$, utpote cujus termini singulos suos factores (excepto primo) majores habent singulis factoribus homologis hujus; unde & productum (ipse terminus) majus erit, adeoque productorum summa (ipsa series).

Schol.: Ultimus terminus $\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot \&c.\cdot \infty - 1}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot \&c.\cdot \infty} = 0$, nam si quantus esset, etiam hic foret quantus $\dfrac{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot \&c.\cdot \infty}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot \&c.\cdot \infty + 1}$, utpote cujus singuli factores singulis

3 Cf. la note 3 à Op. CI, p. 129 h.v. (N.D.L.R.)

homologis factoribus praecedentis termini sunt majores; Ergo et utriusque productum

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot \&c.}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot \&c.}\times\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot \&c.}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot \&c.\cdot\infty-1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot \&c.\cdot\infty}=\frac{1}{\infty}=0$$

quantitas foret, quod absurdum.

Cor. 2. Si $\sqrt{n}$ sit quantitas rationalis, et tum per ejusmodi seriem exprimetur. Eodem quoque pacto ostenditur, fore

$$1+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1\cdot 4}{3\cdot 6}+\tfrac{1\cdot 4\cdot 7}{3\cdot 6\cdot 9}+\tfrac{1\cdot 4\cdot 7\cdot 10}{3\cdot 6\cdot 9\cdot 12}\,\&c.=\infty,$$

& postremum terminum $= 0$.

In genere $\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{a\cdot a+c}{a+b\cdot a+b+c}+\dfrac{a\cdot a+c\cdot a+2c}{a+b\cdot a+b+c\cdot a+b+2c}\,\&c.=\infty,$

quotiescunque $a+c \sqsubset a+b$, seu $c \sqsubset b$, quia

$$\frac{a}{a+b}+\frac{a\cdot a+b}{a+b\cdot a+b+c}+\frac{a\cdot a+b\cdot a+b+c}{a+b\cdot a+b+c\cdot a+b+2c}\,\&c.$$
$$=\left(\frac{a}{a+b}+\frac{a}{a+b+c}+\frac{a}{a+b+2c}\,\&c.=\right)\infty,$$

cujus tamen singuli termini minores sunt singulis illius ob $b \sqsupset c$; at si $b \sqsubset c$, summa est finita: ex. gr. series

$$1+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1\cdot 2}{3\cdot 4}+\tfrac{1\cdot 2\cdot 3}{3\cdot 4\cdot 5}+\tfrac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}+\tfrac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}\,\&c.=\tfrac{1}{3}+\tfrac{1\cdot 2}{3\cdot 4}+\tfrac{1\cdot 2}{4\cdot 5}+\tfrac{1\cdot 2}{5\cdot 6}+\tfrac{1\cdot 2}{6\cdot 7}=$$
$$\tfrac{1}{3}+\tfrac{2}{3}\left[+\tfrac{2}{4}\right]+\tfrac{2}{5}+\tfrac{2}{6}+\tfrac{2}{7}\,\&c.-\tfrac{2}{4}-\tfrac{2}{5}-\tfrac{2}{6}-\tfrac{2}{7}\,\&c.=\tfrac{1}{3}+\tfrac{2}{3}=1.$$

{*Aliter ita*: Fiat primus denominator 2do numeratori aequalis eritque:

$$1+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1\cdot 3}{3\cdot 5}+\tfrac{1\cdot 3\cdot 5}{3\cdot 5\cdot 7}\,\&c.=1+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{7}+\&c.=\infty$$

unde fortius

$$1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}+\tfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}=\infty$$

ob denominatores minores.}[4]

4 Le passage entre accolades { } a été ajouté dans la marge (N.D.L.R.)

Med. CLXXV

Invenire rationem y ad x applicatae ad abscissam in curvatura laminae,[1] **cujus aequatio differentialis est $dy = \dfrac{xx\,dx}{\sqrt{a^4 - x^4}}$**

Ms UB Basel L I a 3, pp. 213–214 [TP: 11/VI/1691, TA: V/1692]

Vid. §. [ ][2]

Convertantur potestates quantitatis $\dfrac{x^4}{a^4 - x^4}$ in series (ut factum propos. praeced.) hoc pacto:

Expon. potest.	Potest.
0	$1 = 1 + 0 + 0 + 0 + 0$ &c.
$\frac{1}{2}$	$\dfrac{xx}{\sqrt{a^4 - x^4}} = \dfrac{xx}{aa} + \dfrac{1x^6}{2a^6} + \dfrac{1\cdot 3x^{10}}{2\cdot 4a^{10}} + \dfrac{1\cdot 3\cdot 5x^{14}}{2\cdot 4\cdot 6a^{14}} + \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7x^{18}}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8a^{18}}$ &c.
1	$\dfrac{x^4}{a^4 - x^4} = \dfrac{x^4}{a^4} + \dfrac{x^8}{a^8} + \dfrac{x^{12}}{a^{12}} + \dfrac{x^{16}}{a^{16}} + \dfrac{x^{20}}{a^{20}}$ &c.
$1\frac{1}{2}$	
2	$\dfrac{x^8}{\Box\, a^4 - x^4} = \dfrac{x^8}{a^8} + \dfrac{2x^{12}}{a^{12}} + \dfrac{3x^{16}}{a^{16}} + \dfrac{4x^{20}}{a^{20}} + \dfrac{5x^{24}}{a^{24}}$ &c.
3	$\dfrac{x^{12}}{\text{C. } a^4 - x^4} = \dfrac{x^{12}}{a^{12}} + \dfrac{3x^{16}}{a^{16}} + \dfrac{6x^{20}}{a^{20}} + \dfrac{10x^{24}}{a^{24}} + \dfrac{15x^{28}}{a^{28}}$ &c.

Hae series interpolentur inter 0 & 1.$^{\text{am}}$ potestatem, [ut] habeatur potestas dimidia

1 Cf. Op. CI, Prop. LVI et LVII (pp. 132–134 h.v.).

2 La référence manque à cause de la détérioration du papier du manuscrit. Elle aurait sans doute dû renvoyer à Med. CLXX. Cette *Meditatio* aussi, comme la précédente, a été envoyée par Bernoulli à Leibniz en mars 1696 (cf. Jac. B. *Briefe*, p. 83).

$$\frac{xx}{\sqrt{a^4-x^4}} = \frac{xx}{aa} + \frac{1x^6}{2a^6} + \frac{1\cdot 3x^{10}}{2\cdot 4a^{10}} + \frac{1\cdot 3\cdot 5x^{14}}{2\cdot 4\cdot 6a^{14}} \;\&\text{c.}$$

q[uare] $dy = \dfrac{xx\,dx}{\sqrt{a^4-x^4}} = \dfrac{xx\,dx}{aa} + \dfrac{1x^6dx}{2a^6} + \dfrac{1\cdot 3x^{10}dx}{2\cdot 4a^{10}}$ &c.

eorumque integralia,

$$y = \frac{x^3}{3 \text{ in } aa} + \frac{1x^7}{7 \text{ in } 2a^6} + \frac{1\cdot 3x^{11}}{11 \text{ in } 2\cdot 4a^{10}} + \frac{1\cdot 3\cdot 5x^{15}}{15 \text{ in } 2\cdot 4\cdot 6[a^{14}]} \;[\&\text{c.}]$$

hinc si $x = a$ & utraque $= 1$ erit

$$y = \frac{1}{3} + \frac{1}{2 \text{ in } 7} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4 \text{ in } 11} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6 \text{ in } 15} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8 \text{ in } 19} \;\&\text{c.}$$

sic spatium, cujus rectificatione construitur curva elastica, est

$$ay = \frac{x^3}{3 \text{ in } a} + \frac{1x^7}{7 \text{ in } 2a^5} + \frac{1\cdot 3x^{11}}{11 \text{ in } 2\cdot 4a^9} + \frac{1\cdot 3\cdot 5x^{15}}{15 \text{ in } 2\cdot 4\cdot 6a^{13}} \;\&\text{c.}$$

Haud absimiliter invenitur ratio s ad x, ipsius curvae ad abscissam per seriem; nam reperitur

$$ds = \frac{aa\,dx}{\sqrt{a^4-x^4}} = dx + \frac{x^4dx}{2a^4} + \frac{1\cdot 3x^8dx}{2\cdot 4a^8} + \frac{1\cdot 3\cdot 5x^{12}dx}{2\cdot 4\cdot 6a^{12}} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7x^{16}dx}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8a^{16}} \;\&\text{c.}$$

adeoque

$$s = x + \frac{x^5}{2 \text{ in } 5a^4} + \frac{1\cdot 3x^9}{2\cdot 4 \text{ in } 9a^8} + \frac{1\cdot 3\cdot 5x^{13}}{2\cdot 4\cdot 6 \text{ in } 13a^{12}} \;\&\text{c.}$$

& posito $x = a = 1$, reperitur

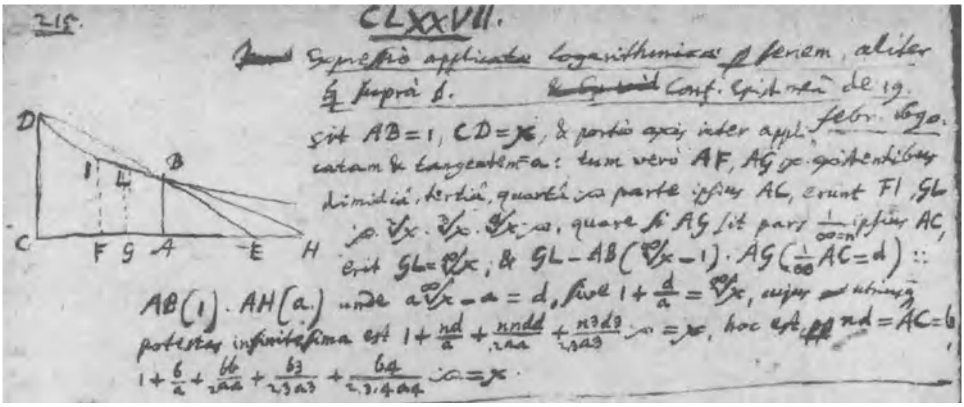
$$s = 1 + \frac{1}{2 \text{ in } 5} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4 \text{ in } 9} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6 \text{ in } 13} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8 \text{ in } 17} \;\&\text{c.}$$

Med. CLXXVII

Expressio applicatae Logarithmicae per seriem, aliter quam supra § [..][1]

Ms UB Basel L I a 3, p. 215 [TP: 11/VI/1691, TA: V/1692]

Conf. Epist. meam[2] *de 19. febr. 1690.*



Sit AB = 1, CD = x, et portio axis inter applicatam et tangentem = a: tum vero AF, AG, &c. existentibus dimidia, tertia, quarta &c. parte ipsius AC erunt FI, GL, &c. $\sqrt[2]{x}, \sqrt[3]{x}, \sqrt[4]{x}$ &c., quare si AG sit pars $\dfrac{1}{\infty = n}$ ipsius AC, erit GL $= \sqrt[\infty]{x}$,

& $\qquad$ GL $-$ AB $(\sqrt[\infty]{x} - 1)$. AG $(\frac{1}{\infty}$ AC $= d)$ :: AB (1). AH (a),

unde $a\sqrt[\infty]{x} - a = d$, sive $1 + \dfrac{d}{a} = \sqrt[\infty]{x}$, cujus utriusque potestas infinitesima est

$$1 + \frac{nd}{a} + \frac{nndd}{2aa} + \frac{n^3d^3}{2\cdot 3a^3}\ \&c. = x,$$

hoc est, propter $nd = \mathrm{AC} = b$,

$$1 + \frac{b}{a} + \frac{bb}{2aa} + \frac{b^3}{2\cdot 3a^3} + \frac{b^4}{2\cdot 3\cdot 4a^4}\ \&c. = x.$$

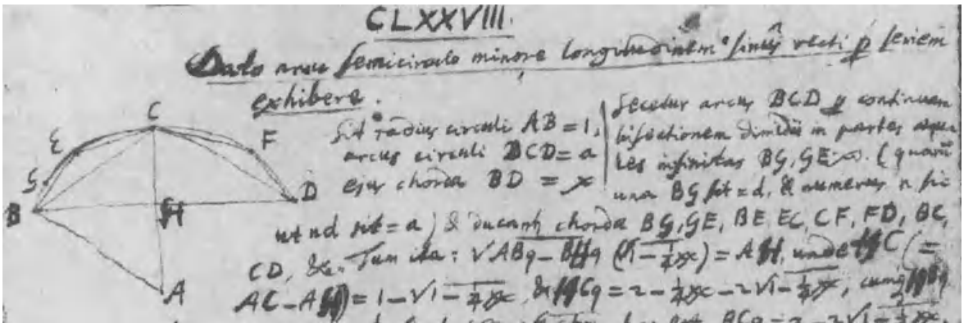
1 Cf. Op. CI, Prop. LIX («Aliter»), pp. 138–139 h.v.
Il semble que la référence du titre ait dû se rapporter à Med. CL (pp. 202–205 h.v.)

2 Il ne peut guère s'agir que de l'article Op. XL (pp. 160–163 h.v.), envoyé, suivant l'usage de Bernoulli, par lettre à Otto Mencke, l'éditeur des *Acta Eruditorum*.

Med. CLXXVIII

Dato arcu semicirculo minore longitudinem sinus recti per seriem exhibere[1]

Ms UB Basel L I a 3, pp. 215–219 [TP: 11/VI/1691, TA: V/1692]



Sit radius circuli AB $= 1$,
arcus circuli BCD $= a$
ejus chorda BD $= x$

Secetur arcus BCD per continuam bisectionem dimidii in partes aequales infinitas BG, GE &c. (quarum una BG sit $= d$, & numerus n, sic ut nd sit $= a$) & ducantur chordae BG, GE, BE, EC, CF, FD, BC, CD, &c.

Tum ita: $$\sqrt{ABq - BHq}\left(\sqrt{1-\tfrac{1}{4}\,xx}\right) = AH,$$

unde $$HC\ (= AC - AH) = 1 - \sqrt{1-\tfrac{1}{4}\,xx},$$

& $$HCq = 2 - \tfrac{1}{4}\,xx - 2\sqrt{1-\tfrac{1}{4}\,xx},$$

cumque HBq sit[2] $\left[\tfrac{1}{4}xx\right]$, erunt duo $\square^{ta}$ simul, hoc est

$$BCq = 2 - 2\sqrt{1-\tfrac{1}{4}\,xx},$$

1 Cf. Op. XCVII, pp. 164–172 h.v., et pp. 26–31 de l'*Introduction.*

2 Dans le manuscrit, il y a par *lapsus* évident «$\frac{1}{4xx}$» (N.D.L.R.)

& ipsa BC chorda arcus dimidii[3]

$$= \sqrt{2-2\sqrt{1-\tfrac{1}{4}xx}} \left[= \sqrt{2-\sqrt{4-xx}}\right].$$

Si jam ipsa haec chorda habeatur pro chorda arcus integri, & quaeratur chorda arcus dimidii BE, tantum pro x substituenda $\sqrt{2-2\sqrt{1-\tfrac{1}{4}xx}}$, ut fiat

$$BE = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{4-xx}}},$$

sic sumendo hanc pro x, & BG pro chorda arcus dimidii, erit

$$BG = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{4-xx}}}},$$

& si BG denuo bisecetur, erit chorda dimidii

$$= \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{4-xx}}}}}:$$

quocirca si haec bisectio continuari intelligatur in infinitum, et sit partis infinitesimae chorda BG, quae cum ipso Arcu BG coincidit, erit BG sive

$$d = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2\ \text{\&c.}\sqrt{4-xx}}}}}}}}$$

& $$dd = 2 - \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2\ \text{\&c.}\ \sqrt{4-xx}}}}},$$

& $$2 - dd = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2\ \text{\&c.}\ \sqrt{4-xx}}}}}$$

ejusque $\square^{\text{tum}}$ $$4 - 4dd + d^4 = 2 + \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2\ \text{\&c.}\ \sqrt{4-xx}}}},$$

& si demas utrinque 2, erit

$$2 - 4dd + d^4 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2\ \text{\&c.}\ \sqrt{4-xx}}}};$$

3 Dans l'équation qui suit, la dernière expression a été ajoutée en marge (N.D.L.R.)

ab hujus $\square^{\text{to}}$ deme iterum 2, & hoc fiat continuo in infinitum, eritque $\square^{\text{tum}}$ ultimum $= 4-xx$, quare demto 4 si signa omnia invertas, erit residuum $= xx$.

En Schema:

Expon.	Potest.
1	$2 - dd \quad = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2\ \&c.\ \sqrt{4-xx}}}}}}}$
2	$2 - 4dd + d^4 \quad = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2\ \&c.\ \sqrt{4-xx}}}}}}$
4	$2 - 16dd + 20d^4 - 8d^6 + d^8 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2\ \&c.\ \sqrt{4-xx}}}}}$
8	$2 - 64dd + 336d^4 - 672d^6 + 660d^8 - 352d^{10} + 104d^{12} - 16d^{14} + d^{16}$ $= \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2\ \&c.\ \sqrt{4-xx}}}}$
n	$4 - nndd + \frac{n^4d^4}{3\cdot 4} - \frac{n^6d^6}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} + \frac{n^8d^8}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8} - \frac{n^{10}d^{10}}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}\ \&c. = 4-xx$

Notandum:

1. Exponentes esse 1,2,4,8,16 &c. non 1,2,3,4,5 &c., quia pro oblatione unius signi radicalis numerus chordarum duplo augetur.
2. Coëfficientes secundorum terminorum sunt exponentium $\square^{\text{ti}}$, tertiorum vero, quartorum, quintorum &c. habent hos quadratos pro differentiis secundis, 4tis, sextis, h.e. sunt quadratorum figurati seu nascuntur ex quadratorum repetita additione, ut sequens laterculus ostendit:

□ series

	2 +		3 +		4 +		5 +		6 +		7 +		8 +		9 +
Exponentes	□^{ta}	Fig. 1	Fig. 2	Fig. 3	Fig. 4	Fig. 5	Fig. 6	Fig. 7	Fig. 8	Fig. 9	Fig. 10	Fig. 11	Fig. 12	Fig. 13	Fig. 14
1 +	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2 +	4	5	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	9	14	6	7	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4 +	16	30	20	27	8	9	1	1	0	0	0	0	0	0	0
	25	55	50	77	35	44	10	11	1	1	0	0	0	0	0
	36	91	105	182	112	156	54	65	12	13	1	1	0	0	0
	49	140	196	378	294	450	210	275	77	90	14	15	1	1	0
8 +	64	204	336	714	672	1122	660	935	352	442	104	119	16	17	1
n	nn	$\frac{n^3}{3}$	$\frac{n^4}{3\cdot 4}$	$\frac{n^5}{3\cdot 4\cdot 5}$	$\frac{n^6}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}$	$\frac{n^7}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}$	$\frac{n^8}{\&c.}$								

{Si[4] numerus terminorum finitus, erunt optati

Fig. 2. $\frac{n-1\cdot n\cdot n+1\cdot 2n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = \frac{nn\cdot nn-1}{3\cdot 4}$

Fig. 4. $\frac{n-2\cdot n-1\cdot n\cdot n+1\cdot n+2\cdot 2n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} = \frac{nn\cdot nn-1\cdot nn-4}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}$

Fig. 6. $\frac{n-3\cdot n-2\cdot n-1\cdot n\cdot n+1\cdot n+2\cdot n+3\cdot 2n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8} = \frac{nn\cdot nn-1\cdot nn-4\cdot nn-[9]}{[3\cdot 4 \ldots\ldots 8]}$}

Ergo si Exponens terminorum sit n, erit ultimus terminorum □^{torum}, nn, postremus vero Figuratorum 1 gr. (quia est aggregatum omnium □^{torum}) totidem ipsi nn aequalium subtriplus existit, saltem ubi numerus terminorum infinitus ponitur, adeoque $\frac{n^3}{3}$: pariter postremus Fig. 2 gr. cum sit aggaregatum totius seriei Fig. 1 gr. erit totidem ultimo eorum sc. $\frac{n^3}{3}$ aequalium subquadruplus,

4 Le passage entre accolades { } a été ajouté plus tard dans la marge de la page 216 du manuscrit; la dernière équation est incomplète par suite de l'usure du papier (N.D.L.R.)

adeoque $\frac{n^4}{3\cdot 4}$, et sic porro. Quod si quis neget, aggregatum harum serierum ad totidem ultimis terminis aequales has habere rationes, poterit sic convinci: Discerpatur series $\square^{\text{torum}}$ in duas Trigonalium series, et ex harum additione continua fiant binae series Pyramidalium, hinc binae Trianguli-Pyram., Pyramidi-Pyramid. &c.: et harum quaerantur termini ultimi per rationes quas habent earum aggregata ad totidem ultimo aequales (de his enim constat). Sic bini postremi juncti nostros figuratos efficiunt. Ex. gr.

	□ta		Trigon.			Pyramid:				Fig. 1 gr.	
	1	=	1	+	0	1	+	0	=	1	&c.
	4	=	3	+	1	4	+	1	=	5	
	9	=	6	+	3	10	+	4	=	14	
	16	=	10	+	6	20	+	10	=	30	
	25	=	15	+	10	35	+	20	=	55	
	36	=	21	+	15	56	+	35	=	91	
n	nn	=	$\frac{nn}{2}$	+	$\frac{nn}{2}$	$\frac{n^3}{2\cdot 3}$	+	$\frac{n^3}{2\cdot 3}$	=	$\frac{n^3}{3}$	

Idcirco cum hoc modo procedendo reperiamus

$$4 - nndd + \frac{n^4d^4}{3\cdot 4} - \frac{n^6d^6}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} + \frac{n^8d^8}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}\ \&c. = 4 - xx,$$

sive $$xx = nndd - \frac{n^4d^4}{3\cdot 4} + \frac{n^6d^6}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} - \frac{n^8d^8}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}\ \&c.$$

atque nd sit $= a$, erit

$$xx = aa - \frac{a^4}{3\cdot 4} + \frac{a^6}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} - \frac{a^8}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8} + \frac{a^{10}}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}\ \&c.$$

Aliter: quaerendo non ex chorda arcus dupli chordam arcus dimidii, sed reciproce ex hac illam.

Sit chorda BC $= c$, & BD $= x$, eritque BCq (cc) – BHq $(\frac{1}{4}\,xx)$ = CHq, unde

$$\mathrm{CH} = \sqrt{cc - \tfrac{1}{4}\,xx},\ \&\ \mathrm{AH} = 1 - \sqrt{cc - \tfrac{1}{4}\,xx},$$

& $$\mathrm{AHq}\,(1 + cc - \tfrac{1}{4}xx - \sqrt{4cc - xx}) + \mathrm{BHq}\,(\tfrac{1}{4}xx) =$$
$$= 1 + cc - \sqrt{4cc - xx} = \mathrm{ABq} = 1,$$

unde $cc = \sqrt{4cc - xx}$, & $c^4 = 4cc - xx$, & $xx = 4cc - c^4$

seu $$xx = \overline{4 - cc}\ \text{in}\ cc:$$

quae constans formula est sequenti indagini inserviens: quare si BG pars infinitesima arcus BCD (ejusve chorda, quae in infinite parvis arcui aequivalet) sit d aut ejus $\square^{\text{tum}}$ dd, erit $\square^{\text{tum}}$ chordae arcus dupli BE (seu 2 BG subtendentis) $4dd - d^4$, & si hoc sumatur pro cc $\square^{\text{to}}$ chordae arcus simpli, erit $\square^{\text{tum}}$ chordae arcus dupli, hoc est, quadrupli BG

$$= 4 - 4dd + d^4\ \text{in}\ 4dd - d^4 = 16dd - 20d^4 + 8d^6 - d^8;$$

si jam hoc sumatur pro cc $\square^{\text{to}}$ chordae arcus simpli, & per formulam quaeratur $\square^{\text{tum}}$ chordae arcus dupli, hoc est, octupli BG, & hoc fiat continuo in infinitum, erit $\square^{\text{tum}}$ ultimum $\square^{\text{tum}}$ chordae BD ceu infinitos arcus BG subtendentis juxta laterculum; quod in essentialibus cum praecedenti prorsus convenit, unde si pro nd ponatur a, reperitur ut ibi,

$$xx = aa - \frac{a^4}{3\cdot 4} + \frac{a^6}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} - \frac{a^8}{3\cdot 4\ldots 8} + \frac{a^{10}}{3\cdot 4\ldots 10}\ \&\text{c.}$$

Arcus BC subtensi	a chorda, cujus $\square^{\text{tum}}$ est
1 ..	dd
2 ..	$4dd + d^4$
4 ..	$16dd - 20d^4 + 8d^6 - d^8$
8 ..	$64dd - 336d^4 + 672d^6 - 660d^8 + 352d^{10} - 104d^{12} + 16d^{14} - d^{16}$
n ..	$nndd - \frac{n^4d^4}{3\cdot 4} + \frac{n^6d^6}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} - \frac{n^8d^8}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8} + \frac{n^{10}d^{10}}{3\cdot 4\ldots 9\cdot 10} - \frac{n^{12}d^{12}}{3\cdot 4\ldots 12} + \frac{n^{14}d^{14}}{3\cdot 4\ldots 14} - \frac{n^{16}d^{16}}{3\cdot 4\ldots 16}\ \&\text{c.} = xx.$

Inventa chorda x, eius dimidium dabit sinum dimidii arcus. Hic sinus immediate quoque reperiri potest ex suo arcu DC, si quaeratur ex sinu arcus dimidii sinus arcus dupli. Hic si dicatur x, ille s, invenitur $xx = 4ss - 4s^4$, juxta quam formulam procedendo nascitur similis laterculus, nisi quod coefficientes seriei 2dae sint 4pli, tertiae 16pli, quartae 64pli, quintae 256pli &c. coefficientium homologorum terminorum praecedentis laterculi, unde (si a sit arcus, x ejus sinus) reperitur,

$$xx = aa - \frac{4a^4}{3\cdot 4} + \frac{16a^6}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} - \frac{64a^8}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8} + \frac{256a^{10}}{3\cdot 4\ldots 9\cdot 10}\ \&\text{c.}$$

vel $$xx = aa - \frac{a^4}{3} + \frac{2a^6}{3\cdot 3\cdot 5} - \frac{a^8}{3\cdot 3\cdot 5\cdot 7} + \frac{2a^{10}}{3\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}\ \text{etc.}$$

{& $$x = a - \frac{a^3}{2\cdot 3} + \frac{a^5}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \frac{a^7}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}\ \&\text{c.}$$ }[5]

Quod si desideres, uti quadratum chordae, sic ipsam chordam immediate per seriem exhibere, elevetur series illa

$$xx = aa - \frac{a^4}{3\cdot 4} + \frac{a^6}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} - \frac{a^8}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}\ \&\text{c.}$$

quae quadratum hoc exhibet, ad altiores potestates, methodo[6] propositionum 174 & 175, & dilligenter attendantur, qua lege progrediantur terminorum numeratores, postquam illi cognomines facti fuerint, ut ostendit laterculus:

5 Cette dernière équation a été ajoutée en marge (N.D.L.R.)
6 Cf. Med. CLXXIV, pp. 230–232 h.v., et Med. CLXXV, pp. 233–234 h.v. (N.D.L.R.)

Expon.	Potest
0	$1 = 1 - 0 + 0 - 0 + 0 \quad \&c.$
$\frac{1}{2}$	$x = a - \frac{a^3}{1\cdot2\cdot3\cdot4} + \frac{3a^5}{2\cdot4\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6} - \frac{3a^7}{3\cdot8\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8} + \frac{5a^9}{4\cdot3\cdot2\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10} \quad \&c.$
1	$xx = aa - \frac{1a^4}{1\cdot3\cdot4} + \frac{2a^6}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6} - \frac{3a^8}{3\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8} + \frac{4a^{10}}{4\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10} \quad \&c.$
2	$x^4 = a^4 - \frac{2a^6}{1\cdot3\cdot4} + \frac{9a^8}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6} - \frac{34a^{10}}{3\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8} + \frac{124a^{12}}{4\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10} \quad \&c.$
3	$x^6 = a^6 - \frac{3a^8}{1\cdot3\cdot4} + \frac{21a^{10}}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6} - \frac{128a^{12}}{3\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8} + \frac{780a^{14}}{4\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10} \quad \&c.$
4	$x^8 = a^8 - \frac{4a^{10}}{1\cdot3\cdot4} + \frac{38a^{12}}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6} - \frac{320a^{14}}{3\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8} + \frac{2742a^{16}}{4\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10} \quad \&c.$
5	$x^{10} = a^{10} - \frac{5a^{12}}{1\cdot3\cdot4} + \frac{60a^{14}}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6} - \frac{645a^{16}}{3\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8} + \frac{7130a^{18}}{4\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10} \quad \&c.$

Numeratores terminorum 1 seriei perpend. sunt unitates, 2dae numeri naturales 0, 1, 2, 3, 4 &c. 3tiae 0, 2, 9, 21 &c. 4tae 0, 3, 34, 128 &c. qui quidem non sunt trigonales, pyramidales &c. ut propos. 174 & 175, sed tamen eorum analogi utpote quorum differentiae 2dae, 3tiae aequantur, unde ad ipsorum homologos figuratos reduci possunt, & indagari proprius cujusque seriei character, cujus beneficio omnes illius termini inveniantur, & consequenter etiam interpolati, si pro charactere seu exponente ponatur $\frac{1}{2}$ &c.

Exemplum esto in sola serie 3tia 0, 2, 9, 21 &c.

	Expon.	Term.	Diff. 1	Diff. 2		Diff. 2	Diff. 1	Term.	Expon.	
	0	0			Hinc si pro			0	0	
	1	2	$2=b$		numeris		b	b	1	
	2	9	7	$5=a$	ponas	a	$b+a$	$2b+a$	2	
n	3	21	12	5	litteras	a	$b+2a$	$3b+3a$	3	n
	4	38	17	5		a	$b+3a$	$4b+6a$	4	
	5	60	22	5		a	$b+4a$	$5b+10a$	5	

Optatus terminus $= nb + \frac{\overline{n \cdot n - 1a}}{2}$ = (substitutis numeris) $= \frac{5nn - n}{2}$ character seriei: jam si n valeat $\frac{1}{2}$, erit termini numerator inter expon. 0 & 1 interpolandi $\frac{3}{8}$, quare ipse terminus

$$\frac{\frac{3}{8}\,a^5}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} = \frac{3\,a^5}{8\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} = \frac{a^5}{1920}:$$

& sic in reliquis, unde invenitur

$$x = a - \frac{a^3}{24} + \frac{a^5}{1920} - \frac{a^7}{322560} + \frac{a^9}{92897280}$$
$$= \{a - \frac{a^3}{4\cdot 6} + \frac{a^5}{4\cdot 6\cdot 8\cdot 10} - \frac{a^7}{4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12\cdot 14}\ \&c.\}^7$$

Quae series ulterius continuari posset, si foret opus, at hi 5 termini sufficiunt ad Tabulum sinuum condendam exactissime ad radium 10000000, nam quod per reliquos terminos his 5 additur vel demitur, non importat decies millionesimam, h.e. unam earum partium, in quas divisus supponitur radius, ut quo arcus minor est, cujus sinus vel chorda quaeritur, hoc pauciores termini sufficiunt; np. si sinus 10 primorum aut chorda 20 graduum quaeratur, tres sufficiunt {si chorda 5 gr., sufficiunt duo}[8]. Opus autem tantum est, quaerere sinus arcuum semiquadrante minorum, nam horum complementa ex his facile habentur. Quantum autem hoc subsidium in practica constructione Canonis!

{NB. arcus ⊙li 57°17′44″48‴ $\frac{2}{5}$ = radio quam proxime.}[9]

7 La dernière expression a été ajoutée dans la marge (N.D.L.R.)
8 La phrase entre accolades { } a été ajoutée en marge (N.D.L.R.)
9 Cette remarque a été ajoutée dans la marge de la p. 219 du manuscrit, vis-à-vis du titre de Med. CLXXIX (N.D.L.R.)

Med. CCXII

Creditor in bonis habet *a*, quae alteri foenori exponit, ea lege, ut sibi pro sui sustentatione quotannis reddat *c*; nempe usuram proportionalem, quam pars residua sortis elapso anno parere potuit, & insuper partem sortis tantam, quae una cum dicta usura summam *c* constituat. Supponimus autem sortem *a* auctam usura primi anni esse *b*. Quaeritur, quamdiu Creditor ex hac sua sorte victitare possit?[1]

Ms UB Basel L I a 3, pp. 260–261 [TP: 27/XI/1693, TA: XII/1695] – Werke 3, pp. 97–98

Quia Creditori finito primo anno redditur c, erit sortis residuum $b-c$; unde fiat,

$$a.b :: b - c.\frac{bb-bc}{a}$$

sors una cum usura finito anno secundo; hinc deme c eritque $\frac{bb-bc-ac}{a}$ residuum sortis finito 2do anno: Fiat iterum

$$a.b :: \frac{bb-bc-ac}{a}.\frac{b^3-bbc-abc}{aa},$$

deme c, eritque $\frac{b^3-bbc-abc-aac}{aa}$ resid. sortis finito 3^{tio}.

$$a.b :: \frac{b^3-bbc-abc-aac}{aa}.\frac{b^4-b^3c-abbc-aabc}{a^3}$$

deme c, eritque res. sort. finito 4^{to} $\frac{b^4-b^3c-abbc-aabc-a^3c}{a^3}$ atque ita sortis residuum finitis omnibus x annis

$$\frac{b^x-b^{x-1}c-ab^{x-2}c-aab^{x-3}c-a^3b^{x-4}c \text{ \&c. usque ad } a^{x-1}c}{a^{x-1}} = 0:$$

unde $\quad b^x = b^{x-1}c + ab^{x-2}c + aab^{x-3}c + a^3b^{x-4}c$ &c. $a^{x-1}c$

$$= \text{(ob progress. Geometr.)}\ \frac{b^xc-a^xc}{b-a},$$

sumptoque $b-a=c-f$, eritque

$$b^x = \frac{c\cdot b^x-c\cdot a^x}{c-f};$$

1 Cf. Op. LXXIV, *Epimetron* XIV (p. 106 h.v.)

adeoque $c \cdot b^x - f \cdot b^x = c \cdot b^x - c \cdot a^x$, hoc est, $f \cdot b^x = c \cdot a^x$, h.e. $b^x \cdot a^x :: c \cdot f$, h.e. $x\mathrm{L}b - x\mathrm{L}a = \mathrm{L}c - \mathrm{L}f$, h.e.

$$x = \frac{\mathrm{L}c - \mathrm{L}f}{\mathrm{L}b - \mathrm{L}a}.$$

Sit pro speciali exemplo sors $a = 1000$, usura a 4 *Perc.* adeoque $b = 1040$, annua pensio $c = 100$, adeoque quod post primum annum sorti demendum: $f = 60$: unde[2]

$$\begin{array}{rcl|rcl} \mathrm{L}c & = & 2.0000000 & \mathrm{L}b & = & 3.0170[333] \\ \mathrm{L}f & = & \underline{1.7781512} & \mathrm{L}a & = & \underline{3.0000[000]} \\ \mathrm{L}c - \mathrm{L}f & = & 0.2218488 & \mathrm{L}b - \mathrm{L}a & = & 0.0170333 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 170333\,\big)\ 2218488\ \big(\ 13\,\frac{4159}{170333} \\ \underline{170333}\qquad\qquad\quad \\ 515158\qquad\qquad\quad \\ \underline{510999}\qquad\qquad\quad \\ 4159\qquad\qquad\quad \end{array}$$

h.e. 13 anni & fere 9 dies.

NB. Problema idem est cum illo, quo quaeritur, quot antliae haustibus aër recipientis ad datum raritatis gradum perducendus sit, vid. Disput. 2 de Serieb. Infinitis[3].

Ponendo pro	Cavitate Recip:	Sortem integram	a
	Cavit. Recip. & Antliae simul.	Sortem cum usura	b
	Densitate aëris naturalis.	Pensionem annuam	c
	Densitate aëris optata.	Id quod primo anno sorti demendum	f.

2 Les derniers chiffres de L*b* et de L*a* sont masqués par une tache d'encre (N.D.L.R.)
3 La référence est à Op. LIV, *Epimetron* X (pp. 82–83 h.v.)

Med. CCXVII

Reperire limites serierum meae inventionis quibus denotantur quantitates transcendentales, ad §. CLXXIV &c.[1]

Ms UB Basel L I a 3, p. 264 [TP: 27/XI/1693, TA: XII/1695]

Ex gr. Si limites sint determinandi serierum, quibus exprimitur Curva Elastica, ejusque Axis, np.:

$$\left.\begin{array}{l} 1+\frac{1}{2,\mathbf{5}}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4,\mathbf{9}}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6,\mathbf{13}}+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8,\mathbf{17}}\ \text{\&c: ut \&} \\[2ex] \frac{1}{3}+\frac{1}{2,\mathbf{7}}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4,\mathbf{11}}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6,\mathbf{15}}+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8,\mathbf{19}}\ \text{\&c:} \end{array}\right\}\ \text{vid.}^{2}\ \text{§. CLXXV.}$$

sume quantitatem, cujus integrale haberi potest (datis transcendentalibus $\frac{aa\,dx}{\sqrt{a^4-x^4}}$, & $\frac{xx\,dx}{\sqrt{a^4-x^4}}$, affinem; puta $\frac{x^3dx}{\sqrt{a^4-x^4}}$, cujus integrale est $\frac{aa-\sqrt{a^4-x^4}}{2}$) eamque, ut ibi docetur, in seriem resolve, cujus deinde seriem integralem quaere, tandemque pro x & a unitatem pone; sic emerget series

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{2,\mathbf{8}}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4,\mathbf{12}}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6,\mathbf{16}}+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8,\mathbf{20}}\ \text{\&c:}$$

aequalis proinde $\frac{aa-\sqrt{a^4-x^4}}{2}=\frac{1}{2}$ seu 0.5000.

Collige jam singularum serierum primos terminos aliquousque in unam summam; ex. gr. 10 primos terminos, qui sunt in 1^{ma} serie $1.2207\frac{(\text{inter } 14\ \&\ 22)}{100}$: in 2^{da} serie $0.5102\frac{(\text{inter } 51\ \&\ 61)}{100}$: in tertia $0.4119\frac{483}{32768}$. Hujus ergo reliqui post decimum termini (ad complendum $\frac{1}{2}$ seu 0.5000) continebunt $0.0880\frac{32285}{32768}$ qui numerus additus summae 10 prim. term. in 1 & 2^{da} serie, efficit $1.3088\frac{12}{100}$ & $0.5983\frac{49}{100}$ summis totarum serierum justo minores, ob singulos tertiae seriei terminos minores respondentibus reliquarum terminis.

1 Cf. Op. LVIII, n°. III.16, p. 596 des *Opera* (à publier dans *Werke* 5), et Op. CI, Prop. LVIII (pp. 135–137 h.v.).

2 Cf. Med. CLXXV, pp. 233–234 h.v. (N.D.L.R.)

Deinde quia undecimi termini in 3 istis seriebus sunt

$$\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot11\cdot13\cdot15\cdot17\cdot19}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot10\cdot12\cdot14\cdot16\cdot18\cdot20,\mathbf{41}},\ \frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot\text{——}\ 19}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot\text{——}\ \mathbf{43}},\ \frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot\text{——}\ 19}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot\text{——}\ \mathbf{44}},$$

patet terminum hunc in serie 3^{tia} esse ad eundem in serie prima ut 41 ad 44, & in serie 2^{da}, ut 43 ad 44, sed terminorum sequentium singulos in 3 serie ad correspondentes in reliquis seriebus habere rationem majorem, quam 41 ad 44, & 43 ad 44; unde & summa omnium decimum sequentium in 3 serie, ad summam omnium post decimum in reliquis seriebus majorem rationem habet: adeoque si fiat, ut 41 ad 44, item 43 ad 44, ita summa terminorum post decimum in 3^{tia} serie, nimirum $0.0880\frac{32285}{32768}$ ad $0.0945\frac{46}{100}$ & $0.0901\frac{50}{100}$, erunt hi numeri majores summis terminorum decimum sequentium in 1. & 2. serie: quapropter additi summis 10 priorum, np. ipsi $1.2207\frac{22}{100}$ & $0.5102\frac{61}{100}$, erunt numeri provenientes $1.3152\frac{68}{100}$ & $0.6004\frac{11}{100}$ majores summis dictarum serierum.

Reperiimus ergo limites, quibus summae 1. & 2dae seriei coërcentur: np. 1.$^{\text{mae}}$ seriei $1.3088\frac{12}{100}$ & $1.3152\frac{68}{100}$: 2dae seriei $0.5983\frac{49}{100}$ & $0.6004\frac{11}{100}$; unde prima series major est quam 1.3088, & minor quam 1.3153, seu major quam 1.308, & minor quam 1.316: secunda vero major quam 0.5983, & minor quam 0.6005, seu major quam 0.598 & minor quam[3] 0.601.

$L\ 1:2 = 6.6989700$	$L\ \frac{1\cdot3....9}{2\cdot4....10} = 6.3911005$	$L\ \frac{1\cdot3....15}{2\cdot4....16} = 6.2930986$
$L\ \frac{1\cdot3}{2\cdot4} = 6.5740312$	$L\ \frac{1\cdot3....11}{1\cdot2....12} = 6.3533120$	$L\ \frac{1\cdot3....17}{2\cdot4....18} = 6.2682750$
$L\ \frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6} = 6.4948500$	$L\ \frac{1\cdot3....13}{2\cdot4....14} = 6.3211273$	
$L\ \frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8} = 6.4368580$		

3 Les calculs du tableau qui suit sont écrits dans la marge (N.D.L.R.)

Med. CCLXV

Attollere Infinitinomium ad potestatem indefinitam *m*. Vid.[1] Transact. Anglic. m. Jul. 1697, p. 593

Ms UB Basel L I a 3, pp. 325–327 [TP: IV/1701, TA: XII/1701]

Analysis, qua Cl. Moivre usus fuit ad hoc inventum, haec esse potest: Sit Potestas Infinitinomii

$$\overline{ax+bx^2+cx^3+dx^4+ex^5 \text{ \&c.}}^{\,m} = px^m + qx^{m+1} + rx^{m+2} + sx^{m+3} + tx^{m+4} \text{ \&c.}$$

erunt quoque Logarithmi aequales, np.

$$m\,\mathfrak{l},\overline{ax+bx^2+cx^3+dx^4+ex^5 \text{ \&c.}} = \mathfrak{l},\overline{px^m+qx^{m+1}+rx^{m+2}+sx^{m+3}+tx^{m+4} \text{ \&c.}}$$

differentiandoque ac dividendo per dx,

$$\frac{am+2bmx+3cmxx+4dmx^3+5emx^4 \text{ \&c.}}{ax+bx^2+cx^3+dx^4+ex^5 \text{ \&c.}} =$$

$$= \frac{pmx^{m-1}+q,\overline{m+1},x^m+r,\overline{m+2},x^{m+1}+s,\overline{m+3},x^{m+2}+t,\overline{m+4},x^{m+3} \text{ \&c.}}{px^m+qx^{m+1}+rx^{m+2}+sx^{m+3}+tx^{m+4} \text{ \&c.}}$$

& multiplicando per crucem

$$\left.\begin{array}{llllllllll}
mapx^m & + & 2mbp^{m+1} & + & 3mcpx^{m+2} & + & 4mdpx^{m+3} & + & 5mepx^{m+4} & \text{\&c.}\\
 & + & maq & + & 2mbq & + & 3mcq & + & 4mdq & \text{\&c.}\\
 & & & + & mar & + & 2mbr & + & 3mcr & \text{\&c.}\\
 & & & & & + & mas & + & 2mbs & \text{\&c.}\\
 & & & & & & & + & mat & \text{\&c.}
\end{array}\right\} =$$

$$\begin{array}{llllllllll}
mapx^m & + & \overline{m+1},aqx^{m+1} & + & \overline{m+2},arx^{m+2} & + & \overline{m+3},asx^{m+3} & + & \overline{m+4},atx^{m+4} & \text{\&c.}\\
 & + & mbp & + & \overline{m+1},bq & + & \overline{m+2},br & + & \overline{m+3},bs & \text{\&c.}\\
 & & & + & mcp & + & \overline{m+1},cq & + & \overline{m+2},cr & \text{\&c.}\\
 & & & & & + & mdp & + & \overline{m+1},dq & \text{\&c.}\\
 & & & & & & & + & mep & \text{\&c.}
\end{array}$$

1 Cf. VP I (pp. 175–180 h.v.).
La référence du titre est à l'article de Abraham de Moivre, *A Method of Raising an infinite Multinomial to any given Power, or Extracting any given Root of the same*: Phil. Trans. 230 (July 1697), pp. 619–625 (à la page 593, qui porte le titre du numéro 230, on trouve la table de son contenu, et vis-à-vis, une «figure» avec l'énoncé du théorème discuté par Bernoulli).

& ablatis hinc inde communibus

$$\left.\begin{array}{llllllll} + & mbpx^{m+1} & + & 2mcpx^{m+2} & + & 3mdpx^{m+3} & + & 4mepx^{m+4} \ \&c. \\ & & + & \overline{m-1},bq & + & \overline{2m-1},cq & + & \overline{3m-1},dq \ \&c. \\ & & & & + & \overline{m-2},br & + & \overline{2m-2},cr \ \&c. \\ & & & & & & + & \overline{m-3},bs \ \&c. \end{array}\right\} =$$

$$\begin{array}{llllllll} + & aqx^{m+1} & + & 2arx^{m+2} & + & 3asx^{m+3} & + & 4atx^{m+4} \ \&c. \end{array}$$

conferendo terminos homogeneos, & ponendo (ut debet) $p = a^m$, habetur

$$p = a^m,$$

$$q = \frac{mbp}{a},$$

$$r = \frac{2mcp + \overline{m-1},bq}{2a},$$

$$s = \frac{3mdp + \overline{2m-1},cq + \overline{m-2},br}{3a}$$

$$t = \frac{4mep + \overline{3m-1},dq + \overline{2m-2},cr + \overline{m-3},bs}{4a}$$

$$u = \frac{5mfp + \overline{4m-1},eq + \overline{3m-2},dr + \overline{2m-3},cs + \overline{m-4},bt}{5a}$$

vel suppositis in quavis aequatione valoribus omnium praecedentium

$$p = a^m,$$

$$q = mba^{m-1},$$

$$r = mca^{m-1} + \frac{m,\overline{m-1}}{2}bba^{m-2},$$

$$s = mda^{m-1} + m,\overline{m-1},bca^{m-2} + \frac{m,\overline{m-1},\overline{m-2}}{2\cdot 3}b^3a^{m-3},$$

$$t = mea^{m-1} + m,\overline{m-1},bda^{m-2} + \frac{m,\overline{m-1},\overline{m-2}}{2}bbca^{m-3} + \frac{m,\overline{m-1},\overline{m-2},\overline{m-3}}{2\cdot 3\cdot 4}b^4a^{m-4},$$
$$+ \frac{m,\overline{m-1}}{2}cca^{m-2}$$

$$u = mfa^{m-1} + m,\overline{m-1},bea^{m-2} + \frac{m,\overline{m-1},\overline{m-2}}{2}bbda^{m-3} + \frac{m,\overline{m-1},\overline{m-2},\overline{m-3}}{2\cdot 3}b^3ca^{m-4}$$
$$+ \frac{m,\overline{m-1},\overline{m-2},\overline{m-3},\overline{m-4}}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}b^5a^{m-5}$$
$$m,\overline{m-1},cda^{m-2} + \frac{m,\overline{m-1},\overline{m-2}}{2}bcca^{m-3}$$

quae prorsus conveniunt cum Moivreanis. Sed res adhuc generalius confici potest, ita: Quia ex Combinationum doctrina didici[2], membra potestatis cujusvis alicujus multinomii aliter non exprimi, nisi per coacervationem combinationum partium radicis factarum 2dum exponentem aequalem potestatis indici: coëfficientem vero termini cujusvis exprimi per numerum permutationum literarum illum terminum constituentium, hinc si series convergens $a+b+c+d+e+f$ &c. elevanda sit ad potestatem m; multiplico a^m per 1, a^{m-1} per singulas reliquarum, b, c, d, e &c., a^{m-2} per singulos biniones caeterarum bb, bc, bd, be &c. nec non cc, cd, ce &c., a^{m-3} per singulos earum terniones b^3, bbc, bbd &c., bcc, bcd &c., & ita consequenter, quousque progredi fuerit necesse. Hac ratione[3]:

$$\begin{array}{llllllll}
a^m & \multicolumn{6}{l}{\overline{+\,b + c + d + e + f \qquad \&c.}} & \text{in } a^{m-1} \\
& + bb & + bc & + bd & + be & \multirow{2}{*}{$\left.\vphantom{\begin{array}{l}a\\a\end{array}}\right\}$} & & \text{in } a^{m-2} \\
& & + cc & + cd & & & & \\
& + b^3 & + bbc & + bbd & & \left.\vphantom{\begin{array}{l}a\\a\end{array}}\right\} & & \text{in } a^{m-3} \\
& & & + bcc & & & & \\
& & + b^4 & + b^3c & & & & \text{in } a^{m-4} \\
& & & + b^5 & & & & \text{in } a^{m-5} \\
& & & & & \&c. & &
\end{array}$$

Coefficiens cujusque termini invenitur, considerando numerum permutationum literarum quotcunque $a^pb^qc^rd^s$ &c. generaliter esse (sumendo $m = p+q+r+s$ &c.)

$$\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 \ldots m}{1\cdot 2\cdot 3 \ldots p \times 1\cdot 2\cdot 3 \ldots q \times 1\cdot 2\cdot 3 \ldots r \times 1\cdot 2\cdot 3 \ldots s}$$

2 Bernoulli se réfère au chapitre VIII de la deuxième partie de l'*Ars Conjectandi* (*Werke* 3, pp. 190–191).

3 Bernoulli range ici les termes de $(a+b+c+\ldots)^m$ dans l'ordre dit *lexicographique*; si on écrit a_0, a_1, a_2, ... au lieu de a, b, c, ..., cela revient à ranger $\Pi a_i^{\alpha_i}$ avant $\Pi a_i^{\beta_i}$ si l'on a $\alpha_n > \beta_n$ pour la plus petite valeur de n pour laquelle on a $\alpha_n \neq \beta_n$.

h.e. (dividendo per $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots p$)

$$\frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \ldots p+1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots q \text{ in } 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots r \text{ in } 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots s}$$

Ita ex gr. terminus $a^{m-3}b^3$ (ubi $p = m-3$, & $q=3$) coëfficientem habebit $\frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2 \cdot 3}$; terminus $a^{m-3}bcc$ (ubi $p = m-3$, $q = 1$, $r = 2$) habet $\frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2}$; terminus $a^{m-10}b^2c^3d^5$ (ubi $p = m-10$, $q = 2$, $r = 3$, $s = 5$) habet

$$\frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot m-3 \cdot m-4 \cdot m-5 \cdot m-6 \cdot m-7 \cdot m-8 \cdot m-9}{1 \cdot 2 \text{ in } 1 \cdot 2 \cdot 3 \text{ in } 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}.$$

Aliter & elegantius, ubi lex progressionis melius patescit:

Ponatur $\quad \overline{a+b+c+d+e+f \,\&\text{c.}}^{\,m} = p+q+r+s+t+u \,\&\text{c.}$

unde $\quad m\mathfrak{l}, \overline{a+b+c+d+e+f \,\&\text{c.}} = \mathfrak{l}, \overline{p+q+r+s+t+u \,\&\text{c.}}$

differentiandoque

$$\frac{m\,da+m\,db+m\,dc+m\,dd+m\,de+m\,df \,\&\text{c.}}{a+b+c+d+e+f \,\&\text{c.}} = \frac{dp+dq+dr+ds+dt+du \,\&\text{c.}}{p+q+r+s+t+u \,\&\text{c.}}$$

& multiplicando decussatim,

$$\left.\begin{array}{r} mp\,da + mp\,db + mp\,dc + mp\,dd + mp\,de + mp\,df \;\;\&\text{c.} \\ + mq\,da + mq\,db + mq\,dc + mq\,dd + mq\,de \;\;\&\text{c.} \\ + mr\,da + mr\,db + mr\,dc + mr\,dd \;\;\&\text{c.} \\ + ms\,da + ms\,db + ms\,dc \;\;\&\text{c.} \\ + mt\,dd + mt\,db \;\;\&\text{c.} \\ + mu\,da \;\;\&\text{c.} \end{array}\right\} = \begin{array}{r} a\,dp + a\,dq + a\,dr + a\,ds + a\,dt + a\,du \;\;\&\text{c.} \\ + b\,dp + b\,dq + b\,dr + b\,ds + b\,dt \;\;\&\text{c.} \\ + c\,dp + c\,dq + c\,dr + c\,ds \;\;\&\text{c.} \\ + d\,dp + d\,dq + d\,dr \;\;\&\text{c.} \\ + e\,dp + e\,dq \;\;\&\text{c.} \\ + f\,dp \;\;\&\text{c.} \end{array}$$

igitur comparando terminos ejusdem ordinis[4], habetur

1. $mp\,da = a\,dp$ (quod dat $p = a^m$)

4 Ici l'arrangement des termes a été modelé sur celui que Bernoulli avait adopté plus haut pour les séries de puissances; autrement dit, si l'on écrit a_0, a_1, a_2, ... au lieu de a, b, c, ... et p_0, p_1, p_2, ... au lieu de p, q, r, ..., l'*ordre* des termes $p_i da_j$ et $a_i dp_j$ est $m+i+j$, de sorte que l'identification des sommes de termes de même ordre dans les deux membres lui permet de calculer les p_i par récurrence.

$2.\ mq\,da - a\,dq = b\,dp - mp\,db;$
$3.\ mr\,da - a\,dr = b\,dq - mq\,db + c\,dp - mp\,dc;$
$4.\ ms\,da - a\,ds = b\,dr - mr\,db + c\,dq - mq\,dc + d\,dp - mp\,dd,$ &c.

ad quas aequationes resolvendas, fingatur $my\,da - a\,dy = dz$; sitque $y = la^m$, erit

$$dy = a^m dl + mla^{m-1}da,$$

adeoque $my\,da - a\,dy\ (dz) = mla^m da - a^{m+1}dl - mla^m da = -a^{m+1}dl;$

unde $dl = \dfrac{-dz}{a^{m+1}}$, & $l = \displaystyle\int\frac{-dz}{a^{m+1}}$, & $y\ (la^m) = a^m \displaystyle\int\frac{-dz}{a^{m+1}}$, qua regula ad praecedentes aequationes applicata, fit

$$q = a^m \int\frac{\overline{mp\,db - b\,dp}}{a^{m+1}},$$
$$r = a^m \int\frac{\overline{mq\,db - b\,dq + mp\,dc - c\,dp}}{a^{m+1}},$$
$$s = a^m \int\frac{\overline{mr\,db - b\,dr + mq\,dc - c\,dq + mp\,dd - d\,dp}}{a^{m+1}},$$

e quibus lex progressionis in caeteris facile patescit. Liquet igitur, cum data sint a & m, dari p, adeoque dp; igitur cum & data sint b & db, dari quoque q, & dq, ac proinde datis c & dc, dari quoque r &c.

NB. Eaedem quantitates p, q, r, & s valent etiam pro multinomio finito; puta trinomio $a+b+c$ ad potest. m elevando; solum enim literae sequentes d, e, f, &c. earumque differentialia dd, de, df &c. nihilo sunt aequales ponendae.

NB. potest et determinari maximus terminus potestatis cujuscunque cujusvis multinomii, np. si numerus partium radicis multinomiae minor est potestatis indice m, ille potestatis terminus est maximus, in quo dimensiones partium radicis, partibus ipsis vel praecise vel proxime sunt proportionales. Cum enim id demonstraverimus de binomio, procedimus inde ad trinomium, & hinc ad quadrinomium &c.

Vid. supra Artic.[5]

5 Bernoulli voulait probablement se référer ou à Med. CCI (*Werke* 3, p. 89), ou bien à Med. CLI a, p. 188 du manuscrit (*Werke* 3, p. 82).

Oratio de Historia Cycloïdis

Introduction

Sans chercher à retracer ici l'histoire de la cycloïde, rappelons seulement que cette courbe, introduite vers le début du XVII^e siècle par Galilée (et indépendamment, semble-t-il, par Mersenne) a fourni aux mathématiciens, pendant tout un siècle, une pierre de touche pour l'essai de leurs méthodes, et en même temps, suivant le mot de Johann Bernoulli, une pomme de la discorde autour de laquelle se sont déroulées les plus aigres disputes, contestations de priorité et même («*proh pudor*!», dit Johann) accusations de plagiat. Ce sont assurément ces circonstances qui ont donné à un polygraphe de Wismar, Johann Gröning (1669–1706?), l'idée d'y consacrer un numéro de sa *Bibliotheca Universalis*; dès 1696 nous le voyons consulter Leibniz et Johann Bernoulli à ce sujet (v. Leibniz, *Math. Schriften* III, pp. 332, 335, 344, 353, 355–356). Son *Historia Cycloeidis* ([5] de la bibliographie ci-dessous) parut à Hambourg en 1701; le 8 octobre 1701 Johann Bernoulli en fait une sévère critique dans une lettre à Leibniz (*ibid.*, p. 685). «*Sans parler de ses solécismes grammaticaux*», cet ouvrage est composé, dit-il, sans ordre ni choix; il attribue à Huygens ce qui vient de Wallis; surtout Johann reproche amèrement à Gröning de paraître prendre le parti de Jacob dans la récente querelle qui oppose les deux frères au sujet de la quadrature des segments de la cycloïde. Une fois de plus Leibniz se voit obligé de lui prêcher la modération (*ibid.*, pp. 688–689).

Si en cette même année Jacob Bernoulli fit de l'histoire pittoresque de la cycloïde le thème du discours académique que pour l'inauguration de son troisième décanat il se voyait dans l'obligation de prononcer, c'est apparemment qu'il venait de recevoir l'*Historia* de Gröning et que celle-ci promettait de lui rendre la tâche facile; plus du tiers de son discours est copié mot pour mot sur Gröning, et si hâtivement (ou bien si négligemment) qu'il copie ainsi jusqu'à la fausse attribution à Huygens d'un long passage de la lettre de Wallis à Huygens[1].

Quant au reste de son discours, tout ce qui concerne le défi porté par Pascal en 1658, ainsi que les travaux composés à la suite de ce défi, est essentiellement emprunté au *Tractatus* ([2]) de Wallis, dont plusieurs passages sont de nouveau

1 V. pp. 261–262 h.v. Comme me l'a aimablement signalé Volker Scheuber, il s'agit là d'une mauvaise lecture par Gröning de la *Lettera a' Filaleti* de Carlo Dati. Celui-ci ([3], p. 451) cite le texte en question par les mots «la lettera a Cristiano Hugenio», ce que Gröning, oublieux du fait que c'était là de l'italien, et lui-même médiocre latiniste, a compris comme *la lettre de Huygens*. Jacob, qui n'a visiblement pas connu l'écrit de Dati, n'aurait pu commettre de son chef la même erreur.

copiés littéralement. Jacob traite de même l'article de son frère ([4]) sur les segments de la cycloïde. On observera qu'il reprend à son compte le passage où Johann fait honte à ses prédécesseurs («*proh pudor!*») de leurs accusations mutuelles de plagiat. Pouvait-il, en écrivant ces lignes, ne pas penser à son frère et à leurs querelles?

Pour la période plus récente, il se contente (par modestie, dit-il) d'une brève allusion à ses propres découvertes, avant de conclure par une exhortation à ses auditeurs, sinon de participer à la recherche mathématique (*ce qui n'est donné qu'à bien peu de gens*, dit-il), du moins à ne pas lui refuser la juste estime qu'elle mérite. Puis son discours se termine par le *dixi* sacramentel.

BIBLIOGRAPHIE

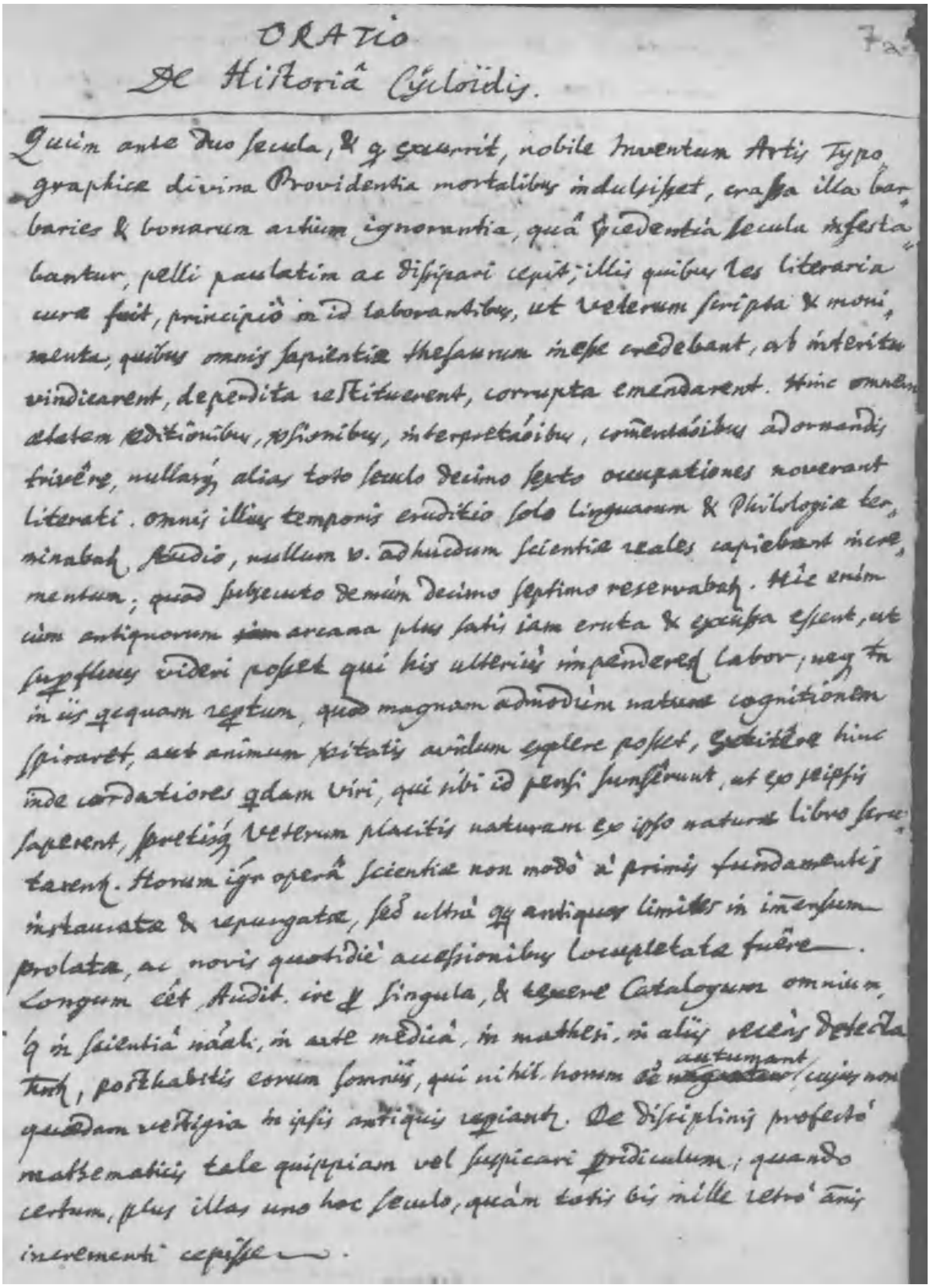
[1] Blaise Pascal, *Histoire de la Roulette*, Paris 1658 – *Œuvres Complètes* (ed. J. Chevalier), Bibliothèque de la Pléiade, Paris 1954, pp. 194–210.

[2] John Wallis, *Tractatus de Cycloide*, Oxoniae 1659; reproduit dans Wallis, *Opera Mathematica*, vol. I, Oxoniae 1695, pp. 499–547.

[3] Timauro Antiate [pseudonyme de Carlo Dati]), *Lettera a' Filaleti, Della vera storia della cicloide ...*, Firenze 1663; reproduit dans *Opere di Evangelista Torricelli* (ed. G. Loria), vol. I, parte II, Faenza 1919, pp. 441–482.

[4] Johann I Bernoulli Op. LVIII, *Cycloidis primariae segmenta innumera quadraturam recipientia ...*: AE Julii 1699, pp. 316–320 – Joh. I B. *Opera* I, pp. 322–327 – *Streitschriften*, pp. 393–399.

[5] Johannis Gröningii D. *HISTORIA CYCLOEIDIS. Qua Genesis & Proprietates Lineae Cycloeidalis praecipuae, secundum Ejus Infantiam, Adolescentiam & Juventutem, Ordine Chronologico recensentur. Nec non An Primus Ejusdem Inventor, GALILAEUS, & Demonstrator TORRICELLIUS fuerit, Contra PASCALIUM Aliosque Galliae Geometras discutitur Perscripta Ad Illustrem & Celeber. Polyhistorem Dn. ANTONIUM MAGLIABECHIUM...*, Hamburgi, ap. Gotfr. Liebezeit. 1701.



ORATIO
De Historiâ Cycloïdis.

7a

Quum ante duo secula, & quod excurrit, nobile Inventum Artis Typographicae divina Providentia mortalibus indulsisset, crassa illa barbaries & bonarum artium ignorantia, quâ praecedentia secula infestabantur, pelli paulatim ac dissipari coepit; illis quibus res literaria curae fuit, principiò in id laborantibus, ut veterum scripta & monimenta, quibus omnis sapientiae thesaurum inesse credebant, ab interitu vindicarent, deperdita restituerent, corrupta emendarent. Hinc omnem aetatem editionibus, versionibus, interpretationibus, commentationibus adornandis trivêre, nullasque alias toto seculo decimo sexto occupationes noverant literati. omnis illius temporis eruditio solo Linguarum & Philologiae terminabatur studio, nullum vero adhucdum scientiae reales capiebant incrementum; quod subsequenti demum decimo septimo reservabatur. Hic enim cum antiquorum arcana plus satis iam eruta & excussa essent, ut supervacuus videri posset qui his ulterius impenderetur labor; neque tamen in iis quicquam restaret, quod magnam admodum naturae cognitionem spiraret, aut animum veritatis avidum explere posset, exstitere hinc inde cordatiores quidam viri, qui sibi id pensi sumserunt, ut ex seipsis saperent, spretisque veterum placitis naturam ex ipso naturae libro scrutarentur. Horum igitur operâ scientiae non modò a primis fundamentis instauratae & repurgatae, sed ultrà quoque antiquos limites in immensum prolatae, ac novis quotidie accessionibus locupletatae fuere —. Longum esset studiose ire per singula, & texere Catalogum omnium, quae in scientiâ naturali, in arte medicâ, in mathesi, in aliis scientiis detecta sunt, posthabitis eorum somniis, qui nihil hominum de ~~[illegible]~~ autumant, cujus non quaedam vestigia in ipsis antiquis reperiantur. De disciplinis profectò mathematicis tale quippiam vel suspicari ridiculum; quando certum, plus illas uno hoc seculo, quam totis bis mille retro annis incrementi cepisse —.

Première page du manuscrit de l'*Oratio de Historia Cycloïdis*

Oratio de Historia Cycloïdis[1]

Ms UB Basel L I a 749 A.3 = fol. 7–12 (6 fol. de 16,5 × 21,5 cm)

Quum ante duo secula, & quod excurrit, nobile Inventum Artis Typographicae divina Providentia mortalibus indulsisset, crassa illa barbaries & bonarum artium ignorantia, qua praecedentia secula infestabantur, pelli paulatim ac dissipari cepit; illis quibus res literaria curae fuit, principio in id laborantibus, ut veterum scripta & monimenta, quibus omnis sapientiae thesaurum inesse credebant, ab interitu vindicarent, deperdita restituerent, corrupta emendarent. Hinc omnem aetatem editionibus, versionibus, interpretationibus, commentationibus adornandis trivere, nullasque alias toto seculo decimo sexto occupationes noverant literati. Omnis illius temporis eruditio solo linguarum & Philologiae terminabatur studio, nullum vero adhucdum scientiae reales capiebant incrementum; quod subsecuto demum decimo septimo reservabatur. Hic enim cum antiquorum arcana plus satis iam eruta & excussa essent, ut superfluus videri posset qui his ulterius impenderetur labor; neque tamen in iis quicquam repertum, quod magnam admodum naturae cognitionem spiraret, aut animum veritatis avidum explere posset, extitere hinc inde cordatiores quidam viri, qui sibi id pensi sumserunt, ut ex seipsis saperent, spretisque veterum placitis naturam ex ipso naturae libro scrutarentur. Horum igitur opera scientiae non modo a primis fundamentis instauratae & repurgatae, sed ultra quoque antiquos limites in immensum prolatae, ac novis quotidie accessionibus locupletatae fuere.

Longum esset, Audit., ire per singula, & texere Catalogum omnium, quae in scientia naturali, in arte medica, in mathesi, in aliis recens detecta habentur, posthabitis eorum somniis, qui nihil horum esse autumant, cujus non quaedam vestigia in ipsis antiquis reperiantur. De disciplinis profecto mathematicis tale quippiam vel suspicari perridiculum; quando certum, plus illas uno hoc seculo, quam totis bis mille retro annis incrementi cepisse.

Nunc itaque cum ex hoc iterum loco dicendi mihi necessitas incumbat, horulam istam nec jucundius vobiscum fallere, nec seculo eruditissimo, quod in

1 Le manuscrit autographe de ce discours a été conservé avec une feuille de couverture sur laquelle Jacob Bernoulli a noté: «ORATIO habita d. 26 Junii 1701, cum Decanatum Philosophicum tertium capesserem.»
Son petit-neveu Johann III Bernoulli, qui a conservé et rangé les papiers de ses ancêtres, note «Jacobi Bernoulli de Historia Cycloidis Oratio» et donne au discours le numéro A.3 dans le volume de sa collection qui, par Berlin et Gotha, est finalement retourné à Bâle. En 1927, le discours a été publié par Friedrich Weis dans *Archiv für Geschichte der Mathematik, der Naturwissenschaften und der Technik*, Bd. 10 (Neue Folge I), 1927/28, pp. 345–355 (N.D.L.R.)

amplexibus non ita pridem nostris ultimum spiritum reddidit, utilius parentare me posse credidi, quam si ex innumeris quibus superbit inventis unum depromerem, ac Historiam Cycloïdis Curvae famosissimae, quae seculi initio ortum, medio progressum, fini colophonem suum debet, rixisque subinde fervidissimis inter primicerios Geometrarum ansam praebuit, brevi oratione enarrarem; quod dum facturus sum, Audit., non est cur timeam, minore Vos attentione vel patientia, quam qua ridiculam olim legistis Batrachomyomachian, celebratissimae summorum Virorum pugnae aures praebituros.

Communis hodie philosophantium vox est, nihil in rebus cognosci praeter varias relationes, quas ad se mutuo habent, et quarum (in rebus praesertim materiatis) praecipua est illa, qua secum invicem secundum majus & minus comparantur. Unde cum haec non aptius, quam per coordinates, ut vocant, Curvae alicujus repraesentetur, conjiciet unusquisque facile, quanti Curvarum consideratio sit momenti, desinetque mirari, si harum tractationem utramque in Geometria paginam facere, Geometrarum vero praestantissimos super iis magna saepe animorum contentione inter se collidi viderit.

Cycloïs (vel Cycloïdes) aliis Trochoïdes, Gallis la Roulette, quasi Rotula, est Linea Curva, ex earum numero, quas Mechanicas sive Transcendentes nuncupant, cujus vestigia clavus circumferentiae rotae super plano provolutae affixus in aëre describit. Primus Inventor & Parens hujus Curvae communiter habetur Galilaeus, quamquam Wallisius eandem Galilaeo multo antiquiorem faciat, asseratque jam inter Cardinalis Cusani opera in Codice, qui apud ipsos extet Manuscriptus circa annum 1454 suo ipsius dono in Bibliothecam Savilianam illatus, delineatam haberi, in editis vero exemplaribus perperam describi; ac praeterea apud Carolum Bovillium Mathematicum Gallum non incelebrem dici, extitisse eandem jam circa annum 1520.

Digito enim potius indicasse hi Auctores, quam reperisse aut considerasse Curvam censendi sunt. Fuit certe Galilaeus Mathematicorum sui temporis facile Princeps, acerrimi ac divini plane ingenii, multumque valuit tam in solvendis Problematis, quam detegendis in omni disciplinarum genere novis, praesertim in Opticis & Astronomicis excelluit. Obstupuit Literatorum agmen, cum Galilaeus nova Tubi machina ipsorum oculis caelum propius admoveret, novosque circa Jovem Satellites novaque Sydera, Medicea postmodum a se dicta ostenderet; quae tantam Viro ubivis conciliarunt famam, tantamque laudem, ut sui seculi Archimedes audiverit. Haec cum aliis praeclaris inventis argumento sunt, potuisse ipsum utique per se detegere, & sine ope Bouvillii, fama Galilaeo inferioris, lineam Cycloïdis; cujus adeo inventionis gloriam nos ipsi in re non adeo explorata minime disputamus. Centesimus autem praecise labitur annus, aut supra centesimum secundus (ut auctor est Torricellius) quo curvam istam primum Pisis occasione formandi ibidem arcuati pontis excogitavit Galilaeus, nomenque Cycloïdis ei indidit ad exemplum puto Cissoïdis, quanquam ex analogia Graeci sermonis dicendum potius esset Cycloïdes quam Cycloïs. Mox etiam naturam & proprietates Lineae contemplari, praesertim in mensuram spatii Curva comprehensi inquirere cepit; qua indagine mirum quantopere se torsit Vir sagacissimus, sed aqua ipsi haesit perpetuo, sic ut per plurimos annos ne hilum quidem proficeret, quod tamen in illa Geometriae infantia Viro merito condonamus. Suspicatus quidem fuerat, spatium hoc Circuli sui genitoris esse triplum, experimento inductus mechanico, quo appensis ad libellam spatiis figurarum materialibus rem exploravit, sed geometrico ratiocinio veritatem nunquam assequi potuit. Tandem cum totos jam 40 annos frustra Problemati insudasset, & de successu desperasset penitus, rem Bonaventurae Cavallerio in literis anno sup. seculi 39.° ad ipsum scriptis communicavit, eumque ad nodum quem ipse non potuisset, solvendum invitavit.

Sperabatur tunc a dexteritate & ingenio Cavallerii, ut voto Galilaei satisfaceret, atque optatam mensuram spatii Cycloïdalis exhiberet, praesertim cum ipse prima Analyseos infinite parvorum stamina invenerat, quorum ope in Mysteria haec penetrare non adeo difficile videbatur. Sed nec Cycloïdis mensura pro Cavallerio reservabatur. Deseruit ob difficultatem Dimensionem ejus, nec unquam postea ad eam rediit; quod ipse Cavallerius in Epistola anno 1643 ad Torricellium scripta non diffitetur. Inde primus omnium Cycloïdis spatium dimensus est, vel ejus mensuram mundo patefecit Evangelista Torricellius, Mathematicus Florentinus, paucis istis rudimentis usus Geometriae Indivisibilium, quae nuper dedisset Bonaventura Cavallerius, ipso in hoc Cavallerio felicior. Eorum beneficio reperit aream Cycloïdis Circuli praecise triplam esse; quod ipse Torricellius, postquam invenisset anno sequenti 1644 typis vulgari curavit.

Interea dum haec in Italia agerentur, Mersennus in Gallia idem Problema Gallis suis & Italis proposuerat, quo velut pomo Eridos in turbam projecto certatim ei & summa animi contentione se applicuere praestantissimi quique illius temporis Geometrarum, Lalovera, Robervallius, Cartesius, Fermatius, alii; sic ut non tantum aream Cycloïdis, sed & tangentes, centrum grav. ejus, item solida Cycloïdica & solidorum centra grav. enucleata darent: unde, ut fieri solet, tot accensae sunt lites, Torricellium inter praecipue & Robervallium; qui prae aliis primarum Cycloïdis proprietatum primi Inventoris titulum ambientes, & aegre alter alterum in partem honoris admittentes, miserum in modum se mutuo prosciderunt, atque nefandi, proh pudor!, plagii insimularunt; quemadmodum videre est ex Eristicis hinc inde editis, exque praelonga Robervallii Epistola Expostulatoria ad Torricellium, prout illa habetur in Operibus Mathematicis & Physicis Lutetiae ante octennium impressis, in quibus continentur inventa Robervalliana, nonnulla satis ingeniosa; nonnulla autem alia ubi Auctor foede paralogizat, ut mirer Editorem errores non animadvertisse & suppressisse. Quamvis autem disputare haud operae pretium videatur, uter tempore prior invenerit Theoremata, Torricellius an Robervallius, cum nec tanti sit, quod de Cycloïde in ejusdem infantia detectum, cum tamen inter hos Duumviros litem haud minori fervore agitatum sciamus, acsi de salute Graeciae, aut de gloria Italiae Galliaeve ageretur, non abs re erit paulo specialiora de his narrare: Proposuerat nimirum in Gallia nonnulla Problemata Geometrica P. Mersennus ex ordine Minimorum, felix & indefessus in proponendis, infelicior in iisdem solvendis. Inter alia quoque abstrusum ipsi videbatur Spatium Cycloïdis, ejusque dimensio, quam Galilaeum olim frustra tentasse forsan inaudiverat, cumque in mensuram ejus penetrare ipse minus potis esset, celebres ubivis Mathematicos ad ejus solutionem, callide pro more suo suppresso Galilaei nomine, invitabat. Invitabat autem primum Robervallium Matheseos Professorem regium, a cujus dexteritate praesertim solutionem sperabat. Qui etiam post aliquem temporis tractum solutum a se Problema significat. Sed conveniunt ambo de reticendo adhuc invento, & quod velint aliis Geometris eandem quaestionem movere, ut si solvere non possint tam arduum Problema, eo major esset & Inventoris & Demonstratoris gloria. Hoc successu laetatus Mersennus & audacior factus universum orbem provocat, & arroganter primis Italiae Galliaeque Geometris solutionem Trochoïdis (sic enim vocabat) proponit, acsi ipse primum de hac linea cogitasset, nemoque adhuc eandem solvisset. Scribit inter alios ad Galilaeum Torricelliumque, & ab iis dimensionem Curvae postulat. Agnovit mox Galilaeus in proposita Trochoïde suam Cycloïdem jam ante multos annos a se excogitatam, sed ob difficultatem quam offenderat diu sepositam & derelictam, cujus etiam memor, noluit ex diffidentia reassumere, sed rem commisit Clariss. Geometris Cavallerio & Torricellio, quorum ille cum haud felicior Galilaeo esset, hic tandem majori usus successu quaesitum invenit & publicavit, incertus plane quid interea Galli agerent aut quid in scriniis suis premerent, cum nihil ab illis hucusque typis vulgatum esset. Hinc Torricellius, ut desiderio Mersenni faceret satis, una cum aliis suis inventis etiam solutionem Cycloïdis bona fide, ut erat vir ingenuus, transmittit. Attonitus hoc nuncio Robervallius, & ab alio mysterium detectum indigne ferens Italum plagii insimulat, suaque sibi forte a Joh. Beaugrandio surrepta & in Italiam missa fuisse causatur. Quo intellecto Torricellius crimen a se amoliri, uterque per mutuas Epistolas causam suam agere, sibique tribuere, quae alter sua credebat aut cupiebat, curante literas Mersenno perpetuo Geometrarum utriusque nationis velut internuncio, & differente nonnunquam suas astute in biennium usque Robervallio, quo quae beneficio Mersenni de Torricellii inventis sibi explicata fuerant, tacite secum ruminabat & digerebat. Interea dum hi contentionis serram reciprocantur, prodit in Gallia liber, Blasii Pascalii, cui titulus: *Histoire* *de la Roulette*, quo Auctor Gallorum causam suscipit, & inventionem Curvae Mersenno, demonstrationem Robervallio acceptam refert. Summa libri huc redit: Lineam primum omnium animadvertisse Mersennum circa annum 15, & interjectis proxime viginti annis, anno nimirum 34 proposuisse Robervallio, hunc voti compotem factum invitasse ad ejus scrutinium caeteros Geometras, patefacta iis tripla ratione Cycloïdis ad Circulum, demonstrationem mox invenisse duos, Fermatium nempe Cartesiumque, Beaugrandium autem, plagiarium demonstrationes cum aliis aliorum inventis suppressis Auctorum nominibus anno 38 Galilaeo misisse, ac sibi quidem nominatim non ascripsisse; iis tamen usum esse verbis, ut minus attente legentibus, quo minus se istorum profiteretur auctorem, sola demum impeditus modestia videretur; itaque ad rem paululum interpolandam, Trochoïdis vocem in Cycloïdem commutasse. Non multo autem post, Galilaeo ipsoque Beaugrandio vita functis, Torricellium, qui Galilaei Manuscripta nactus, omniaque jam secure ad se transferri posse arbitratus fuerit, inventum sibi arrogasse, edito anno 44 in lucem libro, qui non sine quorundam risu in Gallia fuerit exceptus, ceu tribuens Torricellio id, cujus parens in vivis constanter jam per octo annos haberetur Robervallius; & quae porro alia. Sed cum suspecta esse possint, quae Vir nimio fortassis Patriae amore abreptus Gallus praesertim, in causa conterranei sibique familiarissimi scripsit, merito quoque audiendi sunt exteri, quos semper a partium studio alieniores praesumimus: Ubi merentur prae aliis adduci, quae Hugenius Batavus de Pascalio ejusque Historia Trochoïdis refert: Hic prolixius Torricellio quae sua sunt vindicat & restituit. Et quidem maluissem, inquit, vel hoc nomine, ut Auctor Historiae de la Roulette iis quae in Torricellium dicta sunt, abstinuisset, quam ut Virum meritissimum jam per plures annos demortuum sugillaret. Torricellium utique ex scriptis novimus tum Virum doctum & Mathematicum, tum de Mathematicis optime meritum; credo & ingenuum. Nec video, quod ab illo admissum sit, quod Cl. Robervallio bilem moveret. Edidit Torricellius anno 44 demonstrationes suas de Cycloïdis area circuli tripla: quod quidem cur ipsi non liceret, non video. Demonstrationes illas suas esse non negant; nec causantur illum Robervallii quicquam pro suo venditasse. Non dixit quidem (nesciebat enim vel ipsis fatentibus) sed nec negavit, Robervallium hoc etiam demonstrasse. &c. Et paulo post inquit, Nos saltem Torricellio plus debemus, qui demonstrationes suas jam palam factas vulgavit, quam qui suas adhuc supprimit Robervallio. Et quidem iniquum plane judicamus, ut si suas nolit Robervallius typis mandare, non igitur liceat Torricellio suas. At Galilaeo inquiunt, id adscribit Torricellius, quod Mersenno debetur, & quod Robervallio sibi. At bona verba quaeso: siquidem neutrum horum ego video. Erat utique suarum solutionum Auctor Robervallius, & Torricellius suarum non minus; sin sua interesse putaverit Robervallius, ut sciat orbis suas priores esse, utut id nesciverit Torricellius, liberum id illi fuit hoc indicasse, nec erat ad hoc necesse, ut Torricellium hujus nescium sugillaret, aut iniquis suspicionibus oneraret. At fieri possit, ut inter Galilaei schediasmata Beaugrandi scriptum viderit, quo demonstrationem Robervallii celato nomine ad Galilaeum miserat; unde suis ansam arripuisse possit. Nempe hoc suspicantur: num autem pro comperto habeant ignoro; nec nisi hoc fassus fuerit ipse (quod non affirmant) unde id sibi constare possit non docent. Sed utut sit, non surreptas inde demonstrationes causantur ipsum pro suis venditasse, nec negant suas esse quas exhibet. Quodnam igitur sit, cujus insimulent criminis, plane non intelligo; nec praeter sinistras suspiciones quicquam quo id constet afferunt. Rursumque paucis interjectis lineis pergit: Quid itaque culpent, nescio, nisi nefas esse velint, ut quisquam vel inveniat alius, vel in publicum emittat, quod sibi forte clam cognitum, apud se premit Robervallius, vel suis solis notum malit. Tandemque concludit his verbis: Et quanquam nolim sibi suum reponere: *Ce fut un sujet de rire en France*: At nos certe, qui minus forte sumus, quam Galli sui ad risum proclives, miramur saltem, dum Torricellii verba cum hac historiola comparamus, quid illud tanti sit, quod tantis hisce questibus subsit fundamentum.

Hactenus Hugenius, cui per omnia ὁμόψηφος Wallisius Anglus, qui in praefatione Tractatus sui de Cycloïde anno 59 publicati, ubi causam Torricellii contra Pascalium agit, inter alia sic inquit: Didiceram quidem a Torricellio (a Torricellio inquam, nam Robervallium de rebus hisce quidpiam meditatum esse, quae mea erat infelicitas, ne per somnia cogitabam) didiceram inquam ab illo tum Cycloïdis aream circuli triplam esse; tum tangentes describendi methodum. Plura vero de Cycloïde quempiam excogitasse nesciebam plane; ut & (quantum hactenus intelligo) nostri juxta mecum ignorabant omnes; nec quidem ullo jure censendi sumus cognovisse; cum illud omne quod se invenisse contendit Robervallius, vel intra privata sua scrinia recondidit, vel familiaribus saltem aliquot communicavit. His, si decertandum esset authoritate, plura egregiorum Virorum testimonia addi possent, qui Torricellio demonstratae Curvae gloriam asserunt, Schootenii in Hollandia, Tacqueti in Flandria, Leibnitii in Germania; nec desunt inter ipsos Gallos, qui Torricellio subscribant, quorum fides minus sublesta, cum omnium maxime credantur ut praesentes scivisse, quid rei tum temporis in Gallia fuerit gestum. Talis Doctissimus Lalovera, quem dimensionem Cycloïdis ipsi Torricellio ceu primum divulganti ascribere non pudet. Nos omnibus, quae in utramque partem dicuntur, attente ponderatis, ita sentimus & dicimus: Certum est, Galilaeum de Cycloïde cogitasse ante Mersennum: Possibile, Torricellium & Robervallium ejus mensuram proprio Marte adinvenisse: Incertum, quis prior solverit, sed certum, Torricellium sua prius publicasse, & probabile Robervallium Torricellii inventis in suis ampliandis & perficiendis adjutum fuisse.

Sed filum Historiae meae reassumo, relictis Torricellio & Robervallio, quorum interea velitatio viam praeparabat, & quasi praeludebat longe acriori pugnae non diu post subortae, ex occasione quorundam Problematum super Cycloïde a Dettonvillio seu Pascalio cum annexo praemio propositorum; cujus fabulam toto caelo notissimam qui ignorat, Wallisii Praefationem legat ad Tractatum suum de Cycloïde, & quae ad Hugenium hac de re prolixe scripsit. Nos breves erimus; occasio rixarum haec fuit: Acciderat illo tempore, ut Pascalius hortatu amicorum, cogitaret de veritate Religionis Christianae comprobanda; hi ergo cum eum Problemata tam abstrusa, ut tunc videbantur, assecutum audivissent, putaverunt posse ejus rei famam scriptis quoque sacris Auctoris magnam conciliare auctoritatem praesertim si constaret, alios eadem praestare non posse; itaque propulere, ut sua publice proponeret, persuasi, neminem alium illis solvendis parem fore: quorum etiam precibus inductus Pascalius peculiari scheda Parisiis m. Jun. anno 1658 impressa dissimulato nomine sequentia proposuit: Data in Cycloïde recta parallela basi, quaeritur dimensio spatii illa comprehensi ejusque centrum grav. solidaque illius conversione genita, & solidorum ac semisolidorum centra grav. Horum autem Problematum solutionem a praestantissimis toto orbe Mathematicis supplex postulabat anonymus, proposito simul praemio in haec verba: Quisquis superius proposita intra primum diem m. Octobris anni 1658 solverit & demonstraverit, magnus erit nobis Appollo; & primus quidem consequetur valorem 40 duplorum aureorum Hispanicorum, quos ipsi Hispani Dublones & Galli Pistoles vocant, secundus vero 20 ejusmodi duplos aureos; si unus tantum solverit, 60 solus habebit. Additae sunt postea aliae conditiones, quibus postulabatur, rem intra praestitutum tempus instrumento publico Illustr. Dno. de Carcavi significari; ipsa vero pecunia apud ducem de Liancourt fuit deposita; tanta nimirum solennitate res transigenda erat! Haec itaque per literas Digbaei cum rescivisset Wallisius, huic se inquisitioni accinxit, & solvit, non tam exposito praemio (quod quidem ad pompam facere videbatur), quam illustrissimi Equitis desiderio inductus. Et quia videbat, non parum temporis propositi jam effluxisse, reliquique non parum (quantum saltem exscribendis, transmittendis & tradendis literis sufficiat) a calce amputandum esse, in angustias temporis conjectus omnia paucis complectitur, methodique suae summam, Notarii tamen publici subscriptione munitam, Carcavio transmittit; quam & Carcavius, aut potius eo absente Pascalius cui id muneris commiserat 20 7bris, i.e. integro ante praefixum terminum decendio Parisiis recepit: Unde cum invidi Galli qui palmam extero adjudicare minime volebant, eandem Wallisio haud alio colore dubiam reddere possent, in persona Notarii diverticulum quaesivere, causantes, conformius futurum fuisse intentioni proponentis Anonymi, ut per Notarios Parisienses attestatio facta fuisset, quam per Oxonienses; Parisienses enim fidem facere debuisse receptionis D. de Carcavi; Oxonienses vero nihil ad hoc facere potuisse. Quasi quidem nesciverit Carcavius sine Notariorum Parisinorum testimonio, se accepisse, vel etiam quo die acceperit! Sed audiamus ipsum loquentem Wallisium & de frivolo hoc subterfugio sic quiritantem: Ad praemium quod attinet, inquit, de quo videntur Galli admodum solliciti, id me omnium minime movet. Rem ipsam quod spectat, Geometrarum illud judicio permitto. De Instrumento publico quod dicitur, putarim quidem ego, vel eo hoc opus esse, ut D. Carcavio fidem faceret, quo tempore solutio quaelibet alibi facta fuerit; vel omnino non opus esse; ut enim sibi se accepisse constet, vel quo die acceperit, quid Instrumento publico vel publicis Notariis opus erat. Sed affigant quam velint mentem verbis Anonymi, & de praemio quod lubet statuant, non repugno, Gallisque suis prae aliis favorem quem velint largiantur. Facti siquidem ego rem refero, non de jure litigaturus. Interea vero temporis secundas tertiasque ad Pascalium literas dedit Wallisius, sed nihil ab illo responsi tulit, ejusque loco prodiit ille, cujus jam supra facta mentio, de Historia Cycloïdis Tractatus, in quo de solutionibus Wallisianis altum ubique silentium, sic ut Wallisius, se spretum videns, sua postmodum ipse edere fuerit coactus. Dedere quoque solutiones Problematum Pascalianorum Lalovera ex Societate Jesu & ipse Gallus aliique; sed praemium ob temporis coärctati limites obtinuit nemo.

Id tamen effectum, ut nullus ab illo tempore extiterit, qui vel tantillum supra Mathematicorum vulgus sibi sapere visus est, qui ad hanc ingenii cotem vires suas acuere, & novi exinde quidpiam procudere non tentaverit; quin & primi ordinis Geometrae non minus assidui semper fuere in perscrutandis, quae alii intacta imperviaque reliquissent. Hos inter merito suo celebrandus Christophorus Wrennus, eximius Geometra & Regis Angliae Architectus, qui primus omnium Curvam Cycloïdis in rectam extendit, insuperque Cycloïdes contractas & protractas Ellipsium lineis aequari observavit. Addimus incomparabilem Chr. Hugenium Geometram Batavum, qui segmentum quoddam Cycloïdale absolute quadravit, dignum satis inventum, quod strenuus gloriae Anglicanae assertor Wallisius non uno in loco Wrennio suo pro virili assereret. Nec reticendum Germaniae nostrae decus Leibnitius, qui non multo post aliud quoddam segmentum obliquum absolutae quadraturae capax ostendit. Inprimis autem cedro digna sunt, ob usum quem praestant in vita civili longe maximum, quae subtilissimus porro adinvenit Hugenius. Is cum Pendulorum usum ad horologia automata transtulisset primus, circulano vero eorum motu omnimodam oscillationum aequalitatem obtineri non posse animadvertisset (quandoquidem latiores excursus angustioribus tardiores observabantur) investigare cepit, per quam aliam curvedinem ferri deberent pendula, ut vibrationes suas eodem praecise tempore peragerent, eaque proprietate ipsam nostram Cycloïdem gaudere deprehendit; sed quoniam haud minor superabat difficultas, efficiendi, ut per hanc ferretur pendulum (quando filum penduli in directum extensum, haud alium quam circularem pendulo motum concessisset) inquirere perrexit, qua porro fili curvatura hoc consequi liceret, eamque rursum cycloïdalem esse reperit; eoque pendulum inter duas laminas cycloïdales suspendendi artificium docuit, quarum alterna convolutione & evolutione motus automati praecise aequabilis obtineretur. Duas itaque admirandas Cycloïdis proprietates detexit, Mechanicam unam, quod grave super illa descendens ex quovis humiliori vel altiori loco aequali tempore ad imum perveniat; Geometricam alteram, quod scil. evolutione sui describat seipsam; quarum applicatione ad horologiorum fabricam quam praeclare de genere humano meruerit Vir laudatissimus, illi norunt quibus perspectum, quantum ad universam haec Geographiam & Nauticam perficiendam conferant momenti. Sufficit, contigisse huic invento, quod maxime praeclaris solet, quodque futurum praedixerat ipse Hugenius, ut plures se ejus Auctores cuperent, aut si non sibi ipsis, suae tamen nationis alicui potius, quam ipsi hunc honorem tribui vellent; quos tamen in prolegomenis suis ad Horologium Oscillatorium prolixe refellit Auctor, probatque non tantum constructionem automati propria meditatione se invenisse & perficiendam curasse, sed & delineationem ac descriptionem ejus typis vulgasse & exemplaria quaquaversum misisse, eo jam tempore, quo nec dicto nec scripto cujusquam de horologiis hujusmodi mentio facta esset, aut rumor ullus ferretur.

Ab isto autem tempore, Geometris in contemplatione pulcherrimi inventi velut unice defixis, nihil fere magnopere Cycloïdi accessit, ad usque postremum elapsi seculi decennium, quo perfectionum suarum colophonem demum nacta nobilissima Curva studio quorundam (quos propriae tenuitatis conscientia nominare vetat) qui plurimas effectiones reliquas, hactenus recensitis neutiquam cedentes, in illa detexere. Horum enim opera tandem innotuit, Cycloïdem ut sui ipsius Evolutam sic Causticam existere, eandem praeter tautochronismum Hugenii & Brachystochronismo seu descensu gravium celerrimo insignem esse; nec duo tantum, sed innumera segmenta, sectores & zonas quadrabiles in sinu fovere, & quae multa sunt alia, quibus ne propria narrando gravis Auditorio fiam, prolixius deducendis abstineo.

Audivistis ita, Auditores studiosi, Historiam Curvae Cycloïdis, qua non alia celebrior, non alia notior hoc aevo inter Geometras existit. Vidistis hac occupatos homines non vulgares, sed Viros natalium splendore, eruditionis fama, virtutum & moderationis laude conspicuos, & vere magnos, imo summos. Vidistis illos decertantes acriter, nec nisi aegre sibi quicquam patientes eripi. Quid inde concluderetis, quam delitescere in his & talibus divini quidpiam, quod incredibili voluptate percipientium animos perfundat? Nolite tamen expectare a me, ut vobis salivam moveam, eandem degustandi, aut sequendi quo illi praeivere: quod longe datum paucissimis. Sufficiens operae pretium tulero, si a quibusdam vestrum impetrem, quibus ignotam scientiam sannis & opprobriis onerare solenne, ut de tantorum virorum occupationibus mitius loqui & sentire discant, ne identidem in illos quadret quod vulgo dicitur: *Spernit indoctus, quod nequit assequi.*

Dixi.

Verzeichnisse

Index

Bibliographie

Nous n'avons inclus dans cette bibliographie que les mémoires et ouvrages publiés qui sont mentionnés explicitement ou implicitement dans les textes de Jacob Bernoulli. Nous en indiquons les éditions que Bernoulli a pu connaître et dans quelques cas aussi les éditions plus accessibles au lecteur moderne.
Les numéros de page renvoient aux passages où il est question de ces écrits; nous avons toutefois renoncé à inventorier les nombreuses références joignant entre elles les cinq parties des *Positiones de Seriebus Infinitis*.
La bibliographie secondaire consultée pour établir le commentaire du volume se trouve dans les notes de bas de page; elle est facile à repérer par l'index des noms.
Pour les abréviations utilisées, voir *supra* p. XVI.

APOLLONIUS de Perga
Apollonii Conica ... Per Isaacum Barrow ..., Londini 1675: 103

ARCHIMÈDE de Syracuse
De Sphaera & Cylindro Libri Duo: *Archimedis Opera* ... Per Is. Barrow ..., Londini 1675, pp. 1–37: 42

BERNOULLI, Jacob
Op. XI, *Nouvelle Machine pour peser l'Air* ...: JS 1684 (31. Juillet), pp. 259–264 – *Opera*, pp. 199–203 – *Werke* 1, pp. 452–455: 146

Op. XIII, *Examen de la manière de peser l'air dans une vessie*: JS 1685 (18. Juin), pp. 241–242 – *Opera*, pp. 204–206 – *Werke* 1, pp. 458–460: 146

Op. XIV, *Probleme proposé par M. Bernoulli*: JS 1685 (26. Aoust), p. 314 – *Opera*, p. 207 – *Werke* 3, p. 91: 160, 163

Op. XXVI, *Examen Bernoullianum*: AE Decembris 1686, pp. 625–629 – *Opera*, pp. 286–290 – *Werke* 1, pp. 468–471: 44

Op. XXVII, *Solutionem tergemini Problematis Arithmetici, Geometrici & Astronomici... ventilandam sistit Jacobus Bernoulli*, Basileae 1687 – *Opera*, pp. 291–313 – *Werke* 2, pp. 92–120: 44

Op. XXVIII, *Gemina Appendix ad Examen Perpetui Mobilis*: AE Junii 1687, pp. 314–324 – *Opera*, pp. 314–327 – *Werke* 1, pp. 472–482: 44

Op. XXXIII, *Appendix tertia ad Examen Perpetui Mobilis, qua ad Meletemata Dionysii Papini respondetur*: AE Novembris 1688, pp. 591–596 – *Opera*, pp. 355–360 – *Werke* 1, pp. 487–490: 44

Op. XXXVII, *Vera Constructio Geometrica Problematum Solidorum & Hypersolidorum, per rectas lineas & circulos*: AE Septembris 1689, pp. 454–459 – *Opera*, pp. 411–418 – *Werke* 4, pp. 151–159: 80

Op. XL, *Quaestiones nonnullae de Usuris, cum solutione Problematis de Sorte Alearum*: AE Maji 1690, pp. 219–223 – *Opera*, pp. 427–431 – *Werke* 3, pp. 91–93 – *Werke* 4, pp. 160–163: 140, 235

Op. XLII, *Specimen alterum Calculi differentialis in dimetienda Spirali Logarithmica, Loxodromiis Nautarum, & Areis Triangulorum Sphaericorum: una cum Additamento quodam ad Problema Funicularium, aliisque*: AE Junii 1691, pp. 282–290 – *Opera*, pp. 442–453: 113, 116

Op. XLVII, *Additamentum ad Solutionem Curvae Causticae fratris Jo. Bernoulli, una cum Meditatione de Natura Evolutarum, & variis osculationum generibus*: AE Martii 1692, pp. 110–116 – *Opera*, pp. 473–481 – *Streitschriften*, pp. 136–143: 82

[BERNOULLI, Jacob]

Op. LIV, *Positionum Arithmeticarum de Seriebus Infinitis, earumque Summa finita Pars Altera*, Basileae 1692 – *Opera*, pp. 517–542 – *Werke* 4, pp. 65–83: 246

Op. LVIII, *Curvaturae Laminae Elasticae* ...: AE Junii 1694, pp. 262–276 – *Opera*, pp. 576–600: 132, 134, 136, 140, 143

Op. LXVI, *Explicationes, Annotationes et Additiones* ...: AE Decembris 1695, pp. 537–553 – *Opera*, pp. 639–663: 132

Op. LXVII, *Notae et Animadversiones tumultuariae in Universum Opus*: Descartes, *Geometria*, Francofurti ad Moenum 1695, vol. II, pp. 421–468 – *Opera*, pp. 665–717 – *Werke* 2, pp. 547–602: 144

Op. XCII, *Quadratura Zonarum cycloidalium demonstrata*: AE Septembris 1699, pp. 427–428 – *Opera*, pp. 871–873 – *Streitschriften*, pp. 400–403: 164

Op. XCIV, *Nova Methodus expedite determinandi Radios Osculi seu Curvaturae in Curvis quibusvis Algebraicis*: AE Novembris 1700, pp. 508–511 – *Opera*, pp. 888–891: 146

Op. XCV, *Quadratura Zonarum Cycloidalium promota; Problema item Centri grav. Sectoris solidi Cycloïdici solutum*: AE Decembris 1700, pp. 551–552 – *Opera*, pp. 892–894 – *Streitschriften*, pp. 455–457: 164

Ad Fratrem suum Johannem Bernoulli Professorem Groninganum Epistola, cum annexa Solutione Propria Problematis Isoperimetrici, Basileae 1700 – *Streitschriften*, pp. 471–484: 147

Ars Conjectandi, Opus Posthumum, Basileae 1713 – *Werke* 3, pp. 107–286: 66, 94, 131, 175, 251

BERNOULLI, Johann I

Op. IV, *Solutio Problematis Funicularii*: AE Junii 1691, pp. 274–276 – Joh.I B. *Opera* I, pp. 48–51: 112

Op. LVIII, *Cycloidis primariae segmenta innumera quadraturam recipientia* ...: AE Julii 1699, pp. 316–320 – Joh.I B. *Opera* I, pp. 322–327 – *Streitschriften*, pp. 393–399: 164

Op. LXIX, *Multisectio anguli vel arcus, duplici aequatione universali exhibita, inserviens generali determinationi omnium Zonarum quadrabilium cycloidis*: AE Aprilis 1701, pp. 170–175 – Joh.I B. *Opera* I, pp. 386–392 – *Streitschriften*, pp. 464–469: 164

BÈZE, Théodore de; MAROT, Clément

Les cent cinquante Pseaumes de David, mis en rime françoise, Paris 1562 [etc.]: 104

BOYLE, Robert

Paradoxa Hydrostatica Novis Experimentis ... evicta, Oxonii 1669: 146

CHAUVIN, Etienne

Nouvelles Litteraires: Nouveau Journal des Scavans, dressé à Berlin, May & Juin 1697, pp. 292–293: 126

CONRART, Valentin

Le Livre des Psaumes en vers français ..., Charenton 1677 [etc.]: 104

DATI, Carlo

Lettera a' Filaleti di Timauro Antiate, Della vera storia della Cicloide, Firenze 1663: 259

DECHALES, Claude François Milliet

Cursus seu Mundus Mathematicus, Editio Altera, Lugduni 1690: 144

EUCLIDE

Euclidis Elementorum Libri XV breviter demonstrati, Opera Is. Barrow ..., Londini 1678: 48, 49

Gregory, David
Catenaria: Phil. Trans. 231 (August 1697), pp. 637–652 – AE Julii 1698, pp. 305–321: 126

Gröning, Johann
Historia Cycloeidis ..., Hamburgi 1701: 258–265

Heinlin, Johann Jacob
Synopsis Mathematica Universalis. Nunc secundum ... edita, Tubingae 1663: 144

Hermann, Jacob
Na. 005, *Demonstratio Geminae Formulae ... pro multisectione anguli vel arcus circularis* ...: AE Augusti 1703, pp. 345–352: 165, 171

Huygens, Christiaan
De circuli magnitudine inventa. Accedunt ... problematum quorundam illustrium constructiones, Lugduni Batavorum 1654 – Huygens, *Œuvres*, t.XII, pp. 113–215: 264

Horologium Oscillatorium sive de Motu Pendulorum ad Horologia aptato Demonstrationes Geometricae, Parisiis 1673 – Huygens, *Œuvres*, t.XVIII, pp. 69–368: 136, 137, 264–265

Lalouère, Antoine de
De Cycloide Galilaei et Torricellii Propositiones viginti, Tolosae 1658: 259, 262

Veterum Geometria promota in septem de Cycloide libris, Tolosae 1660: 259, 264

Leibniz, Gottfried Wilhelm
Extrait d'une Lettre ... touchant la Quadrature d'une portion de la Roulette: JS 1678 (23. May), pp. 210–211 – Leibniz, *Math. Schriften* V, pp. 116–117: 264

De vera Proportione Circuli ad Quadratum circumscriptum in Numeris rationalibus: AE Februarii 1682, pp. 41–46 – Leibniz, *Math. Schriften* V, pp. 118–122: 45–46, 58, 87, 96, 100, 106, 151, 193

Meditatio juridico-mathematica de Interusurio simplice: AE Octobris 1683, pp. 425–432 – Leibniz, *Math. Schriften* VII, pp. 125–132: 45–46

Nova Methodus pro Maximis et Minimis ...: AE Octobris 1684, pp. 467–473 – Leibniz, *Math. Schriften* V, pp. 220–226: 107

Meditatio nova de Natura Anguli contactus & osculi ...: AE Junii 1686, pp. 289–292 – Leibniz, *Math. Schriften* VII, pp. 326–329: 82

Quadratura arithmetica communis Sectionum Conicarum ...: AE Aprilis 1691, pp. 178–182 – Leibniz, *Math. Schriften* V, pp. 128–132: 100, 103, 111, 115, 116, 164, 170

De linea in quam flexile se pondere proprio curvat ...: AE Junii 1691, pp. 277–281 – Leibniz, *Math. Schriften* V, pp. 243–247: 113

Generalia de Natura Linearum, anguloque contactus & osculi ...: AE Septembris 1692, pp. 440–446 – Leibniz, *Math. Schriften* V, pp. 279–285 – *Math. Schriften* VII, pp. 331–337: 82

Supplementum Geometriae practicae sese ad problemata transcendentia extendens, ope novae Methodi generalissimae per series infinitas: AE Aprilis 1693, pp. 178–180 – Leibniz, *Math. Schriften* V, pp. 285–288: 137

Constructio propria Problematis de Curva Isochrona Paracentrica ...: AE Augusti 1694, pp. 364–375 – Jac.B. *Opera*, pp. 627–637 – Leibniz, *Math. Schriften* V, pp. 309–318: 134

l'Hôpital, Guillaume-François Antoine de, marquis de Sainte-Mesme
Analyse des infiniment petits, pour l'intelligence des lignes courbes, Paris 1696: 87

Lobwasser, Ambrosius
Die Psalmen Davids, nach Frantzösischer Melodey ... in Teutsche Reimen gebracht, Basel 1613 [etc.]: 104

MEIBOM, Marc
De Proportionibus Dialogus, Hafniae 1655: 41

MEISNER, Johann
Theologia naturalis, Wittenbergae 1648: 104

MENTZEL, Christian
De Iride Solari in planitie terrae & Arachnio meteoro: Miscellanea Curiosa ..., Norimbergae 1687, pp. 273–277: 63

DE MOIVRE, Abraham
A Method of Raising an infinite Multinomial to any given Power, or Extracting any given Root of the same: Phil.Trans. 230 (July 1697), pp. 619–625: 175, 249, 251

NIEUWENTIJT, Bernhard
Considerationes secundae circa Calculi Differentialis Principia, Amstelaedami 1696: 105

PAPIN, Denis
A Continuation of the New Digester of Bones ... together with some Improvements and New Uses of the Air-Pump, London 1687: 146

Continuation du digesteur, ou Maniere d'amolir les os ..., Amsterdam 1687: 146

PASCAL, Blaise
Histoire de la Roulette, appellée autrement la Trochoïde ou la Cycloïde ..., Paris 1658: 260–261, 264

Lettres de A.Dettonville, contenant quelques-unes de ses Inventions de Geometrie, Paris 1659: 263

PEREIRA, Benito
De communibus omnium rerum naturalium principiis & affectionibus ..., Romae 1576: 104

RENALDINI, Carlo
De Resolutione, & Compositione Mathematica Libri duo, Patavii 1668: 105

ROBERVAL, Gilles Personne de
De Trochoide ejusque Spatio: *Divers Ouvrages de Mathematiques et de Physique*. Par Messieurs de l'Academie Royale des Sciences, Paris 1693, pp. 246–278: 259

Epistola ad Evangelistam Torricellium: *Divers Ouvrages ...*, pp. 284–302: 259

SCHEUCHZER, Johann Jacob
Nova Literaria Helvetica, Tiguri 1702: 147

STEVIN, Simon
Œuvres Mathématiques ..., par Albert Girard, Leyde 1634: 145

STURM, Johann Christoph
Collegium Experimentale, Sive Curiosum ..., Norimbergae 1676: 125

Mathesis Enucleata ..., Secunda nunc vice multo emendatior, Norimbergae 1695: 63, 105, 106

TORRICELLI, Evangelista
De dimensione Parabolae ... cum Appendice de dimensione spatii cycloidalis: *Opera geometrica*, Florentiae 1644: 258, 259, 262

WALLIS, John
Arithmetica Infinitorum, sive Nova Methodus Inquirendi in Curvilineorum Quadraturam, Oxonii 1656 – *Opera Mathematica*, vol. I, Oxoniae 1695, pp. 365–478: 93, 94, 129, 149, 231

Tractatus Duo: Prior, de Cycloide et corporibus inde genitis. Posterior, Epistolaris, In qua agitur, de Cissoide ..., Oxoniae 1659 – *Opera Mathematica*, vol. I, Oxoniae 1695, pp. 491–569: 262–264

[WALLIS, John]

Mechanica: sive, de Motu, Tractatus Geometricus, Londini 1670 – *Opera Mathematica*, vol. I, Oxoniae 1695, pp. 571–1063: 229

De Algebra Tractatus; Historicus & Practicus: *Opera Mathematica*, vol. II, Oxoniae 1693, pp. 1–483: 170

An Extract of a Letter ... concerning the Cycloeid known to Cardinal Cusanus, about the Year 1450; and to Carolus Bovillus about the Year 1500: Phil.Trans. 229 (June 1697), pp. 561–566: 258

WREN, Christopher

De recta tangente Cycloidem primariam: Wallis, *Tractatus Duo* ..., Oxoniae 1659, pp. 70–74 – Wallis, *Opera Mathematica*, vol. I, Oxoniae 1695, pp. 533–541: 264

WURSTISEN, Christian

Elementa Arithmeticae, logicis legibus deducta, Basileae 1579: 42

Index des matières

L'index alphabétique des matières traitées dans ce volume porte aussi bien sur les textes de Jacob Bernoulli que sur les passages de l'*Introduction* et les notes de bas de page où ces textes sont analysés.

Index des noms

La liste suivante comprend les noms de toutes les personnes citées tant dans les textes de Bernoulli que dans l'apparat critique. Nous nous sommes limités à quelques brèves indications biographiques, que nous avons omises pour nos contemporains et les personnes très connues.
Les numéros de page en italiques renvoient aux textes de Jacob Bernoulli; les références aux pages de titre et aux dédicaces des thèses, à l'introduction et aux notes de bas de page sont en caractères droits.

Liste des œuvres de Jacob Bernoulli

L'inventaire suivant comprend tous les travaux que Gabriel Cramer a repris dans les deux volumes de *Jacobi Bernoulli Basileensis Opera* (Genevae 1744), dans l'ordre presque chronologique de cette édition. Nous en donnons le titre et les indications bibliographiques de la première publication. Les traductions et les versions qui n'ont pas été reprises dans les *Opera* sont marquées d'une lettre placée en exposant. Les noms d'auteurs autres que Jacob Bernoulli ont été indiqués entre accolades, les numéros de leurs travaux en chiffres arabes.

Comme numéro CIII des *Opera*, Cramer a publié pour la première fois trente-deux extraits du journal scientifique de Jacob Bernoulli (*Meditationes*) sous le titre *Varia Posthuma*. Ces travaux sont repris dans la liste suivante avec les numéros VP I à VP XXXII; nous indiquons l'article correspondant des *Meditationes*.

Les quelques travaux publiés de Jacob Bernoulli qui n'ont pas été repris dans les *Opera*, et ses manuscrits scientifiques complètent la liste.

Pour les abréviations utilisées, voir *supra* p. XVI.

P. Radelet-de Grave

Opera

[Op. I[a] *Neu-erfundene Anleitung, wie man den Lauff der Comet- oder Schwantz-sternen in gewisse grundmässige Gesätze einrichten und ihre Erscheinung vorhersagen könne,* Basel 1681 (UB Kn VIII 16, 10) – *Werke* 1, pp. 134–151.]

Op. I *Conamen novi systematis Cometarum, pro motu eorum sub calculum revocando & apparitionibus praedicendis,* Amstelaedami 1682 (UB Kn VIII 37, 2) – *Opera*, pp. 1–44 – *Werke* 1, pp. 152–189.

Op. II *Dissertatio de Gravitate Aetheris,* Amstelaedami 1683 (UB Jl VIII 24) – *Opera,* pp. 45–163 – Werke 1, pp. 318–405.

Op. 3 {G.A. Borelli} *Nouvelle Machine pour respirer sous l'eau, tirée du Livre recemment venu d'Italie De Motu animalium composé par Alphonse Borelli*: JS 1682 (6. Juillet), pp. 215–218 – *Opera,* pp. 165–167 – *Werke* 1, pp. 436–438.

[Op. 3[a] {G.A. Borelli} *Machinae constructio, qua homines demersi intra aquam possent per plures horas respirare & vivere*: *De motu animalium,* Lugduni in Batavis 1685 – AE Februarii 1683, pp. 74–77.]

Op. IV *Examen de la Machine pour respirer sous l'eau du Sr. Borelli, proposée dans le Iournal du 6. Iuillet de l'année derniere 1682 tiré d'une Lettre du Sr. Bernoulli écrite de Bâle à l'auteur du Iournal, & conceuë à peu prés en ces termes*: JS 1683 (16. Aoust), pp. 250–252 – *Opera*, pp. 168–170 – *Werke* 1, pp. 439–440.

[Op. IV[a] *Examen Machinae urinatoriae a Borello excogitatae*: AE Decembris 1683, pp. 553–556 – *Werke* 1, pp. 441–443.]

Op. 5 {L.C.D.O.} *Machine pour élever les eaux de l'invention de M. L.C. D.O.*: JS 1682 (30. Mars), pp. 107–108 – *Opera*, pp. 171–172 – *Werke* 1, pp. 444–445.

Op. VI	*Doutes du Sieur Bernoulli sur la Machine hydraulique dont il a esté parlé dans le IX. Iournal de l'année derniere*: JS 1683 (29. Nov.), pp. 321–322 – *Opera*, p. 172–173 – *Werke* 1, p. 446.
Op. VII	*Centum Positionum Philosophicarum Cento*, Basileae 1684 (UB Kd III 17, 1) – *Opera*, pp. 175–192 – *Werke* 1, pp. 240–252.
Op. 8	{O. Mencke} *Relatio de Controversia, quae hactenus inter Dn. Hugenium & Dn. Catelanum agitatur de centro Oscillationis, collecta ex Ephemeridibus Gallicis*: AE Septembris 1684, pp. 416–419 – *Opera*, pp. 192–194.
Op. IX	*Extrait d'une Lettre du Sieur Bernoulli, sur le demélé de M. l'Abbé Catelan avec M. Hugens, touchant le centre d'Oscillation*: JS 1684 (24. Avril), pp. 142–143 – *Opera*, pp. 195–196.
Op. 10	{F. de Catelan} *Réponse de M. l'Abbé de Catelan à la lettre de M. Bernoulli*: JS 1684 (11. Septembre), pp. 313–316– *Opera*, pp. 197–198.
Op. XI	*Nouvelle Machine pour peser l'Air, inventée par le Sieur Bernoulli*: JS 1684 (31. Juillet), pp. 259–264 – *Opera*, pp. 199–203 – *Werke* 1, pp. 452–455.
[Op. XI[a]	*Nova ratio aeris ponderandi inventa a Bernoullio Math. Basileensi*: AE Septembris 1685, pp. 433–435 – *Werke* 1, pp. 456–457.]
Op. XII	*Probléme proposé par M. Bernoulli*: JS 1685 (14. May), p. 206 – *Opera*, pp. 203–204 – *Werke* 2, p. 320.
Op. XIII	*Examen de la manière de peser l'air dans une vessie*: JS 1685 (18. Juin), pp. 241–242 – *Opera*, pp. 204–206 – *Werke* 1, pp. 458–460.
Op. XIV	*Probleme proposé par M. Bernoulli*: JS 1685 (26. Aoust), p. 314 – *Opera*, p. 207 – *Werke* 3, p. 91.
Op. XV	*Extrait de trois Lettres écrites à l'auteur du Iournal contenant quelque chose de fort curieux*: JS 1685 (17. Septembre), p. 361 – *Opera*, pp. 207–208 – *Werke* 1, p. 212.
Op. XVI	*Extrait d'une Lettre de M. Bernoulli, contenant la maniere d'apprendre les Mathematiques aux Aveugles*: JS 1685 (19. Novembre), p. 386 – *Opera*, pp. 209–210 – *Werke* 1, pp. 257–258.
Op. XVII	*Parallelismus ratiocinii logici et algebraici*, Basileae 1685 (UB Kd III 17, 2) – *Opera*, pp. 211–224 – *Werke* 1, pp. 263–272.
Op. XVIII	*Theses logicae de conversione & oppositione enunciationum, cum Adnexis miscellaneis*, Basileae 1686 (UB Kd III 17, 3) – *Opera*, pp. 225–238 – *Werke* 1, pp. 275–284.
Op. XIX	*Dubium circa Causam Gravitatis a Rotatione Vorticis Terreni petitam*: AE Februarii 1686, pp. 91–95 – *Opera*, pp. 239–245 – *Werke* 1, pp. 401–405.
Op. 20	{G.F. Vanni} *Specimen Libri De Momentis gravium &c.*: AE Novembris 1684, pp. 511–514 – *Opera*, pp. 245–247.
Op. XXI	*Solutio Difficultatis contra Propositionem quandam Mechanicam*: AE Februarii 1686, pp. 96–98 – *Opera*, pp. 248–250.
Op. XXII	*Methodus ratiocinandi, sive usus Logicae in praeclaro aliquo Phaenomeno Physico enodando*, Basileae 1686 (UB Ki.Ar. H III 52, 20) – *Opera*, pp. 251–276 – *Werke* 1, pp. 285–301.

Op. XXIII	*Narratio Controversiae inter Dn. Hugenium & Abbatem Catelanum agitatae de Centro Oscillationis, quae loco Animadversionis esse poterit in Responsionem Dn. Catelani*: AE Julii 1686, pp. 356–360 – *Opera*, pp. 277–281.
Op. XXIV	*Demonstratio Rationum, quas habent series numerorum naturali progressione sese insequentium, vel quadratorum, cubicorum, &c. item trigonalium, pyramidalium &c. ad series numerorum totidem maximo aequalium*: AE Julii 1686, pp. 360–361 – *Opera*, pp. 282–283 – *Werke* 4, pp. 149–150.
[Op. 25[a]	{D. Papin} *Observations of Dr Papin, Fellow of the Royal Society, on a French Paper concerning a Perpetual Motion*: Phil. Trans. December 1685, pp. 1240–1241 – Nouv. Rep. Lettres 5 (1685), p. 577 – *Werke* 1, pp. 465–467.]
Op. 25	{D. Papin} *Examen perpetui mobilis, Parisiis publicati*: AE Decembris 1686, pp. 623–625 – *Opera*, pp. 284–285.
Op. XXVI	*Examen Bernoullianum*: AE Decembris 1686, pp. 625–629 – *Opera*, pp. 286–290 – *Werke* 1, pp. 468–471.
Op. XXVII	*Solutionem tergemini Problematis Arithmetici, Geometrici & Astronomici ... ventilandam sistit Jacobus Bernoulli*, Basileae 1687 (UB Ki.Ar.H III 41, 15) – *Opera*, pp. 291–313 – *Werke* 2, pp. 92–120.
Op. XXVIII	*Gemina Appendix ad Examen Perpetui Mobilis*: AE Junii 1687, pp. 314–324 – *Opera*, pp. 314–327 – *Werke* 1, pp. 472–482.
Op. XXIX	*Solutio algebraica Problematis de Quadrisectione Trianguli Scaleni per duas Normales rectas*: AE Novembris 1687, pp. 617–623 – *Opera*, pp. 328–335 – *Werke* 2, pp. 352–361.
Op. XXX	*Nova ratio metiendi altitudines Nubium*: AE Februarii 1688, pp. 98–103 – *Opera*, pp. 336–343 – *Werke* 1, pp. 213–217.
Op. XXXI	*Animadversio in Geometriam Cartesianam, & Constructio quorundam Problematum Hypersolidorum*: AE Junii 1688, pp. 323–330 – *Opera*, pp. 343–351 – *Werke* 2, pp. 471–479.
Op. 32	{D. Papin} *Dionysii Papini Meletemata ad geminam Appendicem de Perpetuo Mobili*: AE Junii 1688, pp. 335–339 – *Opera*, pp. 351–355 – *Werke* 1, pp. 483–486.
Op. XXXIII	*Appendix tertia ad Examen Perpetui Mobilis, qua ad Meletemata Dionysii Papini respondetur*: AE Novembris 1688, pp. 591–596 – *Opera*, pp. 355–360 – *Werke* 1, pp. 487–490.
Op. XXXIV	*Positiones Mathematicae de Rationibus et Proportionibus*, Basileae 1688 (UB Kd III 17, 5) – *Opera*, pp. 361–373 – *Werke* 4, pp. 35–44.
Op. XXXV	*Positiones Arithmeticae de Seriebus Infinitis, earumque Summa finita*, Basileae 1689 (UB Kd III 17, 6) – *Opera*, pp. 375–402 – *Werke* 4, pp. 45–64.
Op. XXXVI	*De invenienda cujusque plani declinatione, ex unica observatione projectae a stylo umbrae*: AE Junii 1689, pp. 311–316 – *Opera*, pp. 403–411 – *Werke* 1, pp. 106–111.
Op. XXXVII	*Vera Constructio Geometrica Problematum Solidorum & Hypersolidorum, per lineas rectas & circulos*: AE Septembris 1689, pp. 454–459 – *Opera*, pp. 411–418 – *Werke* 4, pp. 151–159.
Op. XXXVIII	*Novum Theorema pro doctrina Sectionum Conicarum*: AE Novembris 1689, pp. 586–588 – *Opera*, pp. 418–421 – *Werke* 2, pp. 195–198.

Op. XXXIX *Analysis Problematis, de inventione lineae descensus a corpore gravi percurrendae uniformiter*: AE Maji 1690, pp. 217–219 – *Opera*, pp. 421–426.

Op. XL *Quaestiones nonnullae de Usuris, cum solutione Problematis de Sorte Alearum*: AE Maji 1690, pp. 219–223 – *Opera*, pp. 427–431 – *Werke* 3, pp. 91–93 – *Werke* 4, pp. 160–163.

Op. XLI *Specimen Calculi differentialis in dimensione Parabolae helicoidis, ubi de flexuris curvarum in genere, earundem evolutionibus, aliisque*: AE Januarii 1691, pp. 13–23 – *Opera*, pp. 431–442.

Op. XLII *Specimen alterum Calculi differentialis in dimetienda Spirali Logarithmica, Loxodromiis Nautarum, & Areis Triangulorum Sphaericorum: una cum Additamento quodam ad Problema Funicularium, aliisque*: AE Junii 1691, pp. 282–290 – *Opera*, pp. 442–453.

Op. 43 {G.-F. de l'Hôpital} *Lettre de Mr. le Marquis de l'Hospital à Monsieur Huygens, dans laquelle il pretend demonstrer la regle de cet Auteur touchant le centre d'Oscillation du pendule composé, par sa cause physique, & répondre en même temps à Mr. Bernoulli*: HOS 1690 (Juin), pp. 440–449 – *Opera*, pp. 454–457.

Op. 44 {Ch. Huygens} *Remarques de Mr. Huygens sur la Lettre precedente, & sur le recit de Mr. Bernoulli dont on y fait mention*: HOS 1690 (Juin), pp. 449–453 – *Opera*, pp. 458–460.

Op. XLV *Demonstratio Centri Oscillationis ex Natura Vectis*: AE Julii 1691, pp. 317–321 – *Opera*, pp. 460–465.

Op. 46 {Joh. I Bernoulli} *Solutio Curvae Causticae per vulgarem Geometriam Cartesianam; aliaque*: AE Januarii 1692, pp. 30–35 – *Opera*, pp. 466–472 – *Streitschriften*, pp. 127–135.

Op. XLVII *Additamentum ad Solutionem Curvae Causticae fratris Jo. Bernoulli, una cum Meditatione de Natura Evolutarum, & variis osculationum generibus*: AE Martii 1692, pp. 110–116 – *Opera*, pp. 473–481 – *Streitschriften*, pp. 136–143.

Op. XLVIII *Curvatura Veli*: AE Maji 1692, pp. 202–207 – *Opera*, pp. 481–490.

Op. XLIX *Lineae Cycloidales, Evolutae, Ant-Evolutae, Causticae, Anti-Causticae, Peri-Causticae. Earum usus & simplex relatio ad se invicem. Spira mirabilis. Aliaque*: AE Maji 1692, pp. 207–213 – *Opera*, pp. 491–502.

Op. L *Additio ad Schedam de Lineis Cycloidalibus*: AE Junii 1692, pp. 291–296 – *Opera*, pp. 503–510.

Op. 51 {V. Viviani} *Aenigma geometricum de miro opificio Testudinis Quadrabilis Hemisphaericae a D. Pio Lisci Pusillo Geometra propositum*: AE Junii 1692, pp. 274–275 – *Opera*, pp. 511–512 – *Werke* 2, p. 515.

Op. LII *Aenigmatis Florentini Solutiones varie infinitae*: AE Augusti 1692, pp. 370–371 – *Opera*, pp. 512–515 – *Werke* 2, pp. 526–528.

Op. LIII *Solutio Problematis de minimo Crepusculo*: AE Septembris 1692, p. 446 – *Opera*, pp. 515–516 – *Werke* 1, pp. 226–227.

Op. LIV *Positionum Arithmeticarum de Seriebus Infinitis, earumque Summa finita Pars Altera*, Basileae 1692 (UB Kd III 17, 7) – *Opera*, pp. 517–542 – *Werke* 4, pp. 65–83.

Op. 55 {G.W. Leibniz} *Generalia de natura linearum, anguloque contactus & osculi, provolutionibus, aliisque cognatis, & eorum usibus nonnullis*: AE Septembris 1692, pp. 440–446 – *Opera*, pp. 543–548.

Op. LVI *Curvae Dia-Causticae, earum relatio ad Evolutas, aliaque nova his affinia. Item: Natura osculorum uberius explicata. Celeritates Navium definitae. Regulae pro Resistentiis, quas Figurae in Fluido motae patiuntur &c.*: AE Junii 1693, pp. 244–256 – *Opera*, pp. 549–573.

Op. 57 {Joh. I Bernoulli} *Problema ab Eruditis solvendum*: AE Maji 1693, p. 235 – *Opera*, p. 573 – *Streitschriften*, pp. 158–159.

Op. LVII *Solutio Problematis Fraterni*: AE Junii 1693, pp. 255–256 – *Opera*, pp. 574–576 – *Streitschriften*, pp. 160–162.

Op. LVIII *Curvatura Laminae Elasticae. Ejus Identitas cum Curvatura Lintei a pondere inclusi fluidi expansi. Radii Circulorum Osculantium in terminis simplicissimis exhibiti, una cum novis quibusdam Theorematis huc pertinentibus, &c.*: AE Junii 1694, pp. 262–276 – *Opera*, pp. 576–600.

Op. LIX *Solutio Problematis Leibnitiani de Curva Accessus & Recessus aequabilis a puncto dato, mediante rectificatione Curvae Elasticae*: AE Junii 1694, pp. 276–280 – *Opera*, pp. 601–607 – *Streitschriften*, pp. 174–180.

Op. LX *Constructio Curvae Accessus & Recessus aequabilis, ope rectificationis Curvae cujusdam Algebraicae*: AE Septembris 1694, pp. 336–338 – *Opera*, pp. 608–612 – *Streitschriften*, pp. 188–192.

Op. 61 {G.W. Leibniz} *Nova Calculi Differentialis Applicatio & usus, ad multiplicem linearum constructionem, ex data tangentium conditione*: AE Julii 1694, pp. 311–316 – *Opera*, pp. 613–618 – *Streitschriften*, pp. 181–187.

Op. LXII *De Methodo Tangentium Inversa, quousque tum in communis tum reconditioris Geometriae potestate sit & non sit*: AE Octobris 1694, pp. 391–394 – *Opera*, pp. 618–623 – *Streitschriften*, pp. 193–198.

Op. LXIII *Solutiones superioris problematis*: AE Februarii 1695, pp. 65–66 – *Opera*, pp. 624–626.

Op. 64 {G.W. Leibniz} *Constructio propria Problematis de Curva Isochrona Paracentrica*: AE Augusti 1694, pp. 364–375 – *Opera*, pp. 627–637.

Op. 65 {Ch. Huygens} *Excerpta ex Epistola C.H.Z. ad G.G.L.*: AE Septembris 1694, pp. 339–341 – *Opera*, pp. 637–639.

Op. LXVI *Explicationes, Annotationes et Additiones ad ea, quae in Actis sup. anni de Curva Elastica, Isochrona Paracentrica, & Velaria, hinc inde memorata, & partim controversa leguntur; ubi de Linea mediarum directionum, aliisque novis*: AE Decembris 1695, pp. 537–553 – *Opera*, pp. 639–663.

Op. LXVII *Notae et Animadversiones tumultuariae in Universum Opus*: Descartes, *Geometria*, Francofurti ad Moenum 1695, vol. II, pp. 421–468 – *Opera*, pp. 665–717 – *Werke* 2, pp. 547–602.

Op. 68 {E.W. von Tschirnhaus} *Nova & singularis Geometriae promotio, circa dimensionem quantitatum curvarum*: AE Novembris 1695, pp. 489–493 – *Opera*, pp. 718–722 – *Werke* 2, pp. 603–607.

Op. LXIX *Observatiuncula ad ea, quae nupero mense Novembri de Dimensionibus Curvarum publicata leguntur Auctore D.T.*: AE Junii 1696, pp. 260–261 – *Opera*, pp. 722–724 – *Werke* 2, pp. 608–610.

Op. LXX *Constructio generalis omnium Curvarum transcendentium ope simplicioris Tractoriae & Logarithmicae*: AE Junii 1696, pp. 261–263 – *Opera*, pp. 725–728.

Op. 71	{G.W. Leibniz} *Notatiuncula ad Acta Decemb. 1695, pag. 537 seqq.*: AE Martii 1696, pp. 145–147 – *Opera*, pp. 728–730.
Op. LXXII	*Problema Beaunianum universalius conceptum, sive Solutio Aequationis nupero Decembri propositae: $ady = ypdx + by^n qdx$, cum aliis quibusdam annotatis*: AE Julii 1696, pp. 332–337 – *Opera*, pp. 731–739 – *Streitschriften*, pp. 213–221.
Op. LXXIII	*Complanatio Superficierum Conoidicarum & Sphaeroidicarum*: AE Octobris 1696, pp. 479–481 – *Opera*, pp. 739–744 – *Werke* 2, pp. 611–614.
Op. LXXIV	*Positionum de Seriebus Infinitis Pars Tertia,* Basileae 1696 (UB Kd III 17, 8) – *Opera*, pp. 745–767 – *Werke* 4, pp. 85–106.
Op. LXXV	*Solutio Problematum Fraternorum, una cum Propositione reciproca aliorum*: AE Maji 1697, pp. 211–217 – *Opera*, pp. 768–778 – *Streitschriften*, pp. 271–282.
Op. LXXVI	*Solutio difficultatis cujusdam circa naturam Flexus contrarii*: AE Septembris 1697, pp. 410–412 – *Opera*, pp. 779–782.
Op. LXXVII	*Addenda ad constructionem Problematis Beauniani*: AE Septembris 1697, pp. 412–414 – *Opera*, pp. 782–785 – *Streitschriften*, pp. 294–297.
Op. LXXVIII	*Demonstratio synthetica Problematis de Infinitis Cycloidibus absque adminiculo infinite parvorum; item Constructio aliorum huic affinium*: AE Maji 1698, pp. 223–226 – *Opera*, pp. 785–794 – *Streitschriften*, pp. 323–331.
Op. 79	{Joh. I Bernoulli} *Problêmes à resoudre*: JS 1697 (26. Aoust), pp. 394–396 – *Opera*, pp. 795–796 – *Streitschriften*, pp. 292–293.
Op. LXXX	*Solutio sex Problematum Fraternorum*: AE Maji 1698, pp. 226–230 – *Opera*, pp. 796–806 – *Streitschriften*, pp. 332–341.
Op. LXXXI	*Solutio Problematis Fraterni de Curva infinitas Logarithmicas ad angulos rectos secante*: AE Maji 1698, pp. 230–232 – *Opera*, pp. 806–813 – *Streitschriften*, pp. 342–349.
Op. 82	{Joh. I Bernoulli} *Letre à M. Varignon*: JS 1697 (2. Decembre), pp. 458–465 – *Opera*, pp. 814–821 – *Streitschriften*, pp. 308–316.
Op. LXXXIII	*Avis sur les Problemes dont il est parlé dans le Journal du 2. Decembre 1697*: JS 1698 (17. Fevrier), pp. 78–79 – *Opera*, pp. 821–822 – *Streitschriften*, p. 317.
Op. 84	{Joh. I Bernoulli} *Réponse à l'Avis inseré dans le VII. Journal du 17. Février 1698*: JS 1698 (21. Avril), pp. 172–177 – *Opera*, pp. 822–826 – *Streitschriften*, pp. 318–322.
Op. LXXXV	*Avis de M. de Bernoulli Professeur des Matematiques à Bâle, sur la Réponse de son frere*: JS 1698 (26. Mai), p. 240 – *Opera*, p. 827 – *Streitschriften*, p. 354.
Op. 86	{Joh. I Bernoulli} *Réponse à l'avis inseré dans le Journal du 26. Mai 1698*: JS 1698 (23. Juin), pp. 284–285 – *Opera*, pp. 828–829 – *Streitschriften*, p. 355.
Op. LXXXVII	*Extrait d'une Lettre de M. Bernoulli de Bâle, contenant l'examen de la solution de ses problêmes*: JS 1698 (4. et 11. Août), pp. 355–364 – *Opera*, pp. 829–839 – *Streitschriften*, pp. 356–364.
Op. LXXXVIII	*Avis sur la reponse inserée dans le Journal du 23. Juin dernier*: JS 1698 (11. Août), pp. 364–365 – *Opera*, pp. 839–840 – *Streitschriften*, p. 375.
Op. 89	{Joh. I Bernoulli} *Extrait d'une letre pour servir de Réponse à celle de son Frere Professeur à Bâle*: JS 1698 (8. et 15. Décembre), pp. 477–485 – *Opera*, pp. 841–847 – *Streitschriften*, pp. 376–382.

Op. XC *Positionum de Seriebus Infinitis ... Pars Quarta,* Basileae 1698 (UB Kd III 17, 9) – *Opera*, pp. 849–867 – *Werke* 4, pp. 107–126.

Op. XCI *Circinus proportionum nauticus Scala Loxodromica instructus, hujusque fabrica mire facilis*: AE Februarii 1699, pp. 91–92 – *Opera*, pp. 868–870.

Op. XCII *Quadratura Zonarum cycloidalium demonstrata*: AE Septembris 1699, pp. 427–428 – *Opera*, pp. 871–873 – *Streitschriften*, pp. 400–403.

Op. XCIII *Solutio Propria Problematis Isoperimetrici*: AE Junii 1700, pp. 261–266 – *Opera*, pp. 874–887 – *Streitschriften*, pp. 404–419.

Op. XCIV *Nova Methodus expedite determinandi Radios Osculi seu Curvaturae in Curvis quibusvis Algebraicis*: AE Novembris 1700, pp. 508–511 – *Opera*, pp. 888–891.

Op. XCV *Quadratura Zonarum Cycloidalium promota; Problema item Centri grav. Sectoris solidi Cycloïdici solutum*: AE Decembris 1700, pp. 551–552 – *Opera*, pp. 892–894 – *Streitschriften*, pp. 455–457.

Op. XCVI *Analysis magni Problematis Isoperimetrici,* Basileae 1701 (UB Kd III 17, 12) – AE Maji 1701, pp. 213–228 – *Opera*, pp. 895–920 – *Streitschriften*, pp. 485–505.

Op. XCVII *Section indéfinie des Arcs circulaires en telle raison qu'on voudra, avec la maniére d'en déduire les Sinus, &c.*: Mém. Paris 1702, pp. 281–288 – *Opera*, pp. 921–929 – *Werke* 4, pp. 164–172.

Op. XCVIII *Démonstration générale du centre de Balancement ou d'Oscillation, tirée de la nature du Levier*: Mém. Paris 1703, pp. 78–84 – *Opera*, pp. 930–936.

Op. XCIX *Extrait d'une Lettre, contenant l'Application de sa Regle du Centre de Balancement à toutes sortes de figures*: Mém. Paris 1703, pp. 272–283 – *Opera*, pp. 937–946.

Op. C *Démonstration du Principe de M. Hugens, touchant le centre de Balancement, & de l'identité de ce centre avec celui de percussion*: Mém. Paris 1704, pp. 136–142 – *Opera*, pp. 947–953.

Op. CI *Positionum de Seriebus Infinitis ... Pars Quinta,* Basileae 1704 (UB Kd III 17, 10) – *Opera*, pp. 955–975 – *Werke* 4, pp. 127–147.

Op. CII *Veritable Hypothêse de la Résistance des Solides, avec la Démonstration de la Courbure des corps qui font Ressort*: Mém. Paris 1705, pp. 176–186 – *Opera*, pp. 976–989.

Op. CIII **Varia Posthuma**:

VP I *Attollere Infinitinomium ad potestatem indefinitam*: *Opera*, pp. 993–998 (Med. CCLXV) – *Werke* 4, pp. 175–180.

VP II *Regulae pro constructionibus curvarum quarundam transcendentium per rectificationes algebraicarum*: *Opera*, pp. 999–1006 (Med. CCXIX).

VP III *Regulae quaedam de summatione differentialium*: *Opera*, pp. 1007–1017 (Med. CCLXI, CCLXII, CCLXIII, CCLXIV, CCLXXVI) – *Streitschriften*, pp. 437–446.

VP IV *Demonstratio Anagrammatis Ephemerid. Paris. 11. August. 1698 inserti*: *Opera*, pp. 1017–1020 (Med. CCLIII) – *Streitschriften*, pp. 365–369.

VP V *Demonstratio posterioris Anagrammatis Ephemer. Paris. 11. Aug. 1698 inserti*: *Opera*, pp. 1021–1023 (Med. CCLIV) – *Streitschriften*, pp. 370–374.

VP VI *In Superficie Conoïdis ducere lineam omnium inter eosdem terminos brevissimam*: *Opera*, pp. 1023–1025 (Med. CCLII) – *Streitschriften*, pp. 350–353.

VP VII *In Superficie Conoidum, quae nascuntur ex circumductu lineae rectae altero extremo in puncto sublimi quiescentis, super data curva, ducere lineam brevissimam inter data duo puncta*: *Opera*, pp. 1025–1028 (Med. CCLVI) – *Streitschriften*, pp. 425–428.

VP VIII *Analysis ejusdem Problematis alia instituta methodo, non supponendo superficiem gibbam continue complanari posse*: *Opera*, pp. 1028–1029 (Med. CCLVII) – *Streitschriften*, pp. 429–432.

VP IX *Quaestio: Num Elastrum tensum, sublata subito vi tendente, eodem tempore in omnibus suis partibus in rectitudinem se restituat: an vero in aliis partibus citius, in aliis tardius?*: *Opera*, pp. 1030–1032 (Med. CCLI).

VP X *Demonstratio Theorematis de radiorum osculi usu in reducendis secundis differentiis ad primas*: *Opera*, pp. 1033–1036 (Med. CCXLIX).

VP XI *Filum ACDEFGB extremitatibus suis A & B suspensum ab infinitis potentiis C, D, E, F, G, juxta directiones quasvis HC, HD, IE, KF, LG agentibus extenditur. Quaeritur fili curvatura, ejus directio media LP, & vis, qua secundum LP impellitur?*: *Opera*, pp. 1036–1048 (Med. CCXLV).

VP XII *Aequationem* $dy = ayx^m\,dx + by^r\,x^v\,dx$ *construere, saltem per quadraturas; hoc est, separare in illa litteras indeterminatas cum suis differentialibus a se invicem*: *Opera*, pp. 1049–1057 (Med. CCXXXII) – *Streitschriften*, pp. 163–173.

VP XIII *De Celeritate & Declinatione (Dérive) Navis*: *Opera*, pp. 1057–1062 (Med. CCXXXIV, CCLV).

VP XIV *Invenire Curvam quam format radius lucis per aerem, qui inaequalis densitatis est, ad oculum nostrum delatus*: *Opera*, pp. 1063–1067 (Med. CLXXX).

VP XV *Invenire veram legem, secundum quam aeris densitas decrescit in altioribus Atmospherae locis, & simul determinare verum aeris atmosphaerici pondus*: *Opera*, pp. 1067–1074 (Med. CCVI).

VP XVI *Solutio Problematis de minimo Crepusculo*: *Opera*, pp. 1075–1077 (Med. CXCIII).

VP XVII *Invenire relationem inter Evolutas & Diacausticas*: *Opera*, pp. 1077–1080 (Med. CXCV).

VP XVIII *Celeritates navis a quiete inchoatas usque ad maximam invenire*: *Opera*, pp. 1080–1082 (Med. CXCVI).

VP XIX *Inventio curvae, cujus tangens abscindit ex axe segmentum, quod ad tangentem habeat constantem rationem*: *Opera*, pp. 1082–1084 (Med. CCIII) – *Streitschriften*, pp. 152–154.

VP XX *Invenire Curvam, cujus curvedo in singulis punctis est proportionalis longitudini arcus; id est, quae ab appenso pondere flectitur in rectam*: *Opera*, pp. 1084–1086 (Med. CCXVI)

VP XXI *Demonstratio analytica Constructionis mechanicarum curvarum omnium, ope Logarithmicae & alterius curvae algebraïcae per tractionem describendae; quae tradita est in Actis Lips. 1696, pag. 263*: *Opera*, pp. 1086–1087 (Med. CCXXXIII).

VP XXII *Observatiuncula singularis ad praxin Calculi differentialis, ejusque usus in radiis osculi inveniendis*: *Opera*, pp. 1088–1097 (Med. CCLVIII).

VP XXIII *Inventio Subtangentis & Subnormalis per praecedentem Methodum*: *Opera*, pp. 1098–1099 (Med. CCLIX).

VP XXIV *Extensio Methodi praecedentis pro radiis osculi inveniendis ad illas quoque aequationes algebraicas, in quibus occurrunt quantitates surdae pluri-membres, ut non opus sit surditatem ex aequatione tollere*: *Opera*, pp. 1099–1100 (Med. CCLX).

VP XXV *Invenire Radios osculi in Curvis per Focos descriptis*: *Opera*, pp. 1101–1105 (Med. CCLXVI).

VP XXVI *Inventio Centri Tensionis*: *Opera*, pp. 1105–1108 (Med. CCLXXIII).

VP XXVII *Artificium impellendi Navem a principio motus intra ipsam Navem concluso*: *Opera*, pp. 1109–1115 (Med. CCLXXIX).

VP XXVIII *Curvatura Conoidis in Automato, cui circumplicata catenula rotis horologii motum aequabilem conciliat*: *Opera*, pp. 1115–1118 (Med. CCLXXXII).

VP XXIX *Problema de Curvatura fornicis, cujus partes se mutuo proprio pondere suffulciunt sine opere caementi*: *Opera*, pp. 1119–1123 (Med. CCLXXXV).

VP XXX *Linea datae rigidae, ab infinitis potentiis secundum quasvis directiones impulsae tractaeve, determinare directionem mediam, axem aequilibrii & vim impulsus*: *Opera*, pp. 1124–1128 (Med. CCLXXXVI).

VP XXXI *De inventione Sectoris Cycloidici solidi, qui centrum gravitatis habeat algebraice determinabile*: *Opera*, pp. 1129–1134 (Med. CCLXIV bis) – *Streitschriften*, pp. 447–454.

VP XXXII *Quaedam formulae aequationum differentio-differentialium reductae ad aequationes differentiales primi generis*: *Opera*, pp. 1134–1139 (Med. CCXLVI) – *Streitschriften*, pp. 298–307.

Publications scientifiques non reprises dans les *Opera*

Ad Fratrem suum Johannem Bernoulli Professorem Groninganum Epistola, cum Annexa Solutione Propria Problematis Isoperimetrici, Basileae 1700 (UB Kd III 17, 11) – *Streitschriften*, pp. 471–484.

Ars Conjectandi, Opus Posthumum. Accedit Tractatus de Seriebus infinitis, et Epistola Gallice scripta de ludo Pilae reticularis, Basileae 1713 (UB Kg VII 1) – *Werke* 3, pp. 107–286.

Manuscrits scientifiques

Meditationes, Annotationes, Animadversiones Theologicae & Philosophicae, a me JB. concinnatae & collectae ab anno 1677 (UB Ms L I a 3).

Tabulae Gnomonicae Universales, 1679–1681 (UB Ms L I a 2) – *Werke* 1, pp. 16–93.

[*Marginalia in Archimedis Opera*], 1680/82 (UB Kf X 4) – *Werke* 2, pp. 163–178.

De Arte Combinatoria Oratio Inauguralis, 1692 (UB Ms L I a 749, 1) – *Werke* 3, pp. 98–106.

Oratio de Historia Cycloidis, 1701 (UB Ms L I a 749, 3) – *Werke* 4, pp. 257–266.

Typus Locorum Hypersolidorum, 1702/04 (UB Ms L I a 1, pp. 77–80).

Tableau synoptique des œuvres de Jacob Bernoulli

Les chiffres arabes de la table correspondent à la numérotation en chiffres romains des *Opera* (p.ex., «87» désigne «Jac.B. Op. LXXXVII»); l'ordre est basé sur la date de la première publication. Les sigles v1–v32 marquent les *Varia Posthuma* (Op. CIII; «v19» désigne donc «VP XIX»); leur ordre chronologique suit la datation des *Meditationes* correspondantes d'après la liste p. 298. Les manuscrits et les travaux non repris dans les *Opera* sont représentés par les sigles suivants:

AC	*Ars Conjectandi*
Ar	*Marginalia in Archimedis Opera*
CE 1–4	*Collegium Experimentale*
Com	*De Arte Combinatoria Oratio*
Epi	*Ad Fratrem Epistola*
Gn	*Tabulae Gnomonicae*
HC	*Oratio de Historia Cycloidis*
TL	*Typus Locorum Hypersolidorum*

Pour leur chronologie, cf. p. 295.

Werke	1a	1b	1c	2a	2b	2c	3	4	5	6	Str
	Astronomie, Geophysik	Logik und Methodenlehre	Physik, Technologie	Zahlentheorie	Elementare Geometrie	Cartesische Geometrie	Wahrscheinlichkeitsrechnung	Reihentheorie, Analysis	Differentialgeometrie	Mechanik, Physica Varia	Variationsrechnung
1680	Gn										
1681	1a										
1682	1		CE1		Ar						
1683			2								
			4								
			4a								
			6								
1684		7	CE2								
			11							9	
1685			11a			12					
	15	16	13				14				
		17									
1686		18	19							21	
		22	CE3					24		23	
			26								
1687			28	27		29					
1688	30		33			31		34			
1689	36							35			
					38			37			
1690			CE4				40	40		39	

Werke	1a Astronomie, Geophysik	1b Logik und Methodenlehre	1c Physik, Technologie	2a Zahlentheorie	2b Elementare Geometrie	2c Cartesische Geometrie	3 Wahrscheinlichkeitsrechnung	4 Reihentheorie, Analysis	5 Differentialgeometrie	6 Mechanik, Physica Varia	Str Variationsrechnung
1691									41		
									42	45	
1692	v16								49	v14	47
	53					52	Com	54	50	48	v19
1693									56		
									v17	v18	57
1694							AC			58	v12
										v15	59
										v20	60
									v2		62
1695						67			63	66	
1696						69			70	v13a	
						73		74	v21		72
1697									76		75
											77
											v32
1698											83
											78
										v11	80
										v10	81
								90		v9	v6
											85
											87
											v4
											v5
									v22	v13b	88
1699									v23	91	92
1700									v24		93
									94		v7
											v8
											v3a
											v31
											95
											Epi
1701								HC	v25		96
1702								v1		v26	v3b
								97		v27	
										v28	
1703									TL	98	
										99	
1704										100	
										v29	
								101		v30	
1705										102	

Datation des *Meditationes* et des *Varia Posthuma*

Terminus post quem	Meditationes & Varia Posthuma	Terminus ante quem
1677	Med. I	1677
1677	Med. II–XI	8.5.1678
1677	Med. XII–XXV	16.2.1680
29.11.1679	Med. XXVI–XXXII	11.8.1681
29.11.1679	Med. XXXIII–XLIX	15.1.1684
29.11.1679	Med. L–LVII	26.8.1685
18.1.1684	Med. LVIII–LXVI	26.8.1685
18.1.1684	Med. LXVII–LXXVII	9.9.1685
18.1.1684	Med. LXXVIII–LXXXVI	11.1687
4.6.1686	Med. LXXXVII–CVIII	11.1687
4.6.1686	Med. CIX–CXXVI	6.1688
1687	Med. CXXVII–CXLII	7.6.1689
1687	Med. CXLIII–CL	9.1689
1689	Med. CLI–CLVI	9.1689
1689	Med. CLVII–CLXI	1.1691
1689	Med. CLXII	6.1691
1689	Med. CLXIII–CLXV	9.3.1692
1689	Med. CLXVI–CLXVIII	5.1692
25.5.1691	Med. CLXIX–CLXXIII	5.1692
11.6.1691	Med. CLXXIV–CLXXX [VP XIV]–CLXXXIII	5.1692
1.1692	Med. CLXXXIV–CLXXXVI	5.1692
1.1692	Med. CLXXXVII–CXCII	6.1692
1.1692	Med. CXCIII [VP XVI]	20.7.1692
6.1692	Med. CXCIV, CXCV [VP XVII], CXCVI [VP XVIII]	6.1693
6.1692	Med. CXCVII–CCIII [VP XIX]–CCVI [VP XV]	12.1695
14.9.1693	Med. CCVII	12.1695
20.11.1693	Med. CCVIII	12.1695
27.11.1693	Med. CCIX–CCXVI [VP XX]–CCXVIII	12.1695
9.1694	Med. CCXIX [VP II]–CCXXIV	12.1695
9.1694	Med. CCXXV–CCXXXII [VP XII], CCXXXIII [VP XXI]	6.1696
9.1694	Med. CCXXXIV [VP XIII (Pars)]–CCXXXV	7.1696
2.1697	Med. CCXXXVI–CCXXXIX	5.1697
5.1697	Med. CCXL–CCXLI	11.1697
11.1697	Med. CCXLII	11.1697
11.1697	Med. CCXLIII – CCXLV [VP XI], CCXLVI [VP XXXII] – CCXLIX [VP X]–CCLI [VP IX], CCLII [VP VI]	5.1698
11.8.1698	Med. CCLIII [VP IV], CCLIV [VP V], CCLV [VP XIII (Pars)]–CCLVI [VP VII], CCLVII [VP VIII], CCLVIII [VP XXII]	11.1700
11.8.1698	Med. CCLIX [VP XXIII], CCLX [VP XXIV]	12.1701
22.1.1701	Med. CCLXI [VP III (Pars)], CCLXII [VP III (Pars)], CCLXIII [VP III (Pars)]	12.1701
4.1701	Med. CCLXIV [VP XXXI], CCLXV [VP I], CCLXVI [VP XXV]	12.1701
4.1701	Med. CCLXVII–CCLXXIII [VP XXVI]–CCLXXVI [VP III(Pars)]–CCLXXIX [VP XXVII] – CCLXXXII [VP XXVIII]	1.11.1703
1.11.1703	Med. CCLXXXIII	1.11.1703
28.11.1704	Med. CCLXXXIV	28.11.1704
5.12.1704	Med. CCLXXXV [VP XXIX]	5.12.1704
12.12.1704	Med. CCLXXXVI [VP XXX]	12.12.1704

P.Radelet – C.S.Roero