CAPITEL 8

VON DER ART DIESE IRRATIONAL-FORMEL $\sqrt{(a + bx + cxx + dx^3)}$ RATIONAL ZU MACHEN

112.

Wir schreiten hier fort zu einer Formel da x zu der dritten Potestät ansteiget, um hernach bis zur vierten weiter zu gehen, ohngeacht diese beyde Fälle auf eine ähnliche Art behandelt werden müßen.

Es soll also diese Formel $a + bx + cxx + dx^3$ zu einem Quadrat gemacht, und zu diesem Ende geschickte Werthe für x in Rational-Zahlen gesucht werden; dann da dieses schon weit größern Schwierigkeiten unterworfen ist, so erfordert es auch weit mehr Kunst nur gebrochene Zahlen für x zu finden, und man ist genöthiget sich damit zu begnügen, und keine Auflösung in gantzen Zahlen zu verlangen. Zum voraus ist auch hier dieses zu mercken, daß man keine allgemeine Auflösung geben kann, wie eben geschehen, sondern eine jede Operation giebt uns nur einen einzigen Werth für x zu erkennen, da hingegen die oben gebrauchte Methode auf einmahl zu unendlich viel Auflösungen leitet.

113.

Da es unter der vorher abgehandelten Formel $a + bx + cxx$ unendlich viel Fälle giebt, da die Auflösung schlechterdings unmöglich ist, so findet solches vielmehr bey der gegenwärtigen Formel statt, wo nicht einmahl an eine Auflösung zu gedencken ist, wofern man nicht schon eine weiß oder errathen hat; dahero man blos allein für diese Fälle Regeln zu geben im Stande ist, durch welche man aus einer schon bekannten Auflösung eine neue ausfündig machen kann, aus welcher nachgehends auf gleiche Weise noch eine andere neue gefunden wird, also daß man solcher Gestalt immer weiter fortgehen kann.

Inzwischen geschieht es aber doch öfters, daß wann gleich schon eine Auflösung bekannt ist, aus derselben doch keine andere geschlossen werden kann. Also daß in solchen Fällen nur eine einzige statt findet, welcher Umstand besonders zu bemercken ist, weil in dem vorhergehenden Fall aus einer einzigen Auflösung unendlich viel neue gefunden werden können.

114.

Wann also eine solche Formel $a + bx + cxx + dx^3$ zu einem Quadrat gemacht werden soll, so muß nothwendig schon ein Fall voraus gesetzt werden wo dieses geschieht; ein solcher aber fällt am deutlichsten in die Augen, wann das erste Glied schon ein Quadrat ist und die Formel also heißt $ff + bx + cxx + dx^3$, welche offenbahr ein Quadrat wird, wann man setzt $x = 0$.

Wir wollen also diese Formel zuerst vornehmen, und sehn wie aus dem bekannten Fall $x = 0$ noch ein anderer Werth für x gefunden werden könne; zu diesem Ende kann man zweyerley Wege gebrauchen, von welchen wir einen jeden besonders hier erklären wollen, und wobey es gut seyn wird mit besondern Fällen den Anfang zu machen.

115.

Es sey demnach diese Formel $1 + 2x - xx + x^3$ gegeben, welche ein Quadrat werden soll. Da nun hier das erste Glied 1 ein Quadrat ist, so nehme man die Wurzel von diesem Quadrat also an, daß die beyden ersten Glieder wegfallen. Es sey demnach die Quadrat-Wurzel $1 + x$, davon das Quadrat unserer Formel gleich seyn soll, und da bekommen wir

$$1 + 2x - xx + x^3 = 1 + 2x + xx,$$

wo die beyden ersten Glieder einander aufheben, und diese Gleichung herauskommt $xx = -xx + x^3$ oder $x^3 = 2xx$, welche durch xx dividirt so gleich giebt $x = 2$, woraus unsere Formel wird $1 + 4 - 4 + 8 = 9$.

Gleichergestalt wann diese Formel $4 + 6x - 5xx + 3x^3$ ein Quadrat werden soll, so setze man erstlich die Wurzel $= 2 + nx$ und suche n also daß die beyden ersten Glieder wegfallen, weil nun wird

$$4 + 6x - 5xx + 3x^3 = 4 + 4nx + nnxx,$$

so muß seyn $4n = 6$ und also $n = \frac{3}{2}$, woher diese Gleichung entspringt

$-5xx+3x^3=\frac{9}{4}xx$ oder $3x^3=\frac{29}{4}xx$, dahero $x=\frac{29}{12}$, welcher Werth unsere Formel zu einem Quadrat macht, deßen Wurzel seyn wird $2+\frac{3}{2}x=\frac{45}{8}$.

116.

Der zweyte Weg bestehet darinn, daß man der Wurzel drey Glieder giebt, als $f+gx+hxx$, welche also beschaffen sind, daß in der Gleichung die drey ersten Glieder wegfallen.

Es sey z. E. diese Formel gegeben $1-4x+6xx-5x^3$, hievon setze man die Wurzel $1-2x+hxx$ da dann seyn soll

$$1-4x+6xx-5x^3=1-4x+4xx+2hxx-4hx^3+hhx^4;$$

hier fallen die zwey erste Glieder schon weg, damit aber auch das dritte wegfalle, so muß seyn $6=2h+4$ und also $h=1$, daraus bekommen wir $-5x^3=-4x^3+x^4$, wo durch x^3 dividirt wird: $-5=-4+x$ und $x=-1$.

117.

Diese zwey Methoden können also gebraucht werden, wann das erste Glied a ein Quadrat ist. Der Grund derselben beruhet darauf, daß man bey der ersten Methode der Wurzel zwey Glieder giebt, als $f+px$, wo f die Quadrat-Wurzel des ersten Glieds ist, und p also angenommen wird, daß auch das zweyte Glied wegfallen, und also nur das dritte und vierte Glied unserer Formel, nemlich $cxx+dx^3$ mit $ppxx$ verglichen werden muß, da dann die Gleichung durch xx dividirt einen neuen Werth vor x angiebt, welcher seyn wird

$$x=\frac{pp-c}{d}.$$

Bey der zweyten Methode giebt man der Wurzel drey Glieder und setzt dieselbe $f+px+qxx$, wann nemlich $a=ff$, und bestimmt p und q dergestallt, daß die drey ersten Glieder beyderseits verschwinden, welches also geschiehet: Da

$$ff+bx+cxx+dx^3=ff+2fpx+2fqxx+ppxx+2pqx^3+qqx^4,$$

so muß seyn $b=2fp$ also $p=\frac{b}{2f}$, und $c=2fq+pp$ also $q=\frac{c-pp}{2f}$; und die übrige Gleichung $dx^3=2pqx^3+qqx^4$ läßt sich theilen, und wird daraus

$$x=\frac{d-2pq}{qq}.$$

118.

Inzwischen kann es öfters geschehen, daß obgleich $a = ff$ dennoch diese Methode keinen neuen Werth für x angebe, wie aus dieser Formel $ff + dx^3$ zu ersehen, wo das zweyte und dritte Glied mangelt.

Dann setzt man nach der ersten die Wurzel $= f + px$, also daß seyn soll $ff + dx^3 = ff + 2fpx + ppxx$, so muß seyn $0 = 2fp$ und $p = 0$, dahero bekommt man $dx^3 = 0$, und daraus $x = 0$, welches kein neuer Werth ist.

Setzt man aber nach der andern Methode die Wurzel $= f + px + qxx$, also daß seyn soll

$$ff + dx^3 = ff + 2fpx + 2fqxx + ppxx + 2pqx^3 + qqx^4$$

so muß seyn $0 = 2fp$ und $p = 0$, ferner $0 = 2fq + pp$, und also $q = 0$, dahero man bekommt $dx^3 = 0$ und wiederum $x = 0$.

119.

In solchen Fällen ist nun nichts anders zu thun, als daß man sehe ob man nicht einen solchen Werth für x errathen könne, wo die Formel ein Quadrat wird, da man dann aus derselben nach der vorigen Methode neue Werthe für x finden kann; welches auch angeht wann gleich das erste Glied kein Quadrat ist.

Um dieses zu zeigen so soll diese Formel $3 + x^3$ ein Quadrat seyn, da nun solches geschiehet wann $x = 1$, so setze man $x = 1 + y$ und da bekommt man diese $4 + 3y + 3yy + y^3$, in welcher das erste Glied ein Quadrat ist. Man setze also nach der ersten Methode die Wurzel davon $2 + py$, so wird $4 + 3y + 3yy + y^3 = 4 + 4py + ppyy$; wo um das zweyte Glied wegzuschaffen seyn muß $3 = 4p$, und also $p = \frac{3}{4}$, alsdann wird $3 + y = pp$ und $y = pp - 3 = \frac{9}{16} - \frac{48}{16} = -\frac{39}{16}$, folglich $x = -\frac{23}{16}$, welches ein neuer Werth für x ist.

Setzt man weiter nach der zweyten Methode die Wurzel $= 2 + py + qyy$, so wird $4 + 3y + 3yy + y^3 = 4 + 4py + 4qyy + ppyy + 2pqy^3 + qqy^4$, wo um das zweyte Glied wegzuschaffen seyn muß $3 = 4p$, oder $p = \frac{3}{4}$, und um das dritte wegzuschaffen $3 = 4q + pp$, also $q = \frac{3 - pp}{4} = \frac{39}{64}$; so haben wir $1 = 2pq + qqy$, und daraus $y = \frac{1 - 2pq}{qq}$ oder $y = \frac{352}{1521}$, folglich $x = \frac{1873}{1521}$.

120.

Nun wollen wir auch zeigen, wann man schon einen solchen Werth gefunden hat, wie man daraus weiter einen andern neuen finden soll? Dieses wollen wir auf eine allgemeine Art vorstellen, und auf diese Formel anwenden $a + bx + cxx + dx^3$, von welcher schon bekannt sey, daß sie ein Quadrat werde wann $x = f$, und daß alsdann sey $a + bf + cff + df^3 = gg$. Hierauf setze man $x = f + y$, so erhält man diese neue Formel:

$$\begin{array}{l} a \\ + bf \;\; + by \\ + cff + 2cfy \;\; + cyy \\ + df^3 + 3dffy + 3dfyy + dy^3 \\ \hline gg + (b + 2cf + 3dff)y + (c + 3df)yy + dy^3 \end{array}$$

in welcher Formel das erste Glied ein Quadrat ist, also daß die beyden obigen Methoden angewandt werden können; wodurch neue Werthe für y und also auch für x erhalten werden; nemlich $x = f + y$.

121.

Bisweilen hilfft es aber auch nichts, wann man gleich einen Werth für x errathen hat; wie in dieser Formel geschieht $1 + x^3$, welche ein Quadrat wird, wann man setzt $x = 2$. Dann setzt man diesem zu folge $x = 2 + y$, so kommt diese Formel heraus $9 + 12y + 6yy + y^3$, welche nun ein Quadrat seyn soll. Es sey davon nach der ersten Regel die Wurzel $= 3 + py$, so wird $9 + 12y + 6yy + y^3 = 9 + 6py + ppyy$; wo seyn muß $12 = 6p$ und $p = 2$; alsdann wird $6 + y = pp = 4$, und also $y = -2$; folglich $x = 0$, aus welchem Werth nichts weiter gefunden werden kann.

Nehmen wir aber nach der zweyten Methode die Wurzel $= 3 + py + qyy$, so wird $9 + 12y + 6yy + y^3 = 9 + 6py + 6qyy + ppyy + 2pqy^3 + qqy^4$ wo seyn muß erstlich $12 = 6p$ und $p = 2$; ferner $6 = 6q + pp = 6q + 4$ und also $q = \frac{1}{3}$; hieraus erhält man $1 = 2pq + qqy = \frac{4}{3} + \frac{1}{9}y$; dahero $y = -3$, folglich $x = -1$, und $1 + x^3 = 0$; aus welchem nichts weiter geschloßen werden kann; dann wollte man setzen $x = -1 + z$, so käme diese Formel $3z - 3zz + z^3$, wo das erste Glied gar wegfällt und also weder die eine noch die andere Methode gebraucht werden kann.

Hieraus wird schon sehr wahrscheinlich, daß diese Formel $1+x^3$ kein Quadrat werden könne außer diesen drey Fällen:

$$\text{I.) } x=2, \qquad \text{II.) } x=0, \qquad \text{III.) } x=-1,$$

welches aber auch aus andern Gründen bewiesen werden kann.

122.

Zur Uebung wollen wir noch diese Formel betrachten $1+3x^3$, welche in diesen Fällen ein Quadrat wird

$$\text{I.) } x=0, \qquad \text{II.) } x=1, \qquad \text{III.) } x=2,$$

und wir wollen sehen, ob wir noch andere solche Werthe finden können?

Da nun bekandt daß $x=1$ ein Werth ist, so setze man $x=1+y$; und da bekommt man $1+3x^3=4+9y+9yy+3y^3$, davon sey die Wurzel $2+py$ also daß seyn soll $4+9y+9yy+3y^3=4+4py+ppyy$, wo seyn muß $9=4p$ und also $p=\frac{9}{4}$; die übrigen Glieder geben aber $9+3y=pp=\frac{81}{16}$ und $y=-\frac{21}{16}$; folglich $x=-\frac{5}{16}$, da dann $1+3x^3$ ein Quadrat wird, davon die Wurzel ist $-\frac{61}{64}$ oder auch $+\frac{61}{64}$; wollte man nun weiter setzen $x=-\frac{5}{16}+z$, so würde man daraus wieder andere neue Werthe finden können.

Wollte man aber für die obige Formel nach der zweyten Methode die Wurzel setzen $2+py+qyy$ also daß seyn soll

$$4+9y+9yy+3y^3=4+4py+4qyy+ppyy+2pqy^3+qqy^4,$$

so müßte erstlich seyn $9=4p$, also $p=\frac{9}{4}$; hernach $9=4q+pp=4q+\frac{81}{16}$, und also $q=\frac{63}{64}$; aus den noch übrigen Glieder wird $3=2pq+qqy=\frac{567}{128}+qqy$, oder $567+128qqy=384$, oder $128qqy=-183$, das ist $126\cdot\frac{63}{64}y=-183$, oder $42\cdot\frac{63}{64}y=-61$, dahero $y=-\frac{1952}{1323}$, folglich $x=-\frac{629}{1323}$, aus welchem nach der obigen Anweisung wiederum andere neue gefunden werden können.

123.

Hier haben wir aus dem bekandten Fall $x=1$ zwey neue Werthe heraus gebracht, aus welchen wann man sich die Mühe geben wollte, wiederum andere neue gefunden werden könnten, wodurch man aber auf sehr weitlauffige Brüche gerathen würde.

Dahero hat man Ursache sich zu verwundern, daß aus diesem Fall $x = 1$ nicht auch der andere $x = 2$, der ebenfalls leicht in die Augen fällt, heraus gebracht worden; welches ohnezweifel ein Zeichen ist von der Unvollkommenheit der bisher erfundenen Methode.

Man kann gleichergestalt aus dem Fall $x = 2$ andere neue Werthe heraus bringen, man setze zu diesem Ende $x = 2 + y$, also daß diese Formel ein Quadrat seyn soll $25 + 36y + 18yy + 3y^3$; hievon sey die Wurzel nach der ersten Methode $5 + py$, so wird $25 + 36y + 18yy + 3y^3 = 25 + 10py + ppyy$, und also $36 = 10p$ oder $p = \frac{18}{5}$; daraus wird aus den übrigen Gliedern, durch yy dividirt, $18 + 3y = pp = \frac{324}{25}$, und daher $y = -\frac{42}{25}$, und $x = \frac{8}{25}$, daraus wird $1 + 3x^3$ ein Quadrat davon die Wurzel ist $5 + py = -\frac{131}{125}$, oder $+\frac{131}{125}$.

Will man ferner nach der andern Methode die Wurzel setzen $5 + py + qyy$, so wird $25 + 36y + 18yy + 3y^3 = 25 + 10py + 10qyy + ppyy + 2pqy^3 + qqy^4$; wo um die zweyten und dritten Glieder wegzuschaffen seyn muß $36 = 10p$, oder $p = \frac{18}{5}$; hernach $18 = 10q + pp$, und $10q = 18 - \frac{324}{25} = \frac{126}{25}$, und $q = \frac{63}{125}$, die übrigen Glieder, durch y^3 getheilt, geben $3 = 2pq + qqy$, oder $qqy = 3 - 2pq = -\frac{393}{625}$; also $y = -\frac{3275}{1323}$ und $x = -\frac{629}{1323}$.

124.

Eben so schwer und mühsam wird diese Rechnung auch in solchen Fällen, wo aus einem andern Grund es gantz leicht ist so gar eine allgemeine Auflösung zu geben, wie bey dieser Formel geschieht $1 - x - xx + x^3$, wo auf eine allgemeine Art genommen werden kann $x = nn - 1$, und da n eine jegliche beliebige Zahl bedeutet.

Dann wann $n = 2$, so wird $x = 3$, und unsere Formel $= 1 - 3 - 9 + 27 = 16$. Nimmt man $n = 3$, so wird $x = 8$ und unsere Formel $= 1 - 8 - 64 + 512 = 441$.

Es ereignet sich aber hier ein gantz besonderer Umstand, welchem wir diese leichte Auflösung zu dancken haben, und welcher so gleich in die Augen fallen wird, wann wir unsere Formel in Factores auflösen. Es ist aber leicht zu sehen, daß sich dieselbe durch $1 - x$ theilen laße und der Quotient seyn werde $1 - xx$, welcher weiter aus diesen Factoren besteht $(1 + x)(1 - x)$; also daß unsere Formel diese Gestalt erhält:

$$1 - x - xx + x^3 = (1 - x)(1 + x)(1 - x) = (1 - x)^2 \cdot (1 + x).$$

Da nun dieselbe ein Quadrat seyn soll, und ein Quadrat durch ein Quadrat dividirt wieder ein Quadrat wird, so muß auch $1+x$ ein Quadrat seyn; und umgekehrt wann $1+x$ ein Quadrat ist so wird auch $(1-x)^2(1+x)$ ein Quadrat, man darf also nur setzen $1+x=nn$, so bekommt man so gleich $x=nn-1$.

Hätte man diesen Umstand nicht bemerckt, so würde es schwer gefallen seyn, nach den obigen Methoden nur ein halb Dutzend Werthe für x ausfindig zu machen.

125.

Bey einer jeden gegebenen Formel ist es demnach sehr gut dieselbe in Factores aufzulösen, wann es nemlich möglich ist.

Wie dieses anzustellen sey, ist schon oben angezeigt worden; man setzt nemlich die gegebene Formel $=0$, und sucht von dieser Gleichung die Wurzel, da dann eine jede Wurzel z. E. $x=f$, einen Factor $f-x$ dargiebt, welche Untersuchung um so viel leichter anzustellen ist, da hier nur rationale Wurzeln gesucht werden, welche alle Theiler sind der bloßen Zahl.

126.

Dieser Umstand trifft auch ein bey unserer allgemeinen Formel

$$a+bx+cxx+dx^3,$$

wann die zwey ersten Glieder wegfallen, also daß $cxx+dx^3$ ein Quadrat seyn soll; dann alsdann muß auch nothwendig diese Formel durch das Quadrat xx dividirt, nemlich $c+dx$ ein Quadrat seyn, da man dann nur setzen darf $c+dx=nn$, um zu bekommen $x=\frac{nn-c}{d}$, welche auf einmahl unendlich viele, und so gar alle mögliche Auflösungen in sich enthält.

127.

Wann man bey dem Gebrauch der obigen ersten Methode den Buchstaben p nicht bestimmen wolte um das zweyte Glied wegzuschaffen, so würde man auf eine andere irrationale Formel fallen, welche rational gemacht werden soll.

Es sey demnach die vorgegebene Formel $ff+bx+cxx+dx^3$, und man setze die Wurzel davon $=f+px$, so wird

$$ff+bx+cxx+dx^3=ff+2fpx+ppxx,$$

wo sich das erste Glied aufhebt, die übrigen aber durch x dividirt geben $b + cx + dxx = 2fp + ppx$, welches eine quadratische Gleichung ist, daraus x gefunden wird wie folget

$$x = \frac{pp - c + \sqrt{(p^4 - 2cpp + 8dfp + cc - 4bd)}}{2d}.$$

Anjetzo kommt es also darauf an, daß man solche Werthe für p ausfindig mache, wodurch diese Formel $p^4 - 2cpp + 8dfp + cc - 4bd$ ein Quadrat werde. Da nun hier die vierte Potestät der gesuchten Zahl p vorkommt, so gehört dieser Fall in das folgende Capitel.

CAPITEL 9

VON DER ART DIESE IRRATIONAL-FORMEL $\sqrt{(a + bx + cxx + dx^3 + ex^4)}$ RATIONAL ZU MACHEN

128.

Wir kommen nun zu solchen Formeln wo die unbestimmte Zahl x zur vierten Potestät ansteigt, womit wir zu gleich unsere Untersuchung über die Quadrat-Wurzel-Zeichen endigen müßen, indem man es bisher noch nicht so weit gebracht, daß man Formeln wo höhere Potestäten von x vorkommen zu Quadrate machen könnte.

Bey dieser Formel kommen aber drey Fälle in Betrachtung; davon der erste ist, wann das erste Glied a ein Quadrat; der andere, wann das letzte ex^4 ein Quadrat ist; der dritte Fall wann das erste und letzte Glied zugleich Quadrate sind, welche drey Fälle wir hier besonders abhandeln wollen.

129.

I.) Auflösung der Formel

$$\sqrt{(ff + bx + cxx + dx^3 + ex^4)}.$$

Da hier das erste Glied ein Quadrat ist so könnte man auch nach der ersten Methode die Wurzel $= f + px$ setzen, und p so bestimmen, daß die beyden erste Glieder wegfielen, und die übrigen sich durch xx theilen ließen; allein alsdann würde in der Gleichung doch noch xx vorkommen, und also die Bestimmung des x ein neues Wurzel-Zeichen erfordern. Man muß also