welche ein Quadrat seyn muß, und also auch wann sie mit 16 multiplicirt wird; da bekommt man diese $s^4 + 296s^3t + 408sstt + 160st^3 + 16t^4$; hievon setze man die Wurzel $ss + 148st - 4tt$, davon das Quadrat ist

$$s^4 + 296s^3t + 21896sstt - 1184st^3 + 16t^4.$$

Hier heben sich die zwey ersten und letzten Glieder auf, die übrigen aber durch stt dividirt geben $21896s - 1184t = 408s + 160t$ und also

$$\frac{s}{t} = \frac{1344}{21488} = \frac{336}{5372} = \frac{84}{1343}.$$

Also nehme man $s = 84$ und $t = 1343$ folglich $r = 1469$; und aus diesen Zahlen $r = 1469$ und $s = 84$ finden wir

$$x = r^4 - 6rrss + s^4 = 4565486027761 \quad \text{und} \quad y = 1061652293520.$$

CAPITEL 15

AUFLÖSUNG SOLCHER FRAGEN WORZU CUBI ERFORDERT WERDEN

241.

In dem vorigen Capitel sind solche Fragen vorgekommen, wo gewiße Formeln zu Quadraten gemacht werden mußten, da wir dann Gelegenheit gehabt haben, verschiedene Kunstgriffe zu erklären, wodurch die oben gegebenen Regeln zur Ausübung gebracht werden können. Nun ist noch übrig solche Fragen zu betrachten, wo gewiße Formeln zu Cubis gemacht werden sollen, dazu auch schon im vorigen Capitel die Regeln gegeben worden, welche aber jetzt durch die Auflösung der folgenden Fragen in ein größeres Licht gesetzt werden.

242.

I. Frage: Man verlangt zwey Cubos x^3 und y^3 deren Summe wiederum ein Cubus seyn soll?

Da also $x^3 + y^3$ ein Cubus werden soll, so muß auch diese Formel durch den Cubus y^3 dividirt noch ein Cubus seyn, also $\frac{x^3}{y^3} + 1 = \text{Cubo}$. Man setze $\frac{x}{y} = z - 1$ so bekommen wir $z^3 - 3zz + 3z$, welche ein Cubus seyn soll; wollte man nun nach den obigen Regeln die Cubic-Wurzel setzen $z-u$, wovon der Cubus ist $z^3-3uzz+3uuz-u^3$, und u so bestimmen, daß auch die zweyten Glieder wegfielen, so würde $u=1$, die übrigen Glieder aber würden geben

$$3z=3uuz-u^3=3z-1,$$

woraus gefunden wird z gleich unendlich, welcher Werth uns nichts hilft. Man laße aber u unbestimmt, so bekommen wir diese Gleichung:

$$-3zz+3z=-3uzz+3uuz-u^3;$$

aus welcher Quadratischen Gleichung der Werth von z bestimmt werde: wir bekommen aber $3uzz-3zz=3uuz-3z-u^3$, das ist $3(u-1)zz=3(uu-1)z-u^3$, oder $zz=(u+1)z-\frac{u^3}{3(u-1)}$, woraus gefunden wird

$$z=\frac{u+1}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{uu+2u+1}{4}-\frac{u^3}{3(u-1)}\right)}$$

oder

$$z=\frac{u+1}{2}\pm\sqrt{\frac{-u^3+3uu-3u-3}{12(u-1)}}.$$

Die Sache kommt also darauf an, daß dieser Bruch zu einem Quadrat gemacht werde, wir wollen daher den Bruch oben und unten mit $3(u-1)$ multipliciren, damit unten ein Quadrat komme, nemlich $\frac{-3u^4+12u^3-18uu+9}{36(u-1)^2}$, wovon also der Zähler noch ein Quadrat werden muß. In demselben ist zwar das letzte Glied schon ein Quadrat, setzt man aber nach der Regel die Wurzel davon $guu+fu+3$, wovon das Quadrat ist

$$ggu^4+2fgu^3+6guu+ffuu+2fu+9$$

und macht die drey letzten Glieder verschwinden, so wird erstlich $0=2f$ das ist $f=0$, und hernach $6g+ff=-18$, und dahero $g=-3$; alsdann geben die zwey ersten Glieder durch u^3 dividirt $-3u+12=ggu+2fg=9u$; und daher $u=1$, welcher Wert zu nichts führet. Wollen wir nun weiter setzen $u=1+t$, so wird unsere Formel $-12t-3t^4$, welche ein Quadrat seyn soll, welches nicht geschehen kann, wofern t nicht negativ ist. Es sey also $t=-s$, so wird unsere Formel $12s-3s^4$, welche in dem Fall $s=1$ ein Quadrat wird, alsdann aber wäre $t=-1$ und $u=0$, woraus nichts gefunden werden kann. Man mag auch die Sache angreiffen wie man will, so wird man niemahls einen solchen Werth finden, der uns zu unserm Endzweck führet; woraus man schon ziemlich sicher schließen kann, daß es nicht möglich sey zwey Cubos zu finden, deren Summe ein Cubus wäre, welches aber auch folgender Gestalt bewiesen werden kann.

243.

Lehr-Satz: Es ist nicht möglich zwey Cubos zu finden, deren Summe oder auch Differenz ein Cubus wäre.

Hier ist vor allen Dingen zu bemercken, daß wann die Summe unmöglich ist, die Differenz auch unmöglich seyn müße. Dann wann es unmöglich ist daß $x^3+y^3=z^3$, so ist es auch unmöglich daß $z^3-y^3=x^3$, nun aber ist z^3-y^3 die Differenz von zwey Cubis. Es ist also genung die Unmöglichkeit blos von der Summe, oder auch nur von der Differenz zu zeigen, weil das andere daraus folgt. Der Beweis selbst aber wird aus folgenden Sätzen bestehen.

I. Kann man annehmen, daß die Zahlen x und y untheilbar unter sich sind. Dann wann sie einen gemeinen Theiler hätten, so würden sich die Cubi durch den Cubum deßelben theilen laßen. Wäre z. E. $x=2a$, und $y=2b$ so würde $x^3+y^3=8a^3+8b^3$, und wäre dieses ein Cubus, so müßte auch a^3+b^3 ein Cubus seyn.

II. Da nun x und y keinen gemeinen Theiler haben, so sind diese beyde Zahlen entweder beyde ungerad, oder die eine gerad, und die andere ungerad. Im erstern Falle müßte z gerad seyn; im andern Fall aber müßte z ungerad seyn. Also sind von den drey Zahlen x, y und z immer zwey ungerad und eine gerad. Wir wollen dahero zu unserm Beweis die beyden ungeraden nehmen, weil es gleich viel ist, ob wir die Unmöglichkeit der Summe oder der Differenz zeigen, indem die Summe in die Differenz verwandelt wird, wann die eine Wurzel negativ wird.

III. Es seyen demnach x und y zwey ungerade Zahlen, so wird so wohl ihre Summe als Differenz gerad seyn. Man setze dahero $\frac{x+y}{2}=p$ und $\frac{x-y}{2}=q$, so wird $x=p+q$ und $y=p-q$, woraus erhellet, daß von den zwey Zahlen p und q die eine gerad, die andere aber ungerad seyn muß; dahero aber wird $x^3+y^3=2p^3+6pqq=2p(pp+3qq)$: es muß also bewiesen werden, daß dieses Product $2p(pp+3qq)$ kein Cubus seyn könne. Sollte aber die Sache von der Differenz bewiesen werden, so würde $x^3-y^3=6ppq+2q^3=2q(qq+3pp)$, welche Formel der vorigen gantz ähnlich ist, indem nur die Buchstaben p und q verwechselt sind, dahero es genung ist die Unmöglichkeit von dieser Formel $2p(pp+3qq)$ zu zeigen, weil daraus nothwendig folget, daß weder die Summe noch die Differenz von zweyen Cubis ein Cubus werden könne.

IV. Wäre nun $2p(pp+3qq)$ ein Cubus, so wäre derselbe gerad und also durch 8 theilbar: folglich müßte auch der achte Theil unserer Formel eine gantze Zahl und dazu ein Cubus seyn, nemlich $\frac{1}{4}p(pp+3qq)$. Weil nun von den Zahlen p und q die eine gerad, die andere aber ungerad ist, so wird $pp+3qq$ eine ungerade Zahl seyn und sich nicht durch 4 theilen lassen, woraus folget daß sich p durch 4 theilen laßen müße und also $\frac{p}{4}$ eine gantze Zahl sey.

V. Wann nun dieses Product $\frac{p}{4}\cdot(pp+3qq)$ ein Cubus seyn sollte, so müßte ein jeder Factor besonders, nemlich $\frac{p}{4}$ und $pp+3qq$, ein Cubus seyn, so nemlich dieselben keinen gemeinen Theiler haben. Dann wann ein Product von zwey Factoren, die unter sich untheilbar sind ein Cubus seyn soll, so muß nothwendig ein jeder für sich ein Cubus seyn; wann dieselben aber einen gemeinen Theiler haben, so muß derselbe besonders betrachtet werden. Hier ist demnach die Frage: ob diese zwey Factoren p und $pp+3qq$ nicht einen gemeinen Factor haben könnten? welches also untersucht wird. Hätten dieselben einen gemeinen Theiler, so würden auch diese pp und $pp+3qq$ eben denselben gemeinen Theiler haben, und also auch ihre Differenz, welche ist $3qq$, mit dem pp eben denselben gemeinen Theiler haben; da nun p und q unter sich untheilbar sind, so können die Zahlen pp und $3qq$ keinen andern gemeinen Theiler haben als 3, welches geschieht wann sich p durch 3 theilen läßt.

VI. Wir haben dahero zwey Fälle zu erwegen: der erste ist wann die Factoren p und $pp+3qq$ keinen gemeinen Theiler haben, welches immer geschieht, wann sich p nicht durch 3 theilen läßt; der andere Fall aber ist, wann dieselben einen gemeinen Theiler haben, welches geschieht wann sich p durch 3 theilen läßt, da dann beyde durch 3 theilbar seyn werden. Diese zwey Fälle müßen sorgfältig von einander unterschieden werden, weil man den Beweis für einen jeden ins besondere führen muß.

VII. Erster Fall. Es sey demnach p nicht durch 3 theilbar und also unsere beyden Factoren $\frac{p}{4}$ und $pp + 3qq$ untheilbar unter sich, so müßte ein jeder für sich ein Cubus seyn. Laßt uns dahero $pp + 3qq$ zu einem Cubo machen, welches geschieht wann man, wie oben gezeigt worden, setzt

$$p + q\sqrt{-3} = (t + u\sqrt{-3})^3 \quad \text{und} \quad p - q\sqrt{-3} = (t - u\sqrt{-3})^3.$$

Damit dadurch werde $pp + 3qq = (tt + 3uu)^3$ und also ein Cubus; hieraus aber wird

$$p = t^3 - 9tuu = t(tt - 9uu) \quad \text{und} \quad q = 3ttu - 3u^3 = 3u(tt - uu);$$

weil nun q eine ungerade Zahl ist, so muß u auch ungerad, t aber gerad seyn, weil sonsten $tt - uu$ eine gerade Zahl würde.

VIII. Da nun $pp + 3qq$ zu einem Cubo gemacht und gefunden worden

$$p = t(tt - 9uu) = t(t + 3u)(t - 3u),$$

so müßte jetzt noch $\frac{p}{4}$ und also auch $2p$, ein Cubus seyn; dahero diese Formel $2t(t + 3u)(t - 3u)$ ein Cubus seyn müßte. Hier ist aber zu bemercken, daß t erstlich eine gerade Zahl und nicht durch 3 theilbar ist, weil sonsten auch p durch 3 theilbar seyn würde, welcher Fall hier ausdrücklich ausgenommen ist; also sind diese drey Factoren $2t$, $t + 3u$ und $t - 3u$ unter sich untheilbar, und deswegen müßte ein jeder für sich ein Cubus seyn. Man setze dahero $t + 3u = f^3$ und $t - 3u = g^3$ so wird $2t = f^3 + g^3$. Nun aber ist $2t$ auch ein Cubus, und folglich hätten wir hier zwey Cubos f^3 und g^3 deren Summe wieder ein Cubus wäre, welche offenbahr ungleich viel kleiner wären, als die anfänglich angenommenen Cubi x^3 und y^3. Dann nachdem wir gesetzt haben $x = p + q$ und $y = p - q$, anjetzo aber p und q durch die Buchstaben t und u bestimmt haben, so müßen die Zahlen p und q viel größer seyn als t und u.

IX. Wann es also zwey solche Cubi in den größten Zahlen gäbe, so könnte man auch in viel kleineren Zahlen eben dergleichen anzeigen deren Summ auch ein Cubus wäre, und solcher Gestalt könnte man immer auf kleinere dergleichen Cubos kommen. Da es nun in kleinen Zahlen dergleichen Cubos gewis nicht giebt, so sind sie auch in den allergrößten nicht möglich. Dieser Schluß wird dadurch bekräftiget, daß auch der andere Fall eben dahin leitet, wie wir so gleich sehen werden.

X. Zweyter Fall. Es sey nun p durch 3 theilbar, q aber nicht, und man setze $p=3r$ so wird unsere Formel

$$\frac{3r}{4}\cdot(9rr+3qq),\quad \text{oder}\quad \frac{9}{4}r(3rr+qq),$$

welche beyde Factoren unter sich untheilbar sind, weil sich $3rr+qq$ weder durch 2 noch durch 3 theilen läßt, und r eben so wohl gerad seyn muß als p, deswegen muß ein jeder von diesen beyden Factoren für sich ein Cubus seyn.

XI. Machen wir nun den zweyten $3rr+qq$ oder $qq+3rr$ zu einem Cubo, so finden wir wie oben $q=t(tt-9uu)$ und $r=3u(tt-uu)$; wo zu mercken, daß weil q ungerad war, hier auch t ungerad, u aber eine gerade Zahl seyn müße.

XII. Weil nun $\frac{9r}{4}$ auch ein Cubus seyn muß und also auch mit dem Cubo $\frac{8}{27}$ multiplicirt, so muß $\frac{2r}{3}$ das ist $2u(tt-uu)=2u(t+u)(t-u)$ ein Cubus seyn, welche drey Factoren unter sich untheilbar und also ein jeder für sich ein Cubus seyn müßte; wann man aber setzt $t+u=f^3$ und $t-u=g^3$, so folgt daraus $2u=f^3-g^3$, welches auch ein Cubus seyn müßte, indem $2u$ ein Cubus ist. Solcher Gestalt hätte man zwey weit kleinere Cubos f^3 und g^3 deren Differenz ein Cubus wäre, und folglich auch solche deren Summe ein Cubus wäre; dann man darf nur setzen $f^3-g^3=h^3$, so wird $f^3=h^3+g^3$, und also hätte man zwey Cubos deren Summe ein Cubus wäre. Hierdurch wird nun der obige Schluß vollkommen bestätiget, daß es auch in den größten Zahlen keine solche Cubi gebe, deren Summe oder Differenz ein Cubus wäre, und das deswegen, weil in den kleinsten Zahlen dergleichen nicht anzutreffen sind.[1])

244.

Weil es nun nicht möglich ist zwey solche Cubos zu finden, deren Summe oder Differenz ein Cubus wäre, so fält auch unsere erste Frage weg, und man pflegt hier vielmehr den Anfang mit dieser Frage zu machen, wie drey

1) Siehe die Anmerkung p. 410, ferner EULERS Abhandlung 272 (des ENESTRÖMSCHEN Verzeichnisses) *Supplementum quorundam theorematum arithmeticorum quae in nonnullis demonstrationibus supponuntur*, Novi Comment. acad. sc. Petrop. 8 (1760/1), 1763, p. 105—128; *LEONHARDI EULERI Opera omnia*, series I, vol. 2. H. W.

Cubi gefunden werden sollen, deren Summe einen Cubus ausmache: man kann aber zwey von denselben nach Belieben annehmen, also daß nur der dritte gefunden werden soll; welche Frage wir anjetzo vornehmen wollen.

245.

II. Frage: Es wird zu zwey gegebenen Cubis a^3 und b^3 noch ein dritter Cubus x^3 verlangt, welcher mit denselben zusammen wiederum einen Cubum ausmache?

Es soll also diese Formel $a^3+b^3+x^3$ ein Cubus werden, welches da es nicht anders geschehen kann, als wann schon ein Fall bekannt ist, ein solcher Fall aber hier sich von selbsten darbiethet nemlich $x=-a$, so setze man $x=y-a$, da wird $x^3=y^3-3ayy+3aay-a^3$, und dahero unsere Formel die ein Cubus werden soll $y^3-3ayy+3aay+b^3$, wovon das erste und letzte Glied schon ein Cubus ist, dahero man so gleich zwey Auflösungen finden kann.

I. Nach der ersten setze man die Wurzel davon $y+b$, deren Cubus ist $y^3+3byy+3bby+b^3$; woraus wir bekommen $-3ay+3aa=3by+3bb$, dahero $y=\frac{aa-bb}{a+b}=a-b$; folglich $x=-b$ welcher uns zu nichts dienet.

II. Man kan aber die Wurzel auch setzen $b+fy$, davon der Cubus ist $f^3y^3+3bffyy+3bbfy+b^3$; und f also bestimmen, daß auch die dritten Glieder wegfallen, welches geschieht wann $3aa=3bbf$ oder $f=\frac{aa}{bb}$, da dann die zwey ersten Glieder durch yy dividirt geben $y-3a=f^3y+3bff=\frac{a^6y}{b^6}+\frac{3a^4}{b^3}$, welche mit b^6 multiplicirt giebt

$$b^6y-3ab^6=a^6y+3a^4b^3;$$

daraus gefunden wird

$$y=\frac{3a^4b^3+3ab^6}{b^6-a^6}=\frac{3ab^3(a^3+b^3)}{b^6-a^6}=\frac{3ab^3}{b^3-a^3},$$

und allso

$$x=y-a=\frac{2ab^3+a^4}{b^3-a^3}=a\cdot\frac{2b^3+a^3}{b^3-a^3}.$$

Wann also die beyden Cubi a^3 und b^3 gegeben sind, so haben wir hier die Wurzel des dritten gesuchten Cubi gefunden, und damit dieselbe positiv werde, so darf man nur b^3 für den größern Cubum annehmen, welches wir durch einige Exempel erläutern wollen.

I. Es seyen die zwey gegebenen Cubi 1 und 8, also daß $a = 1$ und $b = 2$, so wird diese Form $9 + x^3$ ein Cubus, wann $x = \frac{17}{7}$; dann da wird $9 + x^3 = \frac{8000}{343} = \left(\frac{20}{7}\right)^3$.

II. Es seyen die zwey gegebenen Cubi 8 und 27, also daß $a = 2$ und $b = 3$, so wird diese Form $35 + x^3$ ein Cubus, wann $x = \frac{124}{19}$.

III. Es seyen die zwey gegebenen Cubi 27 und 64, also daß $a = 3$ und $b = 4$, so wird diese Form $91 + x^3$ ein Cubus, wann $x = \frac{465}{37}$.

Wollte man zu zwey gegebenen Cubis noch mehr dergleichen dritte finden, so müßte man in der ersten Form $a^3 + b^3 + x^3$ ferner setzen $x = \frac{2ab^3 + a^4}{b^3 - a^3} + z$, da man dann wieder auf eine ähnliche Formel kommen würde, woraus sich neue Werthe für z bestimmen ließen, welches aber in allzuweitläufige Rechnungen führen würde.

246.

Bey dieser Frage ereignet sich aber ein merckwürdiger Fall, wann die beiden gegebenen Cubi einander gleich sind, oder $b = a$; dann da bekommen wir $x = \frac{3a^4}{0}$ das ist unendlich, und erhalten also keine Auflösung; dahero diese Frage wann $2a^3 + x^3$ ein Cubus werden soll, noch nicht hat aufgelößt werden können. Es sey z. E. $a = 1$ und also unsere Formel $2 + x^3$, so ist zu mercken, daß was man auch immer vor Veränderungen vornehmen mag, alle Bemühungen vergebens sind, und nimmer daraus ein geschickter Werth für x gefunden werden kann, woraus sich schon ziemlich sicher schließen läßt, daß zu einem doppelten Cubo kein Cubus gefunden werden könne, welcher mit jenem zusammen einen Cubum ausmachte, oder daß diese Gleichung $2a^3 + x^3 = y^3$ unmöglich sey; aus derselben aber folget diese $2a^3 = y^3 - x^3$, und dahero auch nicht möglich ist zwey Cubos zu finden, deren Differenz ein doppelter Cubus wäre, welches auch von der Summe zweyer Cubus zu verstehen und folgender Gestalt bewiesen werden kann.

247.

Lehr-Satz. Weder die Summe, noch die Differenz zwischen zwey Cubis kann jemahls einem doppelten Cubo gleich werden, oder diese Formel $x^3 \pm y^3 = 2z^3$ ist an sich selbst unmöglich, außer dem Fall $y = x$, welcher für sich klar ist.

Hier können wieder x und y als untheilbar unter sich angenommen werden, dann wann sie einen gemeinen Theiler hätten, so müßte auch z

dadurch theilbar seyn und also die gantze Gleichung durch den Cubum davon getheilt werden können. Weil nun $x^3 \pm y^3$ eine gerade Zahl seyn soll, so müßen beyde Zahlen x und y ungerad seyn, dahero so wohl ihre Summe als Differenz gerad seyn wird. Man setze allso $\frac{x+y}{2}=p$ und $\frac{x-y}{2}=q$, so wird $x=p+q$ und $y=p-q$; da dann von den Zahlen p und q die eine gerad die andere aber ungerad seyn muß. Hieraus folgt aber

$$x^3+y^3=2p^3+6pqq=2p(pp+3qq), \quad \text{und} \quad x^3-y^3=6ppq+2q^3=2q(3pp+qq),$$

welche beyde Formeln einander völlig ähnlich sind. Dahero es genung seyn wird zu zeigen, daß diese Formel $2p(pp+3qq)$ kein doppelter Cubus, und also diese $p(pp+3qq)$ kein Cubus seyn könne, wovon der Beweis in folgenden Sätzen enthalten ist.

I. Hier kommen wieder zwey Fälle zu betrachten vor, davon der erste ist, wann die zwey Factoren p und $pp+3qq$ keinen gemeinen Theiler haben, da dann ein jeder für sich ein Cubus seyn muß; der andere Fall aber ist, wann dieselben einen gemeinen Theiler haben, welcher wie wir oben gesehen kein anderer seyn kann als 3.

II. Erster Fall. Es sey demnach p nicht theilbar durch 3, und also die beyden Factores unter sich unteilbar, so mache man erstlich $pp+3qq$ zu einem Cubo, welches geschieht, wann $p=t(tt-9uu)$ und $q=3u(tt-uu)$, also daß noch der Werth von p ein Cubus seyn müßte. Da nun t durch 3 nicht theilbar ist, weil sonsten p auch durch 3 theilbar seyn würde, so sind diese zwey Factoren t und $tt-9uu$ untheilbar unter sich, und muß folglich ein jeder für sich ein Cubus seyn.

III. Der letztere aber hat wieder zwey Factores, nemlich $t+3u$ und $t-3u$, welche unter sich untheilbar sind, erstlich weil sich t nicht durch 3 theilen läßt, hernach aber weil von den Zahlen t und u die eine gerad und die andere ungerad ist. Dann wann beyde ungerad wären, so würde nicht nur p sondern auch q ungerad werden, welches nicht seyn kann, folglich muß auch ein jeder von diesen Factoren $t+3u$ und $t-3u$ für sich ein Cubus seyn.

IV. Man setze dahero $t+3u=f^3$ und $t-3u=g^3$, so wird $2t=f^3+g^3$. Nun aber ist t für sich ein Cubus welcher sey $=h^3$, allso daß $f^3+g^3=2h^3$ wäre, das ist wir hätten zwey weit kleinere Cubos nemlich f^3 und g^3, deren Summe auch ein doppelter Cubus wäre.

V. Zweyter Fall. Es sey nun p durch 3 theilbar und also q nicht. Man setze demnach $p = 3r$, so wird unsere Formel

$$3r(9rr + 3qq) = 9r(3rr + qq),$$

welche Factoren jetzt unter sich untheilbar sind und dahero ein jeder ein Cubus seyn muß.

VI. Um nun den letzteren $qq + 3rr$ zu einem Cubo zu machen, so setze man $q = t(tt - 9uu)$ und $r = 3u(tt - uu)$, da dann wieder von den Zahlen t und u die eine gerad, die andere aber ungerad seyn muß, weil sonsten die beyde Zahlen q und r gerad würden. Hieraus aber bekommen wir den erstern Factor $9r = 27u(tt - uu)$, welcher ein Cubus seyn müßte, und folglich auch durch 27 dividirt, nemlich $u(tt - uu)$ das ist $u(t + u)(t - u)$.

VII. Weil nun auch diese drey Factoren unter sich untheilbar sind, so muß ein jeder für sich ein Cubus seyn. Setzt man demnach für die beyden letztern $t + u = f^3$ und $t - u = g^3$, so bekommt man $2u = f^3 - g^3$; weil nun auch u ein Cubus seyn muß, so erhalten wir in weit kleinern Zahlen zwey Cubos f^3 und g^3, deren Differenz gleichfals ein doppelter Cubus wäre.

VIII. Weil es nun in kleinen Zahlen keine dergleichen Cubos giebt, deren Summe oder Differenz ein doppelter Cubus wäre, so ist klar daß es auch in den größten Zahlen dergleichen nicht gebe.

IX. Man könnte zwar einwenden, daß da es in kleinern Zahlen gleich wohl einen solchen Fall gebe, nemlich wann $f = g$, der obige Schluß betriegen könnte. Allein wann $f = g$ wäre, so hätte man in dem erstern Fall $t + 3u = t - 3u$ und also $u = 0$, folglich wäre auch $q = 0$ und da wir gesetzt hatten $x = p + q$ und $y = p - q$, so wären auch die zwey ersten Cubi x^3 und y^3 schon einander gleich gewesen, welcher Fall ausdrücklich ausgenommen worden. Eben so auch in dem andern Fall, wann $f = g$ wäre, so müßte seyn $t + u = t - u$ und also wiederum $u = 0$, dahero auch $r = 0$ und folglich $p = 0$, da dann wiederum die beyden erstern Cubi x^3 und y^3 einander gleich würden, von welchem Fall aber keines weges die Frage ist.

248.

III. Frage: Man verlangt auf eine allgemeine Art drey Cubos x^3, y^3 und z^3, deren Summe wiederum einen Cubum ausmache?

Wir haben schon gesehen, daß man zwey von diesen Cubis für bekannt annehmen und daraus immer den dritten bestimmen könne, wann nur die beyden erstern einander nicht gleich wären; allein nach der obigen Methode findet man in einem jeden Fall nur einen Werth für den dritten Cubum und es würde sehr schwer fallen daraus noch mehrere ausfindig zu machen.

Wir sehen also hier alle drey Cubos als unbekannt an; und um eine allgemeine Auflösung zu geben, setzen wir $x^3+y^3+z^3=v^3$, und bringen den einen von den erstern auf die andere Seite, damit wir bekommen $x^3+y^3=v^3-z^3$; welcher Gleichung folgender Gestalt ein Genügen geschehen kann.

I. Man setze $x=p+q$ und $y=p-q$, so wird wie wir gesehen $x^3+y^3=2p(pp+3qq)$; ferner setze man $v=r+s$ und $z=r-s$, so wird $v^3-z^3=2s(ss+3rr)$; dahero dann seyn muß

$$2p(pp+3qq)=2s(ss+3rr), \quad \text{oder} \quad p(pp+3qq)=s(ss+3rr).$$

II. Wir haben oben gesehen, daß eine solche Zahl $pp+3qq$ keine andere Theiler habe, als welche selbst in eben dieser Form enthalten sind. Weil nun diese beyde Formeln $pp+3qq$ und $ss+3rr$ nothwendig einen gemeinen Theiler haben müßen, so sey derselbe $=tt+3uu$.

III. Zu diesem Ende setze man

$$pp+3qq=(ff+3gg)(tt+3uu) \quad \text{und} \quad ss+3rr=(hh+3kk)(tt+3uu),$$

da dann $p=ft+3gu$ und $q=gt-fu$ wird; folglich

$$pp=fftt+6fgtu+9gguu \quad \text{und} \quad qq=ggtt-2fgtu+ffuu;$$

hieraus

$$pp+3qq=(ff+3gg)tt+(3ff+9gg)uu$$

das ist

$$pp+3qq=(ff+3gg)(tt+3uu).$$

IV. Eben so erhalten wir aus der andern Formel

$$s=ht+3ku \quad \text{und} \quad r=kt-hu,$$

woraus diese Gleichung entspringt

$$(ft+3gu)(ff+3gg)(tt+3uu)=(ht+3ku)(hh+3kk)(tt+3uu),$$

welche durch $tt+3uu$ dividirt giebt

$$ft(ff+3gg)+3gu(ff+3gg)=ht(hh+3kk)+3ku(hh+3kk),$$

oder

$$ft(ff+3gg)-ht(hh+3kk)=3ku(hh+3kk)-3gu(ff+3gg),$$

woraus wir erhalten

$$t = \frac{3k(hh+3kk)-3g(ff+3gg)}{f(ff+3gg)-h(hh+3kk)}u.$$

V. Um nun gantze Zahlen zu bekommen, so nehme man

$$u = f(ff+3gg) - h(hh+3kk),$$

damit sey

$$t = 3k(hh+3kk) - 3g(ff+3gg),$$

wo man die vier Buchstaben f, g, h und k nach Belieben annehmen kann.

VI. Hat man nun aus diesen vier Zahlen die Werthe für t und u gefunden, so erhält man daraus:

I.) $p = ft + 3gu$, II.) $q = gt - fu$, III.) $s = ht + 3ku$, IV.) $r = kt - hu$,

und hieraus endlich für die Auflösung unserer Frage

$$x = p + q, \quad y = p - q, \quad z = r - s \quad \text{und} \quad v = r + s,$$

welche Auflösung so allgemein ist, daß darinnen alle mögliche Fälle enthalten sind, weil in dieser gantzen Rechnung keine willkührliche Einschränckung gemacht worden.

Der gantze Kunstgriff bestehet darinn, daß unsere Gleichung durch $tt + 3uu$ theilbar gemacht wurde, wodurch die Buchstaben t und u durch eine einfache Gleichung haben bestimmt werden können. Die Anwendung dieser Formeln kann auf unendlich vielerley Art angestellet werden, wovon wir einige Exempel anführen wollen.

I. Es sey $k = 0$ und $h = 1$, so wird

$$t = -3g(ff+3gg) \quad \text{und} \quad u = f(ff+3gg) - 1;$$

hieraus also

$p = -3fg(ff+3gg) + 3fg(ff+3gg) - 3g = -3g$, $q = -(ff+3gg)^2 + f$, ferner $s = -3g(ff+3gg)$ und $r = -f(ff+3gg) + 1$, woraus wir endlich bekommen

$$x = -3g - (ff+3gg)^2 + f, \quad y = -3g + (ff+3gg)^2 - f,$$

$z = (3g - f)(ff+3gg) + 1$ und endlich $v = -(3g+f)(ff+3gg) + 1$.

Laßt uns nun setzen $f = -1$ und $g = +1$, so bekommen wir

$$x = -20, \quad y = 14, \quad z = 17 \quad \text{und} \quad v = -7;$$

dahero haben wir diese Gleichung

$$-20^3 + 14^3 + 17^3 = -7^3 \quad \text{oder} \quad 14^3 + 17^3 + 7^3 = 20^3.$$

II. Es sey $f = 2$, $g = 1$ und also $ff + 3gg = 7$; ferner $h = 0$ und $k = 1$, also $hh + 3kk = 3$, so wird seyn $t = -12$ und $u = 14$; hieraus wird

$$p = 2t + 3u = 18, \quad q = t - 2u = -40, \quad r = t = -12 \quad \text{und} \quad s = 3u = 42;$$

dahero wir bekommen

$$x = p + q = -22, \quad y = p - q = 58, \quad z = r - s = -54 \quad \text{und} \quad v = r + s = 30;$$

also daß

$$-22^3 + 58^3 - 54^3 = 30^3 \quad \text{oder} \quad 58^3 = 30^3 + 54^3 + 22^3.$$

Da sich nun alle Wurzeln durch 2 theilen laßen, so wird auch seyn

$$29^3 = 15^3 + 27^3 + 11^3.$$

III. Es sey $f = 3$, $g = 1$, $h = 1$ und $k = 1$, also $ff + 3gg = 12$ und $hh + 3kk = 4$, so wird $t = -24$ und $u = 32$, welche sich durch 8 theilen laßen; und da es hier nur auf ihre Verhältniße ankommt, so wollen wir setzen $t = -3$ und $u = 4$. Hieraus bekommen wir $p = 3t + 3u = +3$, $q = t - 3u = -15$, $r = t - u = -7$ und $s = t + 3u = +9$; hieraus wird $x = -12$ und $y = 18$, $z = -16$ und $v = 2$, also daß

$$-12^3 + 18^3 - 16^3 = 2^3 \quad \text{oder} \quad 18^3 = 16^3 + 12^3 + 2^3:$$

oder auch durch 2 abgekürtzt

$$9^3 = 8^3 + 6^3 + 1^3.$$

IV. Laßt uns setzen $g = 0$ und $k = h$, so daß f und h nicht bestimmt werden. Da wird nun $ff + 3gg = ff$ und $hh + 3kk = 4hh$; also bekommen wir $t = 12h^3$ und $u = f^3 - 4h^3$; daher ferner $p = ft = 12fh^3$, $q = -f^4 + 4fh^3$, $r = 12h^4 - hf^3 + 4h^4 = 16h^4 - hf^3$ und $s = 3hf^3$, daraus endlich

$$x = p + q = 16fh^3 - f^4, \qquad y = p - q = 8fh^3 + f^4,$$
$$z = r - s = 16h^4 - 4hf^3, \quad \text{und} \quad v = r + s = 16h^4 + 2hf^3.$$

Nehmen wir nun $f = h = 1$, so erhalten wir $x = 15$, $y = 9$, $z = 12$

und $v = 18$, welche durch 3 abgekürtzt geben $x = 5$, $y = 3$, $z = 4$ und $v = 6$, also daß

$$3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3.$$

Hierbey ist merckwürdig, daß diese drey Wurzeln 3, 4, 5 um Eins steigen, dahero wir untersuchen wollen ob es noch mehr dergleichen gebe?

249.

IV. Frage: Man verlangt drey Zahlen in einer Arithmetischen Progression, deren Differenz $= 1$, also daß die Cubi derselben Zahlen zusammen addirt, wieder einen Cubum hervorbringen?

Es sey x die mittlere dieser Zahlen, so wird die kleinere $= x - 1$ und die größere $= x + 1$; die Cubi derselben addirt geben nun

$$3x^3 + 6x = 3x(xx + 2),$$

welches ein Cubus seyn soll. Hierzu ist nun nöthig daß ein Fall bekannt sey wo dieses geschieht, und nach einigem Probiren findet man $x = 4$, dahero setzen wir nach den oben gegebenen Regeln $x = 4 + y$, so wird

$$xx = 16 + 8y + yy \quad \text{und} \quad x^3 = 64 + 48y + 12yy + y^3,$$

woraus unsere Formel wird $216 + 150y + 36yy + 3y^3$, wo das erste Glied ein Cubus ist, das letzte aber nicht. Man setze demnach die Wurzel $6 + fy$ und mache daß die beyden ersten Glieder wegfallen; da nun der Cubus davon ist $216 + 108fy + 18ffyy + f^3y^3$, so muß seyn $150 = 108f$, also $f = \frac{25}{18}$. Die übrigen Glieder aber durch yy dividirt geben $36 + 3y = 18ff + f^3y = \frac{25^2}{18} + \frac{25^3}{18^3}y$, oder $18^3 \cdot 36 + 18^3 \cdot 3y = 18^2 \cdot 25^2 + 25^3 y$ oder $18^3 \cdot 36 - 18^2 \cdot 25^2 = 25^3 y - 18^3 \cdot 3y$, dahero

$$y = \frac{18^3 \cdot 36 - 18^2 \cdot 25^2}{25^3 - 3 \cdot 18^3} = \frac{18^2(18 \cdot 36 - 25^2)}{25^3 - 3 \cdot 18^3},$$

und also

$$y = -\frac{324 \cdot 23}{1871} = -\frac{7452}{1871}; \quad \text{folglich} \quad x = \frac{32}{1871}.$$

Da es beschwerlich scheinen möchte diese Reduction zu einem Cubo weiter zu verfolgen, so ist zu mercken daß die Frage immer könne auf Quadrate gebracht werden. Dann da $3x(xx + 2)$ ein Cubus seyn soll, so setze man denselben $= x^3y^3$, da man denn erhält $3xx + 6 = xxy^3$ und also $xx = \frac{6}{y^3 - 3} = \frac{36}{6y^3 - 18}$. Da nun der Zähler dieses Bruchs schon ein Quadrat ist, so ist nur noch nöthig, den Nenner $6y^3 - 18$ zu einem Quadrat zu machen; wozu wiederum nöthig ist einen Fall zu errathen. Weil sich aber 18 durch 9 theilen läßt, 6 aber nur durch 3, so muß y sich auch durch 3 theilen laßen. Man setze deswegen $y = 3z$, so wird unser Nenner $= 162z^3 - 18$ welcher durch 9 dividirt, nemlich $18z^3 - 2$, noch ein Quadrat seyn muß. Dieses geschieht nun offenbar wann $z = 1$; man setze dahero $z = 1 + v$, so muß seyn $16 + 54v + 54vv + 18v^3 = \square$. Davon setze man die Wurzel $4 + \frac{27}{4}v$, deren Quadrat ist $16 + 54v + \frac{729}{16}vv$, und also $54 + 18v = \frac{729}{16}$; oder $18v = -\frac{135}{16}$, folglich $2v = -\frac{15}{16}$, und $v = -\frac{15}{32}$, hieraus erhalten wir $z = 1 + v = \frac{17}{32}$, ferner $y = \frac{51}{32}$.

Nun wollen wir den obigen Nenner betrachten, welcher war

$$6y^3 - 18 = 162z^3 - 18 = 9(18z^3 - 2).$$

Von diesem Factor aber $18z^3 - 2$ haben wir die Quadrat-Wurzel $4 + \frac{27}{4}v = \frac{107}{128}$, also die Quadrat-Wurzel aus dem gantzen Nenner ist $\frac{321}{128}$; aus dem Zähler aber ist derselbe $= 6$, woraus folget $x = \frac{6}{\frac{321}{128}} = \frac{256}{107}$, welcher Werth von dem vorher gefundenen gantz unterschieden ist. Also sind die Wurzeln von unsern drey Cubis folgende:

$$\text{I.)}\ x - 1 = \frac{149}{107};\quad \text{II.)}\ x = \frac{256}{107};\quad \text{III.)}\ x + 1 = \frac{363}{107},$$

deren Cubi zusammen addirt einen Cubum hervorbringen, davon die Wurzel seyn wird $xy = \frac{256}{107} \cdot \frac{51}{32} = \frac{408}{107}$.

250.

Wir wollen hiermit diesen Abschnitt von der unbestimmten Analytic beschließen, weil wir bey den angebrachten Fragen Gelegenheit genug gefunden haben die vornehmsten Kunstgriffe zu erklären, welche bisher in dieser Wissenschaft sind gebraucht worden.

ENDE DES ZWEYTEN THEILS