wo sich das erste Glied aufhebt, die übrigen aber durch x dividirt geben $b + cx + dxx = 2fp + ppx$, welches eine quadratische Gleichung ist, daraus x gefunden wird wie folget

$$x = \frac{pp - c + \sqrt{(p^4 - 2cpp + 8dfp + cc - 4bd)}}{2d}.$$

Anjetzo kommt es also darauf an, daß man solche Werthe für p ausfindig mache, wodurch diese Formel $p^4 - 2cpp + 8dfp + cc - 4bd$ ein Quadrat werde. Da nun hier die vierte Potestät der gesuchten Zahl p vorkommt, so gehört dieser Fall in das folgende Capitel.

CAPITEL 9

VON DER ART DIESE IRRATIONAL-FORMEL $\sqrt{(a + bx + cxx + dx^3 + ex^4)}$ RATIONAL ZU MACHEN

128.

Wir kommen nun zu solchen Formeln wo die unbestimmte Zahl x zur vierten Potestät ansteigt, womit wir zu gleich unsere Untersuchung über die Quadrat-Wurzel-Zeichen endigen müßen, indem man es bisher noch nicht so weit gebracht, daß man Formeln wo höhere Potestäten von x vorkommen zu Quadrate machen könnte.

Bey dieser Formel kommen aber drey Fälle in Betrachtung; davon der erste ist, wann das erste Glied a ein Quadrat; der andere, wann das letzte ex^4 ein Quadrat ist; der dritte Fall wann das erste und letzte Glied zugleich Quadrate sind, welche drey Fälle wir hier besonders abhandeln wollen.

129.

I.) Auflösung der Formel

$$\sqrt{(ff + bx + cxx + dx^3 + ex^4)}.$$

Da hier das erste Glied ein Quadrat ist so könnte man auch nach der ersten Methode die Wurzel $= f + px$ setzen, und p so bestimmen, daß die beyden erste Glieder wegfielen, und die übrigen sich durch xx theilen ließen; allein alsdann würde in der Gleichung doch noch xx vorkommen, und also die Bestimmung des x ein neues Wurzel-Zeichen erfordern. Man muß also sogleich die zweyte Methode zur Hand nehmen und die Wurzel $= f + px + qxx$ setzen, hierauf die Buchstaben p und q so bestimmen, daß die drey ersten Glieder wegfallen, und also die übrigen durch x^3 theilbar werden, da dann nur eine einfache Gleichung heraus kommt, aus welcher x ohne Wurzel-Zeichen bestimmt werden kann.

130.

Man setze dahero die Wurzel $= f + px + qxx$, also daß seyn soll

$$ff + bx + cxx + dx^3 + ex^4 = ff + 2fpx + 2fqxx + ppxx + 2pqx^3 + qqx^4,$$

wo die ersten Glieder von selbsten wegfallen; für die zweyten setze man $b = 2fp$, oder $p = \frac{b}{2f}$, so muß für die dritten Glieder seyn $c = 2fq + pp$, oder $q = \frac{c-pp}{2f}$; ist dieses geschehen, so laßen sich die übrigen Glieder durch x^3 theilen und geben diese Gleichung $d + ex = 2pq + qqx$: woraus gefunden wird

$$x = \frac{d-2pq}{qq-e}, \quad \text{oder} \quad x = \frac{2pq-d}{e-qq}.$$

131.

Es ist aber leicht zu sehen daß durch diese Methode nichts gefunden wird, wann das zweyte und dritte Glied in der Formel mangelt, oder wann so wohl $b = 0$ als $c = 0$, weil alsdann $p = 0$ und $q = 0$; folglich $x = \frac{d}{-e}$, woraus aber gemeiniglich nichts neues gefunden werden kann, dann in diesem Fall wird offenbahr $dx^3 + ex^4 = 0$, und allso unsere Formel dem Quadrat ff gleich. Insonderheit aber, wann auch $d = 0$, so kommt $x = 0$, welcher Werth nichts weiter hilft, dahero diese Methode für solche Formel $ff + ex^4$ keine Dienste leistet. Eben dieser Umstand ereignet sich auch, wann $b = 0$ und $d = 0$, oder wann das zweyte und vierte Glied mangelt, und die Formel diese Gestalt hat $ff + cxx + ex^4$; dann da wird $p = 0$ und $q = \frac{c}{2f}$, woraus gefunden wird $x = 0$, welcher Werth so gleich in die Augen fällt und zu nichts weiter führet.

132.

II.) Auflösung der Formel

$$\sqrt{(a + bx + cxx + dx^3 + ggx^4)}.$$

Diese Formel könnte so gleich auf den ersten Fall gebracht werden, indem man setzet $x = \frac{1}{y}$, dann weil alsdann diese Formel $a + \frac{b}{y} + \frac{c}{yy} + \frac{d}{y^3} + \frac{gg}{y^4}$

ein Quadrat sein müßte, so muß auch dieselbe mit dem Quadrat y^4 multiplicirt ein Quadrat bleiben; alsdann aber bekommt man diese Formel

$$ay^4 + by^3 + cyy + dy + gg,$$

welche rückwerts geschrieben der obigen vollkommen ähnlich ist.

Man hat aber dieses nicht nöthig, sondern man kann die Wurzel davon also ansetzen $gxx + px + q$, oder umgekehrt $q + px + gxx$, da dann

$$a + bx + cxx + dx^3 + ggx^4 = qq + 2pqx + 2gqxx + ppxx + 2gpx^3 + ggx^4,$$

weil sich nun hier die fünfte Glieder von selbsten aufheben, so bestimme man erstlich p, also daß sich auch die vierte Glieder aufheben, welches geschieht wann $d = 2gp$ oder $p = \frac{d}{2g}$, hernach bestimme man weiter q, also daß sich auch die dritten Glieder aufheben welches geschieht wann $c = 2gq + pp$, oder $q = \frac{c - pp}{2g}$; ist dieses geschehen, so geben die zwey ersten Glieder diese Gleichung $a + bx = qq + 2pqx$, woraus gefunden wird

$$x = \frac{a - qq}{2pq - b}, \quad \text{oder} \quad x = \frac{qq - a}{b - 2pq}.$$

133.

Hier ereignet sich wiederum der oben angeführte Mangel, wann das zweyte und vierte Glied fehlt, oder wann $b = 0$ und $d = 0$; dann da wird $p = 0$ und $q = \frac{c}{2g}$, hieraus also $x = \frac{a - qq}{0}$, welcher Werth unendlich groß ist, und eben so wenig zu etwas führet als der Werth $x = 0$ im erstern Fall; dahero diese Methode bey solchen Gleichungen $a + cxx + ggx^4$ gar nicht gebraucht werden kann.

134.

III.) Auflösung der Formel

$$\sqrt{(ff + bx + cxx + dx^3 + ggx^4)}.$$

Es ist klar daß bey dieser Formel beyde obige Methoden angebracht werden können, dann da das erste Glied ein Quadrat ist, so kann man die Wurzel setzen $f + px + qxx$ und die drey ersten Glieder verschwinden machen; hernach weil das letzte Glied ein Quadrat ist, so kann man die Wurzel auch setzen $q + px + gxx$, und die drey letzten Glieder verschwinden machen, da man dann zwey Werthe für x heraus bringt.

Allein man kann auch diese Formel noch auf zwey andere Arten behandeln, die derselben eigen sind.

Nach der ersten Art setzt man die Wurzel $= f + px + gxx$, und bestimmt p also daß die zweyten Glieder wegfallen, weil nemlich sein soll:

$$ff + bx + cxx + dx^3 + ggx^4 = ff + 2fpx + 2fgxx + ppxx + 2gpx^3 + ggx^4,$$

so mache man $b = 2fp$ oder $p = \frac{b}{2f}$, und weil alsdann nicht nur die ersten und letzten Glieder sondern auch die zweyten sich einander aufheben, so geben die übrigen durch xx dividirt diese Gleichung $c + dx = 2fg + pp + 2gpx$, woraus gefunden wird

$$x = \frac{c - 2fg - pp}{2gp - d}, \quad \text{oder} \quad x = \frac{pp + 2fg - c}{d - 2gp}.$$

Hier ist insonderheit zu mercken daß da in der Formel nur das Quadrat gg vorkommt, die Wurzel davon g so wohl negativ als positiv genommen werden kann; woraus man noch einen andern Werth für x erhält, nemlich

$$x = \frac{c + 2fg - pp}{-2gp - d}, \quad \text{oder} \quad x = \frac{pp - 2fg - c}{2gp + d}.$$

135.

Es giebt auch noch ein anderer Weg diese Formel aufzulösen: man setzt nemlich wie vorhero die Wurzel $= f + px + gxx$, bestimmt aber p dergestalt, daß die vierten Glieder sich einander aufheben nemlich man setzt in der obigen Gleichung $d = 2gp$ oder $p = \frac{d}{2g}$, und weil auch das erste Glied mit dem letzten wegfällt, so geben die übrigen durch x dividirt diese einfache Gleichung $b + cx = 2fp + 2fgx + ppx$, woraus man findet

$$x = \frac{b - 2fp}{2fg + pp - c};$$

wobey zu mercken daß weil in der Formel nur das Quadrat ff vorkommt, die Wurzel davon auch $-f$ gesetzt werden könne, also daß auch seyn wird

$$x = \frac{b + 2fp}{pp - 2fg - c};$$

also daß auch hieraus zwey neue Werthe für x gefunden werden und folglich durch die bisher erklärte Methode in allem sechs neue Werthe heraus gebracht worden.

136.

Hier ereignet sich aber auch wiederum der verdrießliche Umstand, daß wann das zweyte und vierte Glied mangelt, oder $b = 0$ und $d = 0$, kein tüchtiger Werth für x herausgebracht werden kann, und also die Auflösung dieser Formel $ff + cxx + ggx^4$ dadurch nicht erhalten werden kann. Dann weil $b = 0$ und $d = 0$, so hat man für die beyde Arten $p = 0$, und dahero giebt die erste $x = \frac{c - 2fg}{0}$, die andere Art aber $x = 0$, aus welchen beyden nichts weiter gefunden werden kann.

137.

Dieses sind nun die drey Formeln auf welche die bisher erklärten Methoden angewandt werden können; wann aber in der gegebenen Formel weder das erste noch das letzte Glied ein Quadrat ist, so ist nichts auszurichten, bis man einen solchen Werth für x errathen hat durch welchen die Formel ein Quadrat wird. Laßt uns demnach setzen, man hätte schon gefunden daß unsere Formel ein Quadrat werde wann man setzt $x = h$, also daß $a + bh + chh + dh^3 + eh^4 = kk$, so darf man nur setzen $x = h + y$, so bekommt man eine neue Formel in welcher das erste Glied seyn wird kk und also ein Quadrat, dahero der erste Fall gebraucht werden kann. Diese Verwandelung kann auch gebraucht werden, wann man in den vorhergehenden Fällen schon einen Werth für x als z. E. $x = h$ gefunden hat; dann da darf man nur setzen $x = h + y$, so erhält man eine neue Gleichung auf welche die obige Methode angewandt werden könne: da man dann aus dem schon gefundenen Werthe für x andere neue herausbringen kann, und mit diesen neuen kann man wieder auf gleiche Weise verfahren und also immer mehr neue Werthe für x ausfindig machen.

138.

Insonderheit aber ist von den schon öfters gemeldeten Formeln wo das zweyte und vierte Glied mangelt zu mercken, daß keine Auflösung von denselben zu haben ist, wofern man nicht schon eine gleichsam errathen hat; wie aber alsdann zu verfahren sey, wollen wir bey dieser Formel $a + ex^4$ zeigen, als welche sehr oft vorzukommen pflegt.

Wir wollen also setzen man habe schon einen Werth $x = h$ errathen, also daß da sey $a + eh^4 = kk$, um nun daraus noch andere zu finden setze man $x = h + y$, so wird diese Formel ein Quadrat seyn müßen

$$a + eh^4 + 4eh^3y + 6ehhyy + 4ehy^3 + ey^4,$$

das ist $kk + 4eh^3y + 6ehhyy + 4ehy^3 + ey^4$, welche zu der ersten Art gehöret; man setze dahero die Quadrat-Wurzel davon $k + py + qyy$ und folglich unsere Formel gleich diesem Quadrat

$$kk + 2kpy + 2kqyy + ppyy + 2pqy^3 + qqy^4,$$

wo erstlich p und q so bestimmt werden müßen daß auch die zweyten Glieder wegfallen, weswegen seyn muß $4eh^3 = 2kp$ und also $p = \frac{2eh^3}{k}$; ferner $6ehh = 2kq + pp$, dahero $q = \frac{6ehh - pp}{2k}$, oder $q = \frac{3ehhkk - 2eeh^6}{k^3}$, oder $q = \frac{ehh(3kk - 2eh^4)}{k^3}$; folglich da $eh^4 = kk - a$, so wird $q = \frac{ehh(kk + 2a)}{k^3}$; hernach geben die folgende Glieder durch y^3 dividirt $4eh + ey = 2pq + qqy$, woraus gefunden wird

$$y = \frac{4eh - 2pq}{qq - e},$$

wovon der Zehler in diese Form $\frac{4ehk^4 - 4eeh^5(kk + 2a)}{k^4}$ gebracht wird, welche ferner da $eh^4 = kk - a$, in dieser verwandelt wird $\frac{4ehk^4 - 4eh(kk - a)(kk + 2a)}{k^4}$, oder $\frac{4eh(-akk + 2a^2)}{k^4}$, oder $\frac{4aeh(2a - kk)}{k^4}$. Der Nenner aber $qq - e$ wird $= \frac{e(kk - a)(kk + 2a)^2 - ek^6}{k^6}$, und dieses wird $= \frac{e(3ak^4 - 4a^3)}{k^6} = \frac{ea(3k^4 - 4aa)}{k^6}$, woraus der gesuchte Wert seyn wird

$$y = \frac{4aeh(2a - kk)}{k^4} \cdot \frac{k^6}{ae(3k^4 - 4aa)}, \quad \text{das ist} \quad y = \frac{4hkk(2a - kk)}{3k^4 - 4aa},$$

und dahero

$$x = \frac{h(8akk - k^4 - 4aa)}{3k^4 - 4aa}, \quad \text{oder} \quad x = \frac{h(k^4 - 8akk + 4aa)}{4aa - 3k^4}.$$

Setzt man nun diesen Werth für x, so wird unsere Formel, nemlich $a + ex^4$, ein Quadrat davon die Wurzel seyn wird $k + py + qyy$, so zu dieser Form gebracht wird:

$$k + \frac{8k(kk - a)(2a - kk)}{3k^4 - 4aa} + \frac{16k(kk - a)(kk + 2a)(2a - kk)^2}{(3k^4 - 4aa)^2},$$

weil aus den obigen ist

$$p = \frac{2eh^3}{k}, \quad \text{und} \quad q = \frac{ehh(kk + 2a)}{k^3}, \quad \text{und} \quad y = \frac{4hkk(2a - kk)}{3k^4 - 4aa}.$$

139.

Wir wollen bey dieser Formel $a + ex^4$ noch stehen bleiben und weil der Fall $a + eh^4 = kk$ bekandt ist, so können wir denselben als zwey Fälle ansehen weil so wohl $x = -h$ als $x = +h$, und deswegen können wir diese Formel in eine andere von der dritten Art verwandeln wo das erste und letzte Glied Quadrate werden. Solches geschieht wann wir setzen $x = \frac{h(1+y)}{1-y}$, welcher Kunstgrif öfters gute Dienste thut, also wird unsere Formel:

$$\frac{a(1-y)^4 + eh^4(1+y)^4}{(1-y)^4} \text{ oder } \frac{kk + 4(kk-2a)y + 6kkyy + 4(kk-2a)y^3 + kky^4}{(1-y)^4};$$

hiervon setze man die Quadrat-Wurzel nach dem dritten Fall $\frac{k+py-kyy}{(1-y)^2}$, also daß der Zähler unserer Formel gleich seyn muß diesem Quadrat

$$kk + 2kpy - 2kkyy + ppyy - 2kpy^3 + kky^4.$$

Man mache daß die zweyten Glieder wegfallen, welches geschieht wann $4kk - 8a = 2kp$, oder $p = \frac{2kk-4a}{k}$; die übrigen Glieder durch yy dividirt geben $6kk + 4(kk-2a)y = -2kk + pp - 2kpy$, oder $y(4kk - 8a + 2kp) = pp - 8kk$, da nun $p = \frac{2kk-4a}{k}$, und $pk = 2kk - 4a$, so wird

$$y(8kk - 16a) = \frac{-4k^4 - 16akk + 16aa}{kk}, \quad \text{folglich} \quad y = \frac{-k^4 - 4akk + 4aa}{kk(2kk-4a)};$$

um nun daraus x zu finden, so ist erstlich $1 + y = \frac{k^4 - 8akk + 4aa}{kk(2kk-4a)}$, und denn zweytens $1 - y = \frac{3k^4 - 4aa}{kk(2kk-4a)}$; also $\frac{1+y}{1-y} = \frac{k^4 - 8akk + 4aa}{3k^4 - 4aa}$; folglich bekommen wir

$$x = \frac{k^4 - 8akk + 4aa}{3k^4 - 4aa} \cdot h,$$

welches aber der nemliche Ausdruck ist, den wir schon vorher gefunden haben.

140.

Um dieses mit einem Exempel zu erläutern, so sey diese Formel gegeben $2x^4 - 1$, welche ein Quadrat seyn soll. Hier ist nun $a = -1$ und $e = 2$, der bekante Fall aber, wo diese Formel ein Quadrat wird, ist wann $x = 1$: also ist $h = 1$ und $kk = 1$, das ist $k = 1$; hieraus erhalten wir also sogleich diesen neuen Werth $x = \frac{1+8+4}{3-4} = -13$, weil aber von x nur die vierte Potestät vorkommt, so kann man auch setzen $x = +13$, und daraus wird $2x^4 - 1 = 57121 = (239)^2$.

Nehmen wir nun diesen Fall als bekant an, so wird $h=13$ und $k=239$, woraus wieder ein neuer Werth für x gefunden wird, nemlich

$$x=\frac{3262808641+456968+4}{9788425923-4}\cdot 13=\frac{3263265613}{9788425919}\cdot 13,\text{ also wird } x=\frac{42422452969}{9788425919}\text{ [1]}.$$

141.

Auf gleiche Weise wollen wir die etwas allgemeinere Formel $a+cxx+ex^4$ betrachten, und für den bekanten Fall, da dieselbe ein Quadrat wird, annehmen $x=h$, also daß $a+chh+eh^4=kk$. Um nun daraus andere zu finden, so setze man $x=h+y$, da dann unsere Formel diese Gestalt bekommen wird:

$$\begin{array}{l}
a\\
chh+2chy+cyy\\
\underline{eh^4\;+4eh^3y+6ehhyy+4ehy^3+ey^4}\\
kk+(2ch+4eh^3)y+(c+6ehh)yy+4ehy^3+ey^4
\end{array}$$

wo das erste Glied ein Quadrat ist: man setze demnach die Quadrat-Wurzel davon $k+py+qyy$, also daß unsere Formel diesem Quadrat gleich seyn soll

$$kk+2kpy+2kqyy+ppyy+2pqy^3+qqy^4;$$

nun bestimme man p und q also daß die zweyten und dritten Glieder wegfallen, worzu erfordert wird, erstlich daß $2ch+4eh^3=2kp$ oder $p=\frac{ch+2eh^3}{k}$, hernach aber daß $c+6ehh=2kq+pp$, oder $q=\frac{c+6ehh-pp}{2k}$; alsdann geben die folgende Glieder durch y^3 dividirt diese Gleichung $4eh+ey=2pq+qqy$, daraus gefunden wird $y=\frac{4eh-2pq}{qq-e}$, und daraus ferner $x=h+y$; in welchem Fall die Quadrat-Wurzel aus unsere Formel seyn wird $k+py+qyy$. Sieht man nun dieses wieder als den anfänglich bekanten Fall an, so findet man daraus wieder einen neuen Fall, und kann demnach solcher Gestalt so weit fortgehen als man will.

142.

Um dieses zu erläutern, so sey die gegebene Formel $1-xx+x^4$, wo folglich $a=1$, $c=-1$ und $e=1$. Der bekante Fall fällt so gleich in die

1) Im Original ist irrtümlich der Wert $k=169$ statt $k=239$ zugrunde gelegt worden, woraus sich dann für x der Wert $\frac{10607469769}{2447192159}$ ergab. H. W.

Augen nemlich $x = 1$, also daß $h = 1$ und $k = 1$. Setzt man nun $x = 1 + y$, und die Quadrat-Wurzel unserer Formel $= 1 + py + qyy$, so muß erstlich seyn $p = 1$ und hernach $q = 2$; hieraus wird gefunden $y = 0$ und $x = 1$, welches eben der schon bekante Fall ist, und also kein neuer gefunden worden. Man kann aber aus andern Gründen beweisen daß diese Formel kein Quadrat seyn kann, außer in den Fällen $x = 0$ und $x = \pm 1$.

143.

Es sey ferner diese Formel zum Exempel gegeben $2 - 3xx + 2x^4$, wo $a = 2$, $c = -3$ und $e = 2$. Der bekante Fall giebt sich auch sogleich, nemlich $x = 1$: es sey demnach $h = 1$, so wird $k = 1$; setzt man nun $x = 1 + y$ und die Quadrat-Wurzel $1 + py + qyy$, so wird $p = 1$ und $q = 4$, daraus erhalten wir $y = 0$ und $x = 1$, woraus wieder nichts neues gefunden wird.

144.

Ein anderes Exempel sey diese Formel $1 + 8xx + x^4$, wo $a = 1$, $c = 8$ und $e = 1$. Nach einer geringen Betrachtung ergiebt sich der Fall $x = 2$; dann nimmt man $h = 2$ so wird $k = 7$, setzt man nun $x = 2 + y$, und die Wurzel $7 + py + qyy$, so muß seyn $p = \frac{32}{7}$, und $q = \frac{272}{343}$; hieraus erhalten wir $y = -\frac{5880}{2911}$ und $x = -\frac{58}{2911}$, wo das Zeichen *minus* weggelaßen werden kann. Bey diesem Exempel aber ist zu mercken, daß weil das letzte Glied schon vor sich ein Quadrat ist, und also auch in der neuen Formel ein Quadrat bleiben muß, die Wurzel auch noch anders nach dem obigen dritten Fall angenommen werden kann.

Es sey demnach wie vorher $x = 2 + y$ so bekommen wir

$$\begin{array}{l} 1 \\ 32 + 32y + \;\, 8yy \\ \underline{16 + 32y + 24yy + 8y^3 + y^4} \\ 49 + 64y + 32yy + 8y^3 + y^4 \end{array}$$

welche jetzt auf mehrerley Art zu einem Quadrat gemacht werden kann; dann erstlich kann man die Wurzel $7 + py + yy$ setzen, also daß unsere Formel diesem Quadrat gleich seyn soll $49 + 14py + 14yy + ppyy + 2py^3 + y^4$; nun kann man die letzt ohn eine Glieder verschwinden machen, wann man setzt $2p=8$, oder $p=4$; da dann die übrigen durch y dividirt geben

$$64+32y=14p+14y+ppy=56+30y,$$

und daher $y=-4$ und $x=-2$, oder $x=+2$, welches der bekante Fall selbst ist.

Nimmt man aber p so an, daß die zweyten Glieder wegfallen, so wird $14p=64$ und $p=\frac{32}{7}$; da dann die übrigen Glieder durch yy dividirt geben $14+pp+2py=32+8y$, oder $\frac{1710}{49}+\frac{64}{7}y=32+8y$, und daher $y=-\frac{71}{28}$, folglich $x=-\frac{15}{28}$, oder $x=+\frac{15}{28}$, welcher Werth unsere Formel zu einem Quadrat macht, davon die Wurzel ist $\frac{1441}{784}$.

Da auch $-yy$ die Wurzel ist des letzten Glieds, so kann man die Quadrat-Wurzel davon also setzen $7+py-yy$, oder die Formel selbst diesem Quadrat gleich $49+14py-14yy+ppyy-2py^3+y^4$. Um nun die letzt ohn eine Glieder wegzubringen setze man $8=-2p$, oder $p=-4$, so geben die übrigen durch y dividirt $64+32y=14p-14y+ppy=-56+2y$, daraus wird $y=-4$ wie oben.

Läßt man aber die zweyten Glieder verschwinden, so wird $64=14p$ und $p=\frac{32}{7}$; die übrigen aber durch yy dividirt geben $32+8y=-14+pp-2py$, oder $32+8y=\frac{338}{49}-\frac{64}{7}y$, daraus wird $y=-\frac{71}{28}$ und $x=\mp\frac{15}{28}$, welches mit dem obigen einerley ist.

145.

Eben so kann man verfahren mit der allgemeinen Formel

$$a+bx+cxx+dx^3+ex^4,$$

wann ein Fall, nemlich $x=h$, bekant ist, da dieselbe ein Quadrat, nemlich kk, wird: dann alsdann setze man $x=h+y$, so erhält man eine Formel von eben so viel Gliedern davon das erste seyn wird kk; wird nun die Wurzel davon gesetzt $k+py+qyy$, und man bestimmt p und q dergestalt daß auch die zweyten und dritten Glieder wegfallen, so geben die beyden letzten durch y^3 dividirt eine einfache Gleichung, woraus y und folglich auch x bestimmt werden kann.

Nur fallen hier solche Fälle weg, wo der neu gefundene Werth von x mit dem bekanten $x=h$ einerley ist, weil alsdann nichts neues gefunden wird. In solchen Fällen ist entweder die Formel an sich selbst unmöglich, oder man müßte noch einen andern Fall errathen, wo dieselbe ein Quadrat wird.

146.

Nur so weit ist man bisher gekommen in Auflösung der Quadrat-Wurzel-Zeichen, da nemlich die höchste Potestät hinter denselben die vierte nicht übersteiget. Sollte demnach in einer solchen Formel die fünfte oder eine noch höhere Potestät von x vorkommen, so sind die bisherigen Kunstgriffe nicht hinlänglich eine Auflösung davon zu geben, wenn auch gleich schon ein Fall bekannt wäre. Um dieses deutlicher zu zeigen so betrachte man diese Formel $kk + bx + cxx + dx^3 + ex^4 + fx^5$, wo das erste Glied schon ein Quadrat ist, wollte man nun die Wurzel davon wie vorher setzen $k + px + qxx$ und p und q so bestimmen, daß die zweyten und dritten Glieder wegfielen, so blieben doch noch drey übrig, welche durch x^3 dividirt eine quadratische Gleichung geben würden, woraus x durch ein neues Wurzel-Zeichen bestimmt würde. Wollte man aber die Wurzel setzen $k + px + qxx + rx^3$ so würde das Quadrat bis zur sechsten Potestät aufsteigen, allso daß wann gleich p, q, und r so bestimmt würden, daß die zweyten, dritten und vierten Glieder wegfielen, dennoch die vierte, fünfte und sechste Potestät übrig bliebe, welche durch x^4 dividirt wieder auf eine quadratische Gleichung führte, und also nicht ohne Wurzel-Zeichen aufgelößt werden könnte. Dahero wir genöthiget sind hiemit die Formeln die ein Quadrat seyn sollen zu verlaßen. Wir wollen demnach zu den cubischen Wurzel-Zeichen fortschreiten.

CAPITEL 10

VON DER ART DIESE IRRATIONAL-FORMEL $\sqrt[3]{(a + bx + cxx + dx^3)}$ RATIONAL ZU MACHEN

147.

Hier werden also solche Werthe für x erfordert daß diese Formel $a + bx + cxx + dx^3$ eine Cubic-Zahl werde, und daraus also die Cubic-Wurzel gezogen werden könne. Hiebey ist zu erinnern daß diese Formel die dritte Potestät nicht überschreiten müße, weil sonsten die Auflösung davon nicht zu hoffen wäre. Sollte die Formel nur bis auf die zweyte Potestät gehen und das Glied dx^3 wegfallen, so würde die Auflösung nicht leichter werden: fielen aber die zwey letzten Glieder weg, also daß diese Formel $a + bx$ zu