CAPITEL 7

VON EINER BESONDERN METHODE DIE FORMEL $ann+1$ ZU EINEM QUADRAT IN GANTZEN ZAHLEN ZU MACHEN

96.

Was in dem vorigen Capitel vorgetragen worden, kann nicht zur Ausführung gebracht werden, wann man nicht im Stande ist für eine jegliche Zahl a eine solche gantze Zahl n zu finden, daß $ann+1$ ein Quadrat werde, oder daß man bekomme $mm = ann + 1$.

Wollte man sich mit gebrochenen Zahlen begnügen, so würde diese Gleichung leicht aufzulösen seyn, indem man nur setzen dürfte $m = 1 + \frac{np}{q}$. Dann da wird $mm = 1 + \frac{2np}{q} + \frac{nnpp}{qq} = ann + 1$, wo sich beyderseits das 1 aufhebt und die übrigen Glieder durch n theilen laßen, da dann mit qq multiplicirt kommt $2pq + npp = anqq$, daraus gefunden wird $n = \frac{2pq}{aqq - pp}$, woraus unendlich viel Werthe für n gefunden werden können. Da aber n eine gantze Zahl seyn soll, so hilft uns dieses nichts, dahero eine gantz andere Methode gebraucht werden muß, um dieses zu finden.

97.

Vor allen Dingen aber ist zu mercken, daß wann $ann+1$ ein Quadrat in gantzen Zahlen werden soll, a mag eine Zahl seyn was man vor eine will, solches nicht allezeit möglich sey.

Dann erstlich werden alle Fälle ausgeschloßen, wo a eine negative Zahl ist; hernach werden auch alle die Fälle ausgeschloßen, wo a selbst eine Quadrat-Zahl ist, weil alsdann ann ein Quadrat seyn würde, kein Quadrat aber $+1$ in gantzen Zahlen ein Quadrat seyn kann. Dahero muß unsere Formel also eingeschränckt werden, daß der Buchstabe a weder eine negative noch eine Quadrat-Zahl sey; so oft aber a eine positive Zahl und kein Quadrat ist, so kann allezeit für n eine solche gantze Zahl gefunden werden, daß $ann+1$ ein Quadrat werde.

Hat man aber eine solche Zahl gefunden, so ist es leicht aus dem vorigen Capitel, unendlich viel andere herzuleiten. Zu unserem Vorhaben aber ist es genung, eine einige und zwar die kleinste ausfündig zu machen.

98.

Hierzu hat vormals ein gelehrter Engeländer, Namens PELL[1]), eine gantz sinnreiche Methode erfunden, welche wir hier erklären wollen. Dieselbe aber ist nicht so beschaffen, daß sie auf eine allgemeine Art für eine jegliche Zahl a, sondern nur für einen jeglichen Fall besonders gebraucht werden kann.

Wir wollen demnach von den leichteren Fällen den Anfang machen, und für n eine Zahl suchen daß $2nn+1$ ein Quadrat werde, oder daß $\sqrt{(2nn+1)}$ rational werde.

Hier sieht man nun leicht, daß diese Quadrat-Wurzel größer seyn werde als n, doch aber kleiner als $2n$. Man setze dahero dieselbe $=n+p$ so wird p gewis kleiner seyn als n. Also haben wir $\sqrt{(2nn+1)}=n+p$ und dahero $2nn+1=nn+2np+pp$, woraus wir nun n suchen wollen. Da nun ist $nn=2np+pp-1$ so wird $n=p+\sqrt{(2pp-1)}$.

Es kommt also darauf an, daß $2pp-1$ ein Quadrat werde, welches geschiehet wann $p=1$ und hieraus findet man $n=2$ und $\sqrt{(2nn+1)}=3$. Wäre dieses letztere nicht so gleich in die Augen gefallen, so hätte man weiter fortgehen können, und da $\sqrt{(2pp-1)}$ größer als p und dahero n größer als $2p$, so setze man $n=2p+q$, da dann wird $2p+q=p+\sqrt{(2pp-1)}$ oder $p+q=\sqrt{(2pp-1)}$, hievon die Quadrate genommen, kommt

$$pp+2pq+qq=2pp-1 \quad \text{oder} \quad pp=2pq+qq+1$$

und daraus wird $p=q+\sqrt{(2qq+1)}$, also muß $2qq+1$ ein Quadrat seyn, welches geschiehet wann $q=0$ dahero $p=1$ und $n=2$. Aus diesem Exempel kann man sich schon einen Begriff von dieser Methode machen, welcher aber durch das folgende noch weiter aufgeklärt wird.

99.

Es sey nun $a=3$, so daß die Formel $3nn+1$ ein Quadrat werden soll. Man setze $\sqrt{(3nn+1)}=n+p$, da wird $3nn+1=nn+2np+pp$ und $2nn=2np+pp-1$ und daraus $n=\frac{p+\sqrt{(3pp-2)}}{2}$; da nun $\sqrt{(3pp-2)}$ größer

1) Die Verbindung des Namens PELL mit dieser von FERMAT gestellten Aufgabe ist nach G. WERTHEIM (Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik **9**, 1899, 555—576 sowie Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, 113—126) unzutreffend und beruht nach G. ENESTRÖM (Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, 204—207) auf einer Verwechselung der beiden Namen PELL und BROUNCKER. Siehe auch H. KONEN, *Geschichte der Gleichung* $t^2-Du^2=1$, Leipzig 1901. H. W.

als p und also n größer als $\frac{2p}{2}$ oder als p, so setze man $n=p+q$, da wird $2p+2q=p+\sqrt{(3pp-2)}$ oder $p+2q=\sqrt{(3pp-2)}$; hiervon die Quadrate genommen, wird $pp+4pq+4qq=3pp-2$ oder $2pp=4pq+4qq+2$, das ist $pp=2pq+2qq+1$, dahero $p=q+\sqrt{(3qq+1)}$. Diese Formel ist der gegebenen gleich und also $q=0$ leistet ein Genüge, daraus wird $p=1$ und $n=1$, also $\sqrt{(3nn+1)}=2$.

100.

Nun sey $a=5$, um diese Formel $5nn+1$ zu einem Quadrat zu machen, davon die Wurzel größer ist als $2n$: dahero setze man $\sqrt{(5nn+1)}=2n+p$ da wird $5nn+1=4nn+4np+pp$ und daraus $nn=4np+pp-1$; dahero $n=2p+\sqrt{(5pp-1)}$. Weil nun $\sqrt{(5pp-1)}$ größer ist als $2p$, so ist auch n größer als $4p$; deswegen setze man $n=4p+q$, so wird $2p+q=\sqrt{(5pp-1)}$ oder $4pp+4pq+qq=5pp-1$; dahero $pp=4pq+qq+1$ und also $p=2q+\sqrt{(5qq+1)}$; dieser geschieht ein Genüge wann $q=0$, folglich $p=1$ und $n=4$; dahero $\sqrt{(5nn+1)}=9$.

101.

Es sey ferner $a=6$, um $6nn+1$ zu einem Quadrat zu machen, wovon die Wurzel größer ist als $2n$. Man setze deswegen $\sqrt{(6nn+1)}=2n+p$, so wird $6nn+1=4nn+4np+pp$ oder $2nn=4np+pp-1$ und dahero $n=p+\frac{\sqrt{(6pp-2)}}{2}$, oder $n=\frac{2p+\sqrt{(6pp-2)}}{2}$ also n größer als $2p$, man setze deswegen $n=2p+q$, so wird $4p+2q=2p+\sqrt{(6pp-2)}$ oder $2p+2q=\sqrt{(6pp-2)}$. Die Quadrate genommen, wird $4pp+8pq+4qq=6pp-2$ oder $2pp=8pq+4qq+2$, das ist $pp=4pq+2qq+1$, woraus gefunden wird $p=2q+\sqrt{(6qq+1)}$; welche Formel der ersten gleich ist, und also $q=0$ gesetzt werden kann, daraus dann wird $p=1$ und $n=2$, also $\sqrt{(6nn+1)}=5$.

102.

Es sey weiter $a=7$ und $7nn+1=mm$; es ist also m größer als $2n$, dahero setze man $m=2n+p$, so wird $7nn+1=4nn+4np+pp$ oder $3nn=4np+pp-1$, daraus gefunden wird $n=\frac{2p+\sqrt{(7pp-3)}}{3}$. Da nun n größer ist als $\frac{4}{3}p$ und also größer als p, so setze man $n=p+q$, so wird $p+3q=\sqrt{(7pp-3)}$, die Quadrate genommen $pp+6pq+9qq=7pp-3$;

$6pp = 6pq + 9qq + 3$, oder $2pp = 2pq + 3qq + 1$, daraus kommt $p = \frac{q + \sqrt{(7qq+2)}}{2}$. Da nun hier p größer ist als $\frac{3q}{2}$, also größer als q, so setze man $p = q + r$, so wird $q + 2r = \sqrt{(7qq+2)}$, die Quadrate genommen $qq + 4qr + 4rr = 7qq + 2$ oder $6qq = 4qr + 4rr - 2$ oder $3qq = 2qr + 2rr - 1$ daraus gefunden wird $q = \frac{r + \sqrt{(7rr-3)}}{3}$. Da nun q größer ist als r, so setze man $q = r + s$, da wird $2r + 3s = \sqrt{(7rr - 3)}$. Die Quadrate genommen: $4rr + 12rs + 9ss = 7rr - 3$, oder $3rr = 12rs + 9ss + 3$ und $rr = 4rs + 3ss + 1$; also $r = 2s + \sqrt{(7ss + 1)}$. Da nun diese Formel der erstern gleich, so setze man $s = 0$, und da bekommt man $r = 1$, $q = 1$, $p = 2$ und $n = 3$, daraus $m = 8$.

Diese Rechnung kann folgender Gestalt sehr abgekürtzt werden, welches auch in andern Fällen statt findet.

Da $7nn + 1 = mm$, so ist m kleiner als $3n$. Man setze deswegen $m = 3n - p$, so wird $7nn + 1 = 9nn - 6np + pp$ oder $2nn = 6np - pp + 1$, und daraus $n = \frac{3p + \sqrt{(7pp+2)}}{2}$, also ist n kleiner als $3p$, deswegen setze man $n = 3p - q$, so wird $3p - 2q = \sqrt{(7pp + 2)}$ und die Quadrate genommen $9pp - 12pq + 4qq = 7pp + 2$, oder $2pp = 12pq - 4qq + 2$ und $pp = 6pq - 2qq + 1$, daraus wird $p = 3q + \sqrt{(7qq + 1)}$. Hier kann man nun so gleich setzen $q = 0$, da wird $p = 1$, $n = 3$, und $m = 8$ wie vorher.

103.

Nehmen wir ferner $a = 8$, also daß $8nn + 1 = mm$ und dahero m kleiner als $3n$, so setze man $m = 3n - p$, so wird $8nn + 1 = 9nn - 6np + pp$, oder $nn = 6np - pp + 1$, daraus $n = 3p + \sqrt{(8pp + 1)}$, welche Formel der ersten schon gleich ist, dahero man setzen kann $p = 0$, da kommt $n = 1$ und $m = 3$.

104.

Gleicher Gestalt verfährt man für eine jegliche andere Zahl a, wann dieselbe nur positiv und kein Quadrat ist, und man kommt immer endlich zu einem solchen Wurzel-Zeichen, welches der gegebenen Formel ähnlich ist, als z. E. zu dieser $\sqrt{(att + 1)}$, da man dann nur setzen darf $t = 0$, als in welchem Fall die Irrationalität immer wegfällt, und hierauf wann man zurück geht, erhält man einen Werth für n, daß $ann + 1$ ein Quadrat wird.

Bisweilen gelangt man bald zu seinem Endzweck, bisweilen aber werden dazu viele Operationen erfordert, je nach Beschaffenheit der Zahl a, wovon man doch keine gewiße Kennzeichen angeben kann. Bis zu der Zahl 13 geht es noch ziemlich geschwind, kommt man aber zu $a=13$, so wird die Rechnung viel weitläuftiger und dahero wird es gut seyn diesen Fall allhier auszuführen.

105.

Es sey demnach $a=13$ also daß seyn soll $13nn+1=mm$. Weil nun mm größer ist als $9nn$, und also m größer als $3n$, so setze man $m=3n+p$, da wird $13nn+1=9nn+6np+pp$, oder $4nn=6np+pp-1$, daraus $n=\frac{3p+\sqrt{(13pp-4)}}{4}$, dahero n größer als $\frac{6}{4}p$ und also größer als p.

Man setze allso $n=p+q$, so wird $p+4q=\sqrt{(13pp-4)}$; die Quadrate genommen $13pp-4=pp+8pq+16qq$, dahero $12pp=8pq+16qq+4$, oder durch 4 getheilt $3pp=2pq+4qq+1$ und daraus $p=\frac{q+\sqrt{(13qq+3)}}{3}$. Hier ist p größer als $\frac{q+3q}{3}$, also größer als q; man setze demnach $p=q+r$, so wird $2q+3r=\sqrt{(13qq+3)}$, das Quadrat genommen $13qq+3=4qq+12qr+9rr$, das ist $9qq=12qr+9rr-3$, durch 3 dividirt $3qq=4qr+3rr-1$, daraus wird $q=\frac{2r+\sqrt{(13rr-3)}}{3}$. Hier ist q größer als $\frac{2r+3r}{3}$ und also q größer als r; dahero setze man $q=r+s$, so wird $r+3s=\sqrt{(13rr-3)}$, das Quadrat genommen $13rr-3=rr+6rs+9ss$, oder $12rr=6rs+9ss+3$, durch 3 dividirt wird $4rr=2rs+3ss+1$ und daraus $r=\frac{s+\sqrt{(13ss+4)}}{4}$. Hier ist r größer als $\frac{s+3s}{4}$ oder s, dahero setze man $r=s+t$, so wird $3s+4t=\sqrt{(13ss+4)}$, das Quadrat genommen $13ss+4=9ss+24st+16tt$ und also $4ss=24st+16tt-4$, durch 4 dividirt $ss=6st+4tt-1$, daraus wird $s=3t+\sqrt{(13tt-1)}$. Also ist s größer als $3t+3t$ oder $6t$; deswegen setze man $s=6t+u$, so wird $3t+u=\sqrt{(13tt-1)}$, das Quadrat genommen $13tt-1=9tt+6tu+uu$ und daraus $4tt=6tu+uu+1$ und $t=\frac{3u+\sqrt{(13uu+4)}}{4}$, wo t größer als $\frac{6u}{4}$ und also größer als u. Man setze deswegen $t=u+v$, so wird $u+4v=\sqrt{(13uu+4)}$; das Quadrat genommen $13uu+4=uu+8uv+16vv$ und $12uu=8uv+16vv-4$, durch 4 dividirt $3uu=2uv+4vv-1$, daraus $u=\frac{v+\sqrt{(13vv-3)}}{3}$, wo u größer als $\frac{4v}{3}$ und also größer als v, deswegen setze man $u=v+x$, so wird

$2v + 3x = \sqrt{(13vv - 3)}$; das Quadrat genommen $13vv - 3 = 4vv + 12vx + 9xx$ oder $9vv = 12vx + 9xx + 3$, durch 3 dividirt $3vv = 4vx + 3xx + 1$, daraus man findet $v = \frac{2x + \sqrt{(13xx + 3)}}{3}$, wo v größer ist als $\frac{5}{3}x$ und allso größer als x, deswegen setze man $v = x + y$, so wird $x + 3y = \sqrt{(13xx + 3)}$, die Quadrate genommen $13xx + 3 = xx + 6xy + 9yy$ oder $12xx = 6xy + 9yy - 3$, durch 3 dividirt $4xx = 2xy + 3yy - 1$ und $x = \frac{y + \sqrt{(13yy - 4)}}{4}$, wo x größer ist als y; deswegen setze man $x = y + z$, so wird $3y + 4z = \sqrt{(13yy - 4)}$, die Quadrate genommen $13yy - 4 = 9yy + 24yz + 16zz$ oder $4yy = 24yz + 16zz + 4$, durch 4 dividirt $yy = 6yz + 4zz + 1$, daraus $y = 3z + \sqrt{(13zz + 1)}$. Da diese Formel endlich der ersten gleich ist so setze man $z = 0$, und da bekommt man rückwerts gehend, wie folget:

$z = 0$	$u = v + x = 3$	$q = r + s = 71$
$y = 1$	$t = u + v = 5$	$p = q + r = 109$
$x = y + z = 1$	$s = 6t + u = 33$	$n = p + q = 180$
$v = x + y = 2$	$r = s + t = 38$	$m = 3n + p = 649$

Also ist 180 nach 0 die kleinste gantze Zahl für n, daß $13nn + 1$ ein Quadrat werde.

106.

Aus diesem Exempel sieht man zur Genüge, wie langwierig bisweilen eine solche Rechnung werden könne. Dann unter den größern Zahlen hat man oft nöthig wohl zehnmal mehr Operationen zu machen, als hier bei der Zahl 13 vorgekommen sind: man kann auch nicht wohl voraus sehen bey welchen Zahlen so große Mühe erfordert wird, dahero es dienlich ist, sich die Arbeit anderer zu Nutze zu machen und eine Tabelle beyzufügen, wo zu allen Zahlen a bis auf 100 die Werthe der Buchstaben m und n vorgestellt werden, damit man bey vorkommenden Fällen daraus für eine jede Zahl a die gehörige Buchstaben m und n hernehmen könne.

107.

Inzwischen ist zu mercken, daß bey einigen Arten von Zahlen die Werthe für m und n allgemein gefunden werden können; dieses geschiehet aber nur bey denen Zahlen, welche um 1 oder 2 kleiner oder größer sind als eine Quadrat-Zahl, welches zu zeigen der Mühe werth seyn wird.

108.

Es sey demnach $a = ee - 2$, oder um 2 kleiner als eine Quadrat-Zahl, und da seyn soll $(ee-2)nn+1 = mm$, so ist offenbar m kleiner als en, deswegen setze man $m = en - p$, so wird $(ee-2)nn+1 = eenn - 2enp + pp$ oder $2nn = 2enp - pp + 1$ und daraus $n = \frac{ep + \sqrt{(eepp - 2pp + 2)}}{2}$, wo so gleich in die Augen fällt, daß wann man nimmt $p = 1$, das Wurzelzeichen wegfalle und da seyn werde $n = e$ und $m = ee - 1$. Wäre z. E. $a = 23$, wo $e = 5$, so wird $23nn + 1 = mm$, wann $n = 5$ und $m = 24$. Dieses ist auch an sich offenbar; denn setzt man $n = e$, wann nemlich $a = ee - 2$, so wird $ann + 1 = e^4 - 2ee + 1$, welches das Quadrat ist von $ee - 1$.

109.

Es sey nun auch $a = ee - 1$ nemlich um 1 weniger als eine Quadrat-Zahl, also daß seyn soll $(ee-1)nn + 1 = mm$. Da nun hier wieder m kleiner ist als en, so setze man $m = en - p$, so wird $(ee-1)nn + 1 = eenn - 2enp + pp$, oder $nn = 2enp - pp + 1$ und daraus $n = ep + \sqrt{(eepp - pp + 1)}$; wo das Wurzelzeichen wegfält, wann $p = 1$, und daraus bekommt man $n = 2e$, und $m = 2ee - 1$. Dieses ist auch leicht zu sehen. Dann da $a = ee - 1$ und $n = 2e$, so wird $ann + 1 = 4e^4 - 4ee + 1$, welches das Quadrat ist von $2ee - 1$. Es sey z. E. $a = 24$ also daß $e = 5$, so wird $n = 10$ und $24nn + 1 = 2401 = (49)^2$.*)

110.

Es sey nun auch $a = ee + 1$, oder um 1 größer als eine Quadrat-Zahl, also daß seyn soll $(ee+1)nn + 1 = mm$, wo m augenscheinlich größer ist als en, deswegen setze man $m = en + p$, so wird $(ee+1)nn + 1 = eenn + 2enp + pp$ oder $nn = 2enp + pp - 1$, und daraus $n = ep + \sqrt{(eepp + pp - 1)}$ wo $p = 1$ genommen werden kann, und da wird $n = 2e$ und $m = 2ee + 1$; dieses ist auch

*) Das Wurzel-Zeichen in diesem Fall verschwindet auch, wann $p = 0$ gesetzt wird; daher wir denn unstreitig die kleinste Zahlen für n und m erhalten, welche sind $n = 1$ und $m = e$. Allso wird wann $e = 5$, die Formel $24nn + 1$ ein Quadrat wann $n = 1$, und die Wurzel dieses Quadrats $m = e = 5$.

leicht einzusehen, dann da $a = ee + 1$ und $n = 2e$, so ist $ann + 1 = 4e^4 + 4ee + 1$ welches das Quadrat ist von $2ee + 1$. Es sey z. E. $a = 17$ also daß $e = 4$, und da wird $17nn + 1 = mm$, wann $n = 8$ und $m = 33$.

111.

Es sey endlich $a = ee + 2$, oder um 2 größer als eine Quadrat-Zahl, also soll seyn $(ee + 2)nn + 1 = mm$, wo m offenbar größer ist als en, dahero setze man $m = en + p$, so wird $eenn + 2nn + 1 = eenn + 2enp + pp$ oder $2nn = 2enp + pp - 1$ und daraus $n = \frac{ep + \sqrt{(eepp + 2pp - 2)}}{2}$. Hier nehme man nun $p = 1$, so wird $n = e$ und $m = ee + 1$. Dieses fällt auch so gleich in die Augen, dann da $a = ee + 2$ und $n = e$, so ist $ann + 1 = e^4 + 2ee + 1$, welches das Quadrat ist von $ee + 1$. Es sey z. E. $a = 11$ also daß $e = 3$, so wird seyn $11nn + 1 = mm$, wann $n = 3$ und $m = 10$. Wollte man setzen $a = 83$ so ist $e = 9$, und es wird $83nn + 1 = mm$, wann man nimmt $n = 9$ und $m = 82$.

BEMERKUNGEN DES HERAUSGEBERS ZU NEBENSTEHENDER TABELLE

Diese Tabelle für die kleinste Lösung der PELLSCHEN Gleichung $mm = ann + 1$ ist im Originaltext nicht ganz korrekt und in unserer Ausgabe verbessert. Die EULERSCHE Tabelle enthält folgende Fehler:

für	$a = 53$	$m = 66251$	statt $m = 66249$
„	$a = 58$	$n = 2564$	„ $n = 2574$
„	$a = 85$	$m = 285771$	„ $m = 285769$

Die Tabelle ist schon berichtigt in der ersten, von JOHANN III BERNOULLI besorgten französischen Ausgabe (siehe die Anmerkung p. 3), aber in keiner der deutschen Ausgaben.

Der dänische Mathematiker C. F. DEGEN (1766—1825) hat unter dem Titel *Canon Pellianus*, Hafniae 1817, eine Tafel veröffentlicht, in der die kleinsten Lösungen x, y der Gleichung $y^2 = ax^2 + 1$ bis $a = 1000$ angegeben sind. Wie es scheint, ist diese Tafel korrekt. In A. M. LEGENDRES *Théorie des nombres*, 3ème éd. 1830, findet sich ebenfalls eine solche Tafel für $a = 2$ bis $a = 1003$ (Tome I, Table X), die gegenüber den beiden ersten Auflagen nach DEGENS *Canon* korrigiert und zugleich dadurch vereinfacht ist, daß, wo es Lösungen von $y^2 = ax^2 - 1$ gibt, diese angegeben sind; die weit größeren Lösungen von $y^2 = ax^2 + 1$ können dann daraus nach bekannten Sätzen der Zahlentheorie leicht hergeleitet werden. H. W.

Tabelle

welche für einen jeglichen Werth von a die kleinste Zahlen m und n angiebt, allso daß $mm = ann + 1$

a	n	m
2	2	3
3	1	2
5	4	9
6	2	5
7	3	8
8	1	3
10	6	19
11	3	10
12	2	7
13	180	649
14	4	15
15	1	4
17	8	33
18	4	17
19	39	170
20	2	9
21	12	55
22	42	197
23	5	24
24	1	5
26	10	51
27	5	26
28	24	127
29	1820	9801
30	2	11
31	273	1520
32	3	17
33	4	23
34	6	35
35	1	6

a	n	m
37	12	73
38	6	37
39	4	25
40	3	19
41	320	2049
42	2	13
43	531	3482
44	30	199
45	24	161
46	3588	24335
47	7	48
48	1	7
50	14	99
51	7	50
52	90	649
53	9100	66249
54	66	485
55	12	89
56	2	15
57	20	151
58	2574	19603
59	69	530
60	4	31
61	226153980	1766319049
62	8	63
63	1	8
65	16	129
66	8	65
67	5967	48842
68	4	33

a	n	m
69	936	7775
70	30	251
71	413	3480
72	2	17
73	267000	2281249
74	430	3699
75	3	26
76	6630	57799
77	40	351
78	6	53
79	9	80
80	1	9
82	18	163
83	9	82
84	6	55
85	30996	285769
86	1122	10405
87	3	28
88	21	197
89	53000	500001
90	2	19
91	165	1574
92	120	1151
93	1260	12151
94	221064	2143295
95	4	39
96	5	49
97	6377352	62809633
98	10	99
99	1	10