also daß $9r = 6q + 2$ oder $6q = 9r - 2$; dahero

$$q = \frac{9r-2}{6} = r + \frac{3r-2}{6} = r + s,$$

also daß $3r - 2 = 6s$ oder $3r = 6s + 2$; dahero

$$r = \frac{6s+2}{3} = 2s + \frac{2}{3},$$

welches offenbar niemahls eine gantze Zahl werden kann, weil s nothwendig eine gantze Zahl seyn muß, woraus offenbar zu ersehen, daß dergleichen Fragen ihrer Natur nach unmöglich sind.

CAPITEL 2

VON DER SOGENANNTEN REGEL-COECI WO AUS ZWEY GLEICHUNGEN DREY ODER MEHR UNBEKANTE ZAHLEN BESTIMMT WERDEN SOLLEN

24.

In dem vorhergehenden Capitel haben wir gesehen, wie aus einer Gleichung zwey unbekante Zahlen bestimmt werden sollen, dergestalt daß dafür gantze und positive Zahlen gefunden werden. Sind aber zwey Gleichungen vorgegeben und die Frage soll unbestimmt seyn, so müßten mehr als zwey unbekante Zahlen vorkommen. Dergleichen Fragen kommen in den gemeinen Rechen-Büchern vor und pflegen nach der so genannten Regel-Coeci aufgelöst zu werden, von welcher wir hier den Grund anzeigen wollen.

25.

Wir wollen mit einem Exempel den Anfang machen:

I. Frage: 30 Personen, Männer, Weiber und Kinder verzehren in einem Wirths-Hauß 50 Rthl. daran zahlt ein Mann 3 Rthl. ein Weib 2 Rthl. und ein Kind 1 Rthl. wie viel Personen sind von jeder Gattung gewesen?

Es sey die Zahl der Männer $= p$, der Weiber $= q$, und der Kinder $= r$, so erhält man die zwey folgende Gleichungen

$$\text{I.)}\ p + q + r = 30, \qquad \text{II.)}\ 3p + 2q + r = 50;$$

aus welchen die drey Buchstaben p, q und r in gantzen und positiven Zahlen bestimmt werden sollen. Aus der ersten wird nun $r = 30 - p - q$, und deswegen muß $p + q$ kleiner seyn als 30; dieser Werth in der andern für r geschrieben giebt $2p + q + 30 = 50$, also $q = 20 - 2p$ und $p + q = 20 - p$, welches von selbsten kleiner ist als 30. Nun kann man für p alle Zahlen annehmen, die nicht größer sind als 10, woraus folgende Auflösungen entspringen:

Zahl der Männer	$p =$	0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10,
der Weiber	$q =$	20,	18,	16,	14,	12,	10,	8,	6,	4,	2,	0,
der Kinder	$r =$	10,	11,	12,	13,	14,	15,	16,	17,	18,	19,	20,

läßt man die ersten und letzten weg, so bleiben noch 9 wahre Auflösungen übrig.

26.

II. Frage: Einer kauft 100 Stück Vieh, Schweine, Ziegen und Schaafe, für 100 Rthl. kostet ein Schwein $3\frac{1}{2}$ Rthl. eine Ziege $1\frac{1}{3}$ Rthl. ein Schaaf $\frac{1}{2}$ Rthl. wie viel waren es von jeder Gattung?

Die Zahl der Schweine sey $= p$, der Ziegen $= q$, der Schaafe $= r$, so hat man folgende zwey Gleichungen

$$\text{I.)}\ p + q + r = 100, \qquad \text{II.)}\ 3\tfrac{1}{2}p + 1\tfrac{1}{3}q + \tfrac{1}{2}r = 100;$$

diese letztere multiplicirt man mit 6 um die Brüche wegzubringen, so kommt $21p + 8q + 3r = 600$. Aus der ersten hat man $r = 100 - p - q$, welcher Werth in der andern gesetzt giebt $18p + 5q = 300$ oder $5q = 300 - 18p$ und $q = 60 - \frac{18p}{5}$; also muß $18p$ durch 5 theilbahr seyn, oder 5 als einen Factor in sich schließen. Man setze also

$$p = 5s, \quad \text{so wird} \quad q = 60 - 18s \quad \text{und} \quad r = 13s + 40,$$

wo für s eine beliebige gantze Zahl genommen werden kann, doch so daß q nicht negativ werde, dahero s nicht größer als 3 angenommen werden kann, und also wann 0 auch ausgeschloßen wird, nur folgende drey Auflösungen statt finden,

nemlich wann	$s =$	1,	2,	3.
so wird	$p =$	5,	10,	15.
	$q =$	42,	24,	6.
	$r =$	53,	66,	79.

27.

Wann man dergleichen Exempel selbsten vorgeben will, so ist vor allen Dingen darauf zu sehen, daß dieselben möglich sind; um nun davon zu urtheilen, so ist folgendes zu bemercken:

Es seyen die beyden Gleichungen, dergleichen wir bisher gehabt, also vorgestellet

$$\text{I.)}\ x+y+z=a, \qquad \text{II.)}\ fx+gy+hz=b,$$

wo f, g, h, nebst a und b gegebene Zahlen sind; nun sey unter den Zahlen f, g und h die erste f die größte und h die kleinste, da $x+y+z=a$ so wird $fx+fy+fz=fa$. Nun ist $fx+fy+fz$ größer als $fx+gy+hz$ dahero muß fa größer seyn als b, oder b muß kleiner seyn als fa; und da ferner $hx+hy+hz=ha$ und $hx+hy+hz$ gewis kleiner ist als $fx+gy+hz$ so muß auch ha kleiner seyn als b, oder b größer als ha. Wofern demnach die Zahl b nicht kleiner als fa und zugleich größer als ha, so ist die Frage immer unmöglich.

Diese Bedingung pflegt auch also vorgetragen zu werden, daß die Zahl b zwischen diesen Gräntzen fa und ha enthalten seyn muß, ferner muß dieselbe auch nicht einem der beyden Gräntzen gar zu nahe kommen, weil sonsten die übrigen Buchstaben nicht bestimmt werden könnten.

In den vorigen Exempel, wo $a=100$, $f=3\frac{1}{2}$ und $h=\frac{1}{2}$ waren die Gräntzen 350 und 50; wollte man nun setzen $b=51$ anstatt 100, so wären die Gleichungen $x+y+z=100$, und $3\frac{1}{2}x+1\frac{1}{3}y+\frac{1}{2}z=51$ und hier mit 6 multiplicirt $21x+8y+3z=306$; man nehme die erste dreymahl, so wird $3x+3y+3z=300$, so von jener abgezogen läßt $18x+5y=6$, welche gleich offenbar unmöglich ist, weil x und y gantze Zahlen seyn müßen.

28.

Diese Regel kommt auch den Müntz-Meistern und Gold-Schmiden wohl zu statten, wann sie aus drey oder mehrere Sorten von Silber eine Maße von einem gegebenen Gehalt zusammen schmeltzen wollen; wie aus folgendem Exempel zu ersehen:

III. Frage: Ein Müntz-Meister hat dreyerley Silber, das erste ist 14löthig, das andere 11löthig, das dritte 9löthig. Nun soll er eine Maße 30 Marck schwer machen, welche 12löthig seyn soll, wie viel Marck muß er von jeder Sorte nehmen?

Er nehme von der ersten Sorte x Marck, von der zweyten y M. und von der dritten z M. so muß seyn $x + y + z = 30$ welches die erste Gleichung ist.

Da ferner ein Marck von der ersten Sorte 14 Loth fein Silber hält, so werden die x Marck enthalten $14x$ Loth Silber; eben so werden die y Marck von der zweyten Sorte enthalten $11y$ Loth; und die z Marck von der dritten Sorte werden enthalten $9z$ Loth Silber; dahero die gantze Maße an Silber enthalten wird $14x + 11y + 9z$ Loth. Weil nun dieselbe 30 Marck wiegt, wovon ein Marck 12 Loth Silber enthalten soll, so muß auch die Quantität Silber darinnen seyn, nemlich 360 Loth, woraus diese zweyte Gleichung entspringt $14x + 11y + 9z = 360$; hiervon subtrahire man die erste 9mahl genommen, nemlich $9x + 9y + 9z = 270$, so bleibt übrig $5x + 2y = 90$, woraus x und y bestimmt werden soll, und zwar in gantzen Zahlen, alsdann aber wird $z = 30 - x - y$; aus jener Gleichung bekommt man $2y = 90 - 5x$ und $y = 45 - \frac{5x}{2}$. Es sey demnach $x = 2u$ so wird $y = 45 - 5u$ und $z = 3u - 15$, also muß u größer als 4 und gleichwohl kleiner als 10 seyn, woraus folgende Auflösungen gezogen werden:

$u =$	5	6	7	8	9
$x =$	10	12	14	16	18
$y =$	20	15	10	5	0
$z =$	0	3	6	9	12

29.

Bisweilen kommen mehr als drey unbekante Zahlen vor, wo die Auflösung auf eben diese Art geschehen kann, wie aus folgendem Exempel zu ersehen.

IV. Frage: Einer kauft 100 Stück Vieh um 100 Rthl. 1 Ochsen für 10 Rthl. 1 Kuh für 5 Rthl. 1 Kalb für 2 Rthl. 1 Schaaf für $\frac{1}{2}$ Rthl. Wie viel Ochsen, Kühe, Kälber und Schaafe sind es gewesen?

Die Zahl der Ochsen sey $= p$, der Kühe $= q$, der Kälber $= r$ und der Schaafe $= s$, so ist die erste Gleichung: $p + q + r + s = 100$, die zweyte Gleichung aber wird $10p + 5q + 2r + \frac{1}{2}s = 100$, welche um die Brüche wegzubringen mit 2 multiplicirt gibt $20p + 10q + 4r + s = 200$, hievon subtrahire man die erste Gleichung so hat man $19p + 9q + 3r = 100$; hieraus bekommen wir $3r = 100 - 19p - 9q$ und $r = 33 + \frac{1}{3} - 6p - \frac{1}{3}p - 3q$, oder

$$r = 33 - 6p - 3q + \frac{1-p}{3},$$

dahero muß $1 - p$ oder $p - 1$ durch 3 theilbar seyn. Man setze demnach $p - 1 = 3t$ so wird:

$$\begin{aligned} p &= 3t + 1 \\ q &= q \\ r &= 27 - 19t - 3q \\ s &= 72 + 2q + 16t \end{aligned}$$

also muß $19t + 3q$ kleiner seyn als 27. Hier können nun q und t nach Belieben angenommen werden, wann nur diese Bedingung beobachtet wird, daß $19t + 3q$ nicht größer werde als 27; daher wir folgende Fälle zu erwegen haben.

I. wann $t = 0$	II. wann $t = 1$	t kann nicht 2 gesetzt werden weil sonsten r negativ würde.
so wird $p = 1$	so wird $p = 4$	
$q = q$	$q = q$	
$r = 27 - 3q$	$r = 8 - 3q$	
$s = 72 + 2q$	$s = 88 + 2q$	

Im ersten Fall muß q nicht größer seyn als 9 und im zweyten Fall muß q nicht größer seyn als 2. Aus beyden Fällen erhalten wir also folgende Auflösungen.

Aus dem ersten Fall erhalten wir diese 10 Auflösungen:

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
p	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
q	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
r	27	24	21	18	15	12	9	6	3	0
s	72	74	76	78	80	82	84	86	88	90

Aus dem zweyten Fall aber diese 3 Auflösungen:

	I	II	III
p	4	4	4
q	0	1	2
r	8	5	2
s	88	90	92

Dieses sind nun in allem 13 Auflösungen; wann man aber 0 nicht wollte gelten laßen, so wären es nur 10 Auflösungen.

30.

Die Art der Auflösung bleibt einerley, wann auch in der ersten Gleichung die Buchstaben mit gegebenen Zahlen multiplicirt sind wie aus folgendem Exempel zu ersehen:

V. Frage: Man suche drey gantze Zahlen, wann die erste mit 3, die andere mit 5, und die dritte mit 7 multiplicirt wird, daß die Summe der Producte sey 560; wann aber die erste mit 9 die andere mit 25 und die dritte mit 49 multiplicirt wird, daß die Summe der Producte sey 2920?

Es sey die erste Zahl $= x$, die zweyte $= y$, die dritte $= z$, so hat man diese zwey Gleichungen

$$\text{I.)}\ 3x + 5y + 7z = 560, \qquad \text{II.)}\ 9x + 25y + 49z = 2920$$

von der zweyten subtrahirt man die erste dreymal genommen nemlich $9x + 15y + 21z = 1680$, so bleiben übrig $10y + 28z = 1240$, oder durch 2 dividirt $5y + 14z = 620$, daraus wird $y = 124 - \frac{14z}{5}$; also muß sich z durch 5 theilen laßen; dahero setze man $z = 5u$, so wird $y = 124 - 14u$; welche Werthe in der ersten Gleichung für z und y geschrieben, geben $3x - 35u + 620 = 560$, oder

$$3x = 35u - 60 \quad \text{und} \quad x = \frac{35u}{3} - 20;$$

deswegen setze man $u = 3t$, so bekommen wir endlich diese Auflösung:

$$x = 35t - 20,\ y = 124 - 42t, \quad \text{und} \quad z = 15t,$$

wo man für t eine beliebige gantze Zahl setzen kann, doch so daß t größer sey als 0 und doch kleiner als 3, woraus man 2 Auflösungen erhält:

$$\text{I.)}\ \text{wann}\ t = 1 \ \text{so wird}\ x = 15,\ y = 82,\ z = 15,$$
$$\text{II.)}\ \text{wann}\ t = 2 \ \text{wird}\ x = 50,\ y = 40,\ z = 30.$$