ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

J. BASS

Fonctions de corrélation des fonctions pseudo-aléatoires

Annales de l'I. H. P., section B, tome 25, nº 4 (1989), p. 503-515

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1989__25_4_503_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. 25, n° 4, 1989, p. 503-515. *Probabilités et Statistiques*

Fonctions de corrélation des fonctions pseudo-aléatoires

par

J. BASS
Université Pierre-et-Marie-Curie (Paris-VI)

RÉSUMÉ. — $\gamma(\tau)$ étant donné, il existe un procédé théorique (Wiener, Bertrandias) pour construire l'une des nombreuses solutions f de l'équation :

$$\gamma(\tau) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \bar{f}(t) f(t+\tau)\, dt.$$

Mais ce procédé tient compte trop exclusivement du comportement asymptotique de f quand $\tau \to \infty$. Dans la pratique, il est bon de trouver des solutions f qui soient aussi localement définies. On en donne divers moyens, qui ne constituent cependant pas tout à fait une doctrine cohérente.

Mots clés : Fonctions de corrélation, fonctions pseudo-aléatoires.

ABSTRACT. — For a given $\gamma(\tau)$ a theory permit us (Wiener, Bertrandias) to find solutions f of the equation

$$\gamma(\tau) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \bar{f}(t) f(t+\tau)\, dt.$$

But this theory is too uniquely related to the behaviour of f at $t = +\infty$. For the applications, it is useful to find solutions f which are together locally and asymptotically defined. In this paper, some methods are indicated, which are the approach of a coherent doctrine.

1.

Soit $f(t)$ une fonction définie pour tout t, nulle pour $t<0$, bornée, à valeurs réelles ou complexes. On appelle fonction de corrélation de f la fonction :

$$\gamma(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \bar{f}(t)\,f(t+\tau)\,dt. \tag{1}$$

Je m'intéresserai aux cas où cette limite existe et est une fonction continue de τ. C'est une moyenne. Si l'on représente d'une façon générale par M l'opérateur de moyenne,

$$M(\quad)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T(\quad)\,dt,$$

on a

$$\gamma(\tau)=M\bar{f}(t)\,f(t+\tau).$$

[Il arrive que, f étant définie pour tout réel, on appelle opérateur de moyenne l'opérateur $M(\quad)=\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}(\quad)\,dt$. Dans ce qui suit, nous adopterons la définition (1)].

On sait [3] que $\gamma(\tau)$ est une fonction de type positif. Il existe une mesure spectrale positive Φ telle que

$$\gamma(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\tau}\,d\Phi(x). \tag{2}$$

Si Φ est absolument continue, il existe une densité spectrale φ, positive et intégrable sur $\mathbb{R}$, telle que :

$$\gamma(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\tau}\,\varphi(x)\,dx. \tag{3}$$

En particulier

$$\gamma(0)=M\,|f|^2=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\,dx.$$

De (2), on déduit facilement que $\gamma(-\tau)=\bar{\gamma}(\tau)$, $|\gamma(\tau)|\leqq\gamma(0)$.

Enfin, s'il y a une densité spectrale, $\lim\limits_{\tau\to\infty}\gamma(\tau)=0$.

Une fonction f ayant une densité spectrale est appelée une fonction *pseudo-aléatoire* (dénomination introduite par J. Bass en 1959). On se pose la question suivante :

étant donnée une fonction $\gamma(\tau)$ qui a les propriétés d'une fonction de corrélation, peut-on trouver une fonction f dont elle provienne ?

Ce problème ne peut pas avoir une solution unique. La formule (1) ne définit f que par son comportement asymptotique. Si f est une solution, toute fonction obtenue en modifiant f sur un intervalle borné est encore une solution.

Lorsque $\gamma(\tau)$ est une série de Fourier-Bohr à convergence suffisamment rapide, il est facile de construire des fonctions f. Si en effet

$$\gamma(\tau)=\sum_k a_k e^{i\omega_k\tau} \qquad (a_k>0)$$

toute fonction de la forme

$$f(t)=\sum_k \sqrt{a_k}\, e^{i\lambda_k} e^{i\omega_k t}$$

répond à la question, avec des phases λ_k arbitrairement choisies. $f(t)$ est presque périodique. On dit aussi que f a un spectre de raies.

Dans ce qui suit, nous allons nous intéresser au cas où f est pseudo-aléatoire. N. Wiener [8], puis J. P. Bertrandias [4], ont donné une méthode permettant de construire explicitement une fonction f admettant γ pour fonction de corrélation. Elle consiste à construire une suite d'approximations périodiques de la densité spectrale φ, et à leur associer une suite de fonctions périodiques g_1, g_2, ... On partage l'intervalle $[0, +\infty[$ en une réunion d'intervalle I_k de plus en plus grands, qu'on peut choisir de telle sorte que la fonction f égale à g_k sur I_k admette φ comme densité spectrale.

Cette méthode est bien adaptée au problème posé. Mais elle ne s'intéresse pas au comportement local de f, qui n'a pas d'influence sur les moyennes. Or ce comportement peut avoir de l'importance. On peut par exemple demander que f soit solution d'une équation différentielle, et soit en outre pseudo-aléatoire. Les propriétés asymptotiques de f sont alors la conséquence des propriétés locales. Il est donc utile de chercher d'autres solutions au problème posé.

On pourrait se proposer de trouver f comme limite d'une suite de fonctions f_n, associées à des approximations de γ. Posons

$$\gamma_n(\tau)=\frac{1}{n}\sum_k \varphi\left(\frac{k}{n}\right)e^{i(k/n)\tau}. \tag{4}$$

Lorsque $n\to\infty$, avec peu de restrictions sur φ, $\gamma_n(\tau)$ tend, pour chaque τ, vers

$$\gamma(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\,e^{ix\tau}\,dx. \tag{4}$$

Or $\gamma_n(\tau)$ est la fonction de corrélation de

$$f_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_k \sqrt{\varphi\left(\frac{k}{n}\right)} e^{i(k/n)t} e^{i\lambda_k(n)}. \tag{5}$$

Supposons cette série absolument convergente. Est-il possible de choisir les $\lambda_k(n)$ de telle sorte que :

1° $f_n(t)$ tende vers une limite f, au sens de la convergence simple;

2° f ait pour fonction de corrélation $\lim\limits_{n \to \infty} \gamma_n(\tau)$?

On sait par des exemples que cela est possible [3], mais on sait aussi que, si une suite de fonctions f_n tend vers une limite f, $\mathrm{M} f_n$ ne tend pas nécessairement vers $\mathrm{M} f$ $\left[\text{exemple : } f_n(t) = \cos \frac{t}{n}\right]$. Ce procédé semble donc dépourvu de portée générale.

Je vais indiquer un certain nombre de procédés qui, dans biens des cas, permettent de répondre à la question posée ci-dessus.

2. RAPPEL DE QUELQUES RÉSULTATS [3]

On sait construire des fonctions admettant comme fonction de corrélation

$$\gamma(\tau) = (1 - |\tau|)\,\mathbf{1}(\tau) \tag{6}$$

où $\mathbf{1}(\tau) = 1$ si $|\tau| < 1$, $1(\tau) = 0$ si $|\tau| > 1$ et comme densité spectrale $\varphi(x) = \frac{2}{\pi x^2} \sin^2 \frac{x}{2}$.

Rappelons comment on peut procéder [2].

On donne une fonction h intégrable au sens de Riemann telle que

$$\int_0^1 h(x)\,dx = 0, \qquad \int_0^1 |h(x)|^2\,dx = 1. \tag{7}$$

On donne une suite de nombres réels u_n doublement équirépartie sur [0,1]. Cela signifie que, quel que soit l'entier $k > 0$, la suite $\{u_n, u_{n+k}\}$ est équirépartie dans le carré $[0,1]^2$.

La fonction en escalier, nulle pour $t < 0$, égale à $h(u_n)$ pour $0 \leq n < t < n+1$, admet pour fonction de corrélation la fonction (6), qui joue jusqu'à un certain point pour les fonctions pseudo-aléatoires le rôle de la fonction $e^{i\omega\tau}$ pour les fonctions presque périodiques.

Ce résultat se prête à diverses extensions. Voici la plus remarquable.

Soit toujours h une fonction satisfaisant à (7). Soit d'autre part r une fonction réelle définie sur [0,1], non négative, bornée, telle que $\int_0^1 r(z)\,dz=1$.

On donne une suite z_n équirépartie sur [0,1] et une suite u_n doublement équirépartie. On désigne par t_n une suite telle que

$$t_{n+1}-t_n=r(z_n). \tag{8}$$

On démontre [3] que la fonction $f(t)$ égale à $h(u_n)$ si $t_n<t<t_{n+1}$ est pseudo-aléatoire. Sa fonction de corrélation γ est égale à

$$\gamma(\tau)=\begin{cases} 0 & \text{si } \tau>\sup\limits_{0\leqq z\leqq 1} r(z) \\ \displaystyle\int_{r(z)>\tau}[r(z)-\tau]\,dz & \text{si } 0<\tau<\sup\limits_{0\leqq z\leqq 1} r(z). \end{cases} \tag{9}$$

Exemples. — (*a*) $r(z)=1$. On retrouve $\gamma(\tau)=1-\tau$ pour $0<\tau<1$.

(*b*) $r(z)=2z$. On trouve

$$\gamma(\tau)=\frac{1}{4}(2-\tau)^2 \qquad \text{pour} \quad 0\leqq\tau\leqq 2$$
$$0 \qquad \text{pour} \quad \tau\geqq 2.$$

(*c*)
$$r(z)=\frac{4}{3} \quad \text{si} \quad 0<z<\frac{1}{2}$$
$$=\frac{2}{3} \quad \text{si} \quad \frac{1}{2}<z<1,$$

On trouve

$$\gamma(\tau)=1-\tau \qquad \text{si} \quad 0\leqq\tau\leqq\frac{2}{3}$$
$$=\frac{2}{3}-\frac{\tau}{2} \qquad \text{si} \quad \frac{2}{3}\leqq\tau\leqq\frac{4}{3}.$$
$$=0 \qquad \text{si} \quad \tau\geqq\frac{4}{3}$$

Dans ce cas, $\gamma(\tau)$ est une ligne brisée continue formée de deux segments. Pour $\tau=\frac{2}{3}$, $\gamma(\tau)=\frac{1}{3}$.

(*d*) $r(z)=3z^2$. On trouve

$$\gamma(\tau)=1-\tau+\frac{2}{3\sqrt{3}}\tau^{3/2} \qquad \text{pour} \quad 0\leqq\tau\leqq 3$$
$$=0 \qquad \text{pour} \quad \tau\geqq 3.$$

Voici une nouvelle extension du résultat précédent [3].

Conservons la formule (9) mais sans l'hypothèse que r est bornée. Supposons seulement que l'intégrale généralisée $\int_0^1 r(z)\,dz$ existe. Alors la formule

$$\gamma(\tau)=\int_{r(z)>\tau}[r(z)-\tau]\,dz \qquad (\text{pour } \tau>0)$$

définit toujours une fonction de corrélation, qui n'est autre qu'une fonction de Polya (paire, continue, décroissante, convexe, tendant vers 0 à l'infini). Si en effet on pose

$$s=r(z), \qquad z=\rho(s), \tag{10}$$

on a

$$\gamma(\tau)=-\int_\tau^\infty (s-\tau)\,d\rho(s)=\int_\tau^\infty \rho(s)\,ds$$

γ a donc presque partout une dérivée négative et décroissante.

Mais rien ne prouve que, pour une fonction r choisie, il existe effectivement une fonction f ayant γ pour fonction de corrélation : il revient au même de dire que, si r est une fonction non bornée telle que $\int_0^1 r(z)\,dz$ existe, et z_n une suite équirépartie, le théorème de H. Weyl n'est pas nécessairement satisfait.

L'égalité

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N} r(z_n)=\int_0^1 r(z)\,dz$$

n'est pas vraie en général. La fonction r étant donnée, elle dépend essentiellement du comportement de la suite z_n. On connaît cependant des cas où il est possible d'associer des fonctions f à une fonction r. Le plus simple est celui où

$$r(z)=-\log z. \tag{11}$$

On démontre [3] que le théorème de Weyl est vérifié par les suites $z_n=n\theta$ (modulo 1), où θ est un irrationnel algébrique. Dans ce cas, on construit la fonction f par le procédé indiqué plus haut. Elle a pour fonction de corrélation $e^{-|\tau|}$, pour densité spectrale $\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$. On remarquera que $\gamma(\tau)$ est une fonction à support non borné [1].

[1] On peut généraliser ce cas particulier. *Voir* par exemple [7].

3. TRANSFORMATION PAR CONVOLUTION

On sait [3] que, si f_0 est pseudo-aléatoire et si $K \in L^1$, la convolution $f = K * f_0$ est pseudo-aléatoire. Si φ_0 est la densité spectrale de f_0, celle de f est

$$\varphi = |\hat{K}|^2 \varphi_0 \tag{12}$$

où $\hat{K}$ est la transformée de Fourier de K, définie par $\int_{-\infty}^{\infty} K(s)\, e^{isx}\, ds$.

Ce résultat, associé au paragraphe précédent, permet de construire de nombreuses fonctions pseudo-aléatoires.

Exemple : *Fonction ayant pour fonction de corrélation*

$$\gamma(\tau) = \sqrt{2\pi}\, e^{-\tau^2/2} \tag{13}$$

pour densité spectrale

$$\varphi(x) = e^{-x^2/2}.$$

Soit f_0 une fonction ayant pour densité spectrale $\frac{1}{1+x^2}$. Nous avons vu comment on pouvait en construire. Posons

$$e^{-(x^2/2)} = |\hat{K}(x)|^2 \frac{1}{1+x^2}, \qquad \hat{K}(x) = (1+x^2)^{1/2}\, e^{-(x^2/4)}. \tag{14}$$

Alors

$$K(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (1+s^2)^{1/2}\, e^{-(s^2/4)}\, e^{-isx}\, ds \tag{15}$$

est une fonction intégrable, non élémentaire, mais bien déterminée. Une solution du problème posé est

$$f(t) = (K * f_0)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(t-x)\, f_0(x)\, dx.$$

Mais le résultat énoncé ci-dessus peut être étendu au cas où K est une distribution, un cas intermédiaire étant celui où l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} K(x)\, f_0(t-x)\, dx$ existe en tant qu'intégrale semi-convergente.

Rappelons d'abord quelques propriétés des distributions pseudo-aléatoires, d'après Vo Khac [5].

On dit que la distribution u est pseudo-aléatoire si sa convolution $u * \psi$ par une fonction arbitraire de l'espace S (espace des fonctions indéfiniment dérivables à décroissance rapide) est une fonction pseudo-aléatoire.

La distribution de corrélation γ de u est définie par

$$M(u * \psi)(\bar{u} * \bar{\psi}_1) = \langle \gamma, \psi * \tilde{\bar{\psi}}_1 \rangle, \qquad \psi, \psi_1 \in S, \quad \tilde{\bar{\psi}}_1(x) = \bar{\psi}_1(-x).$$

On vérifie que, si u est une fonction, γ est bien sa fonction de corrélation au sens usuel.

Supposons maintenant que u soit de la forme $K * f_0$, où f_0 est une fonction et K une distribution. Le calcul donne l'expression de la distribution de corrélation :

$$\gamma = \gamma_0 * \tilde{K} * K, \qquad \text{où} \quad \tilde{K}(x) = \bar{K}(-x) \tag{16}$$

(sous réserve de l'existence de $\tilde{K} * K$).

Lorsque K est une fonction de L^1, on retrouve naturellement la formule (12). Voici quelques exemples de circonstances différentes.

Supposons d'abord que K soit de la forme

$$K = a\delta + K_1$$

où a est un nombre complexe donné et où $K_1 \in L^1$. On a alors

$$f = af_0 + K_1 * f_0.$$

La densité spectrale de f est égale à

$$\varphi(x) = |a + \hat{K}_1|^2 \varphi_0(x).$$

Exemple : *Fonction ayant pour densité spectrale*

$$\varphi(x) = \frac{x^4}{(1+x^2)^3}.$$

On choisit pour f_0 une fonction ayant pour densité spectrale $\dfrac{1}{1+x^2}$. On pose donc

$$\frac{x^4}{(1+x^2)^3} = |a + \hat{K}_1|^2 \frac{1}{1+x^2}, \qquad a + \hat{K}_1 = \frac{x^2}{1+x^2}.$$

On a donc

$$a = 1, \qquad \hat{K}_1(x) = -\frac{1}{1+x^2}, \qquad K_1(s) = -\frac{1}{2} e^{-|s|}.$$

D'où la formule explicite

$$f(t) = f_0(t) - \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-|t-s|} f_0(s)\, ds.$$

4. FONCTIONS AYANT UNE DENSITÉ SPECTRALE A SUPPORT BORNÉ

Il s'agit de construire une fonction f ayant pour densité spectrale la fonction $\mathbf{1}_a(x)$, égale à 1 si $-a < x < a$, à 0 en dehors.

Soit f_0 une des fonctions ayant pour densité spectrale $\frac{2}{\pi x^2}\sin^2\frac{x}{2}$.

Prenons a tel que $0<a<2\pi$. Cherchons K telle que l'on ait

$$\mathbf{1}_a(x)=|\hat{\mathrm{K}}(x)|^2\frac{2}{\pi x^2}\sin^2\frac{x}{2},\qquad \text{ou}\qquad \hat{\mathrm{K}}(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{x}{\sin(x/2)}\mathbf{1}_a(x).\tag{17}$$

$\hat{\mathrm{K}}$ est paire, continue et deux fois dérivable sur $]-a, a[$. Elle est donc transformée de la fonction K telle que

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\mathrm{K}(s)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a}\hat{\mathrm{K}}(x)\,e^{-ixs}\,dx\\ &=\frac{\hat{\mathrm{K}}(a)}{\pi}\,\frac{\sin as}{s}+\frac{1}{2i\pi s}\int_{-a}^{a}e^{-ixs}(\hat{\mathrm{K}}(x))'\,dx.\end{aligned}\tag{18}$$

Une seconde intégration par parties montre que le dernier terme est dans L^1. On peut écrire

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\mathrm{K}(s)=\frac{\hat{\mathrm{K}}(a)}{\pi}\,\frac{\sin as}{s}+\mathrm{K}_1(s),\qquad \mathrm{K}_1\in\mathrm{L}^1.\tag{19}$$

Donc

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}f(t)=\frac{\hat{\mathrm{K}}(a)}{\pi}\,\frac{\sin at}{t}\ast f_0(t)+(\mathrm{K}_1\ast f_0)(t).\tag{20}$$

Par suite, l'existence de f découle de celle de la fonction

$$g=\frac{\sin at}{t}\ast f_0=\int_0^\infty\frac{\sin a(t-s)}{t-s}f_0(s)\,ds\qquad [f_0(s)=0 \text{ si } s<0].\tag{21}$$

THÉORÈME. — *Soit $f_0(t)$ une fonction égale à*

$$e^{2i\pi\theta n^2}\ \text{ si } 0\leqq n<t<n+1,\qquad \textit{à } 0\quad \textit{si } t<0$$

où θ est un irrationnel quadratique.

Si c est un entier positif, la convolution $\frac{\sin 4\pi\theta ct}{t}\ast f_0$ *définit une fonction f.*

(D'après ce qui précède, cette fonction est pseudo-aléatoire.)

Démonstration :

$$
\begin{aligned}
f(t) = \int_0^\infty \frac{\sin 4\pi\theta c(t-s)}{t-s} f_0(s)\,ds \\
= \sum_{n=0}^{\infty} e^{2i\pi\theta n^2} \int_n^{n+1} \frac{\sin 4\pi\theta c(t-s)}{t-s}\,ds \\
= \sum_{n=0}^{\infty} e^{2i\pi\theta n^2} \int_0^1 \frac{\sin 4\pi\theta c(n+x-t)}{n+x-t}\,dx. \quad (22)
\end{aligned}
$$

Il faut montrer que cette série converge pour chaque t fixé.

Soit m la partie entière de t. Dans la série (22), il y a un nombre fini de termes pour lesquels $n \leqq m$. Il suffit donc d'étudier la série avec $\sum_{n=m+1}^{\infty}$.

Tous les dénominateurs $n+x-t$ sont alors positifs. On sépare la série en deux :

$$
\sum_{n=m+1}^{\infty} e^{2i\pi\theta n^2} \int_0^1 \frac{e^{4i\pi\theta c(n+x-t)}}{n+x+t}\,dx \tag{23}
$$

et la série déduite de (23) par changement de c en $-c$, qui se traite de la même façon. On peut écrire (23) sous la forme

$$
\sum_{n=m+1}^{\infty} e^{2i\pi\theta(n+c)^2} \int_0^1 \frac{e^{2i\pi\theta c[2(x-t)-c]}}{n+x-t}\,dx. \tag{24}
$$

Or on sait [6] que, avec les hypothèses faites sur θ et c,

$$
\left.
\begin{array}{c}
1+\ldots+e^{2i\pi\theta(n+c)^2} = \mathrm{A}_n\sqrt{n+c} = \mathrm{B}_n\sqrt{n}, \\
|\mathrm{B}_n| \text{ étant borné : } |\mathrm{B}_n| < \mathrm{B}.
\end{array}
\right\} \tag{25}
$$

Par conséquent

$$
e^{2i\pi\theta(n+c)^2} = \mathrm{B}_n\sqrt{n} - \mathrm{B}_{n-1}\sqrt{n-1}. \tag{26}
$$

La série (24) est équivalente à la série de terme général

$$
\begin{aligned}
\mathrm{B}_n\sqrt{n} \int_0^1 e^{2i\pi\theta c[2(x-t)-c]} \left(\frac{1}{x+n-t} - \frac{1}{x+n+1-t} \right) dt \\
= \mathrm{B}_n\sqrt{n} \int_0^1 \frac{e^{2i\pi\theta c[2(x-t)-c]}}{(x+n-t)(x+n+1-t)}\,dx, \qquad n \geqq m+1. \quad (27)
\end{aligned}
$$

Ce terme est majoré par

$$
\frac{\mathrm{B}\sqrt{n}}{(n-t)(n+1-t)},
$$

terme général d'une série convergente.

La série (22) est donc convergente, et $g=\frac{\sin 4\pi\theta ct}{t}*f_0$ existe. g a pour densité spectrale $\frac{2\pi}{x^2}\sin^2\frac{x}{2}.\mathbf{1}_{4\pi\theta c}(x)$.

5. SÉRIES DE FONCTIONS INDÉPENDANTES

Supposons que les fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ soient deux à deux indépendantes, c'est-à-dire que, pour $p\neq n$, on ait quelque soit τ :

$$\mathrm{M}\,\bar{f}_n(t)\,f_p(t+\tau)=0. \tag{28}$$

Pour $p=n$, on a

$$\mathrm{M}\,\bar{f}_n(t)\,f_n(t+\tau)=\gamma_n(\tau).$$

C'est la fonction de corrélation de f_n, qui n'est pas nulle, du moins au voisinage de 0. Supposons en outre que les fonctions f_n soient bornées dans leur ensemble. Soit $\{c_n\}$ une suite de nombres complexes tels que $\sum|c_n|<\infty$. Posons

$$f(t)=\sum_{k=1}^{\infty}c_k f_k(t). \tag{29}$$

On a, grâce à la convergence absolue,

$$\bar{f}(t)\,f(t+\tau)=\sum_{kl}c_k\bar{c}_l f_k(t)\,\bar{f}_l(t+\tau). \tag{30}$$

Par suite, la fonction de corrélation de f a pour expression

$$\gamma(\tau)=\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2\gamma_k(\tau). \tag{31}$$

Cette formule est bien connue lorsque $f_k(t)=e^{i\omega kt}$. Elle se démontre avec des hypothèses un peu moins restrictives. Mais elle est valable dans des conditions beaucoup plus générales. Elle s'applique aux sous-espaces de l'espace de Marcinkiewicz engendrés par des familles de fonctions indépendantes. Lorsque ces fonctions sont pseudo-aléatoires, leurs combinaisons linéaires (29) le sont aussi. Il faut montrer qu'on peut construire des familles de fonctions indépendantes. En voici des exemples.

Soit $\mathrm{P}(t)$ un polynôme de degré $\nu\geqq 2$ dont le terme en t^ν a un coefficient θ irrationnel. On sait que la fonction définie par

$$\begin{aligned} f(t)&=e^{2i\pi \mathrm{P}(n)} && \text{si}\quad 0\leqq n<t<n+1\\ &=0 && \text{si}\quad t<0 \end{aligned}$$

est pseudo-aléatoire.

Soit alors Q un second polynôme, ν' son degré, θ' son plus haut coefficient.

Appelons de même g la fonction associée à ce polynôme.

f et g sont indépendantes dans les deux cas suivants :

si $\nu \neq \nu'$;

si $\nu = \nu'$ et si θ et θ' sont arithmétiquement indépendants.

En effet, si $\hat{t}$ représente la partie entière de t, on a

$$
\begin{aligned}
\mathrm{M}\,\bar{f}(t)\,g(t+\tau) &= \lim_{\mathrm{N}\to\infty} \frac{1}{\mathrm{N}} \int_0^{\mathrm{N}} e^{2i\pi[\mathrm{Q}(t+\tau)-\mathrm{P}(\hat{t})]}\,dt \\
&= \lim_{\mathrm{N}\to\infty} \frac{1}{\mathrm{N}} \sum_{n=0}^{\mathrm{N}-1} \int_n^{n+1} e^{2i\pi[\mathrm{Q}(t+\tau)-\mathrm{P}(\hat{t})]}\,dt \\
&= \lim_{\mathrm{N}\to\infty} \frac{1}{\mathrm{N}} \sum_{n=0}^{\mathrm{N}-1} \int_0^{1} e^{2i\pi[\mathrm{Q}(n+s+\tau)-\mathrm{P}(n)]}\,ds.
\end{aligned}
$$

Or

$$
\begin{aligned}
\widehat{s+\tau} = \hat{s}+\hat{\tau} = \hat{\tau} \quad &\text{si } s < 1-\underset{\vee}{\tau} \qquad ((\underset{\vee}{\tau} = \tau - \hat{\tau}) \\
= \hat{\tau}+1 \quad &\text{si } s > 1-\underset{\vee}{\tau}.
\end{aligned}
$$

D'où

$$
(1-\underset{\vee}{\tau}) \lim_{\mathrm{N}\to\infty} \frac{1}{\mathrm{N}} \sum_{n=0}^{\mathrm{N}-1} e^{2i\pi[\mathrm{Q}(n\star\tau)-\mathrm{P}(n)]} + \underset{\vee}{\tau} \lim_{\mathrm{N}\to\infty} \frac{1}{\mathrm{N}} \sum_{n=0}^{\mathrm{N}-1} e^{2i\pi[\mathrm{Q}(n+\hat{\tau}+1)-\mathrm{P}(n)]}.
$$

Si $\nu \neq \nu'$, on a en exposant un polynôme de degré sup (ν, ν').

Si $\nu = \nu'$, on a un polynôme de degré ν dont le terme de plus haut degré a pour coefficient le nombre irrationnel $\theta' - \theta$. Dans les deux cas, le théorème de Weyl s'applique. La limite est nulle quelque soit τ. Je rappelle que, si $\mathrm{P} = \mathrm{Q}$, la limite est nulle sauf pour $\hat{\tau} = 0$, $0 \leqq \tau < 1$. Elle fournit alors la fonction de corrélation de f.

On a donc des séries de la forme

$$
\sum c_k\, e^{2i\pi \mathrm{P}_k(\hat{t})}
$$

où les P_k sont bien une suite de polynômes de degré croissant, ou bien des polynômes de même degré dont les termes de plus haut degré ont pour exposants les termes d'une suite arithmétiquement indépendante (exemple θ^k, θ transcendant).

Bien d'autres modèles de suite de fonctions indépendantes peuvent être imaginés. Il n'est pas utile de les donner ici.

RÉFÉRENCES

[1] J. BASS, Les fonctions pseudo-aléatoires, *Mémorial des sciences mathématiques*, Gauthier-Villars, 1962.

[2] J. BASS, Fonctions stationnaires, fonctions de corrélation, application à la représentation spatio-temporelle de la turbulence, *Ann. Inst. H. Poincaré*, vol. **V,** 1969.

[3] J. BASS, *Fonctions de corrélation, fonctions pseudo-aléatoires et applications*, Masson, 1984.

[4] J. P. BERTRANDIAS, Opérateurs subordinatifs sur des espaces de fonctions bornées en moyenne quadratique, *J. Math. Pures Appl.*, t **52**, 1974.

[5] J. P. BERTRANDIAS, J. COUOT, J. DHOMBRES, M. MENDÈS-FRANCE, PHAM PHU HIEN et VO KHAC KHOAN, *Espaces de Marcinkiewicz, corrélations, mesures, systèmes dynamiques*, Masson, 1987.

[6] G. H. HARDY et J. E. LITTLEWOOD, Some Problems of Diophantine Approximation. *Acta mathematica*, vol. **37**, 1917.

[7] G. H. HARDY et J. E. LITTLEWOOD, Notes on the Theory of Series: a Curious Power Series, *Proc. of the Cambridge Phil. Soc.*, vol. **42**, 1946.

[8] N. WIENER et A. WINTNER, On Singular Distributions, *J. Math. Physics*, vol. **17**, 1939.

(*Manuscrit reçu le* 23 *juin* 1988)
(*révisé le* 16 *mai* 1989.)