andere aber in der Form $xx+6yy$. Nun aber sind die Zahlen der erstern bis auf 50 folgende:

I.) 2, 3, 5, 8, 11, 12, 14, 18, 20, 21, 27, 29, 30, 32, 35, 44, 45, 48, 50.

In der zweyten Art sind folgende Zahlen bis 50 enthalten:

II.) 1, 4, 6, 7, 9, 10, 15, 16, 22, 24, 25, 28, 31, 33, 36, 40, 42, 49.

Laßt uns nun eine Zahl von der ersten Art z. E. 35 mit einer von der zweyten Art 31 multipliciren, so ist das Product 1085, welche Zahl gewiß in der Form $2xx+3yy$ enthalten ist, oder man kann vor y eine solche Zahl finden daß $1085-3yy$ ein doppeltes Quadrat nemlich $2xx$ werde; dieses geschieht nun erstlich wann $y=3$, dann da wird $x=23$; hernach auch wann $y=11$, dann da wird $x=19$; drittens auch noch wann $y=13$, dann da wird $x=17$, und endlich viertens wann $y=19$, dann da wird $x=1$.

Man kann diese beyde Arten von Zahlen wiederum in einfache und zusammengesetzte abtheilen, indem diejenigen zusammengesetzte sind welche aus zwey oder mehr kleinern Zahlen von der einen oder der andern Art bestehen: also werden von der ersten Art die folgende einfach seyn: 2, 3, 5, 11, 29, diese aber zusammengesetzt 8, 12, 14, 18, 20, 21, 27, 30, 32, 35, 44, 45, 48, 50. Von der zweyten Art aber sind folgende einfach 1, 7, 31, die übrigen sind alle zusammengesetzt nemlich 4, 6, 9, 10, 15, 16, 22, 24, 25, 28, 33, 36, 40, 42, 49.

CAPITEL 12

VON DER VERWANDELUNG DIESER FORMEL $axx+cyy$ IN QUADRATEN ODER AUCH HÖHEREN POTESTÄTEN

181.

Wir haben schon oben gesehen, daß Zahlen von dieser Form $axx+cyy$ öfters unmöglich zu Quadrate gemacht werden können: so oft es aber möglich ist, so kann diese Form in eine andere verwandelt werden in welcher $a=1$ ist. Z. E. diese Form $2pp-qq$ kann ein Quadrat werden, sie läßt sich aber auch solcher Gestalt vorstellen $(2p+q)^2-2(p+q)^2$. Setzt man nun $2p+q=x$ und $p+q=y$, so kommt diese Formel $xx-2yy$ heraus, wo $a=1$ und $c=-2$ ist. Eben eine solche Verwandelung findet auch immer statt, so oft es möglich ist dergleichen Formeln zu einem Quadrat zu machen.

Wann demnach diese Formel $axx + cyy$ zu einem Quadrat oder einer andern höhern geraden Potestät gemacht werden soll, so können wir sicher setzen $a = 1$, und die übrigen Fällen als unmöglich ansehen.

182.

Es sey daher diese Formel vorgelegt $xx + cyy$, welche zu einem Quadrat gemacht werden soll. Da nun dieselbe aus diesen Factoren besteht

$$(x + y\sqrt{-c})(x - y\sqrt{-c}),$$

so müßen dieselben entweder Quadraten, oder mit einerley Zahlen multiplicirte Quadrate seyn. Dann wann das Product von zweyen Zahlen ein Quadrat seyn soll, als z. E. pq, so wird erfordert, entweder daß $p = rr$ und $q = ss$, das ist daß ein jeder Factor vor sich ein Quadrat sey, oder daß $p = mrr$ und $q = mss$, das ist daß die Factores Quadrate mit einerley Zahl multiplicirt seyen, deswegen setze man $x + y\sqrt{-c} = m(p + q\sqrt{-c})^2$, so wird von selbsten $x - y\sqrt{-c} = m(p - q\sqrt{-c})^2$, dahero bekommen wir $xx + cyy = mm(pp + cqq)^2$, und wird also ein Quadrat. Um aber x und y zu bestimmen, so haben wir diese Gleichungen

$$x + y\sqrt{-c} = mpp + 2mpq\sqrt{-c} - mcqq$$

und

$$x - y\sqrt{-c} = mpp - 2mpq\sqrt{-c} - mcqq,$$

wo offenbahr das x gleich seyn muß dem rationalen Teil, $y\sqrt{-c}$ aber dem irrationalen Theil; dahero wird $x = mpp - mcqq$ und $y\sqrt{-c} = 2mpq\sqrt{-c}$ oder $y = 2mpq$.

Setzt man also $x = mpp - mcqq$ und $y = 2mpq$, so wird unsere Formel $xx + cyy$ ein Quadrat, nemlich $mm(pp + cqq)^2$, davon die Wurzel ist $mpp + mcqq$.

183.

Sollen die zwey Zahlen x und y unter sich untheilbahr seyn, oder keinen gemeinen Theiler haben, so muß $m = 1$ gesetzt werden. Wann daher $xx + cyy$ ein Quadrat seyn soll, so nimmt man nur $x = pp - cqq$ und $y = 2pq$, da dann diese Formel dem Quadrat von $pp + cqq$ gleich wird. Anstatt daß man setzt $x = pp - cqq$, so kann man auch setzen $x = cqq - pp$, weil beyderseits das Quadrat xx einerley wird. Dieses sind nun eben diejenige Formeln, die wir schon oben aus gantz anderen Gründen gefunden haben, wodurch die Richtigkeit der hier gebrauchten Methode bestätiget wird.

Dann nach der vorigen Methode, wann $xx + cyy$ ein Quadrat seyn soll, so setzt man die Wurzel $= x + \frac{py}{q}$, und da bekommt man

$$xx + cyy = xx + \frac{2pxy}{q} + \frac{ppyy}{qq},$$

wo sich die xx aufheben, die übrigen Glieder aber durch y dividirt und mit qq multiplicirt geben $cqqy = 2pqx + ppy$, oder $cqqy - ppy = 2pqx$; man theile nun durch $2pq$ und durch y, so wird $\frac{x}{y} = \frac{cqq - pp}{2pq}$. Da aber x und y untheilbahr seyn sollen, wie auch p und q dergleichen sind, so muß x dem Zehler und y dem Nenner gleich seyn, folglich $x = cqq - pp$ und $y = 2pq$, wie vorher.

184.

Diese Auflösung gilt, die Zahl c mag positiv oder negativ seyn; hat dieselbe aber selbsten Factores, als wann die vorgegebene Formel wäre $xx + acyy$ welche ein Quadrat seyn soll, so findet nicht nur die vorige Auflösung statt, welche gibt $x = acqq - pp$ und $y = 2pq$, sondern auch noch diese $x = cqq - app$ und $y = 2pq$; dann da wird ebenfals

$$xx + acyy = ccq^4 + 2acppqq + aap^4 = (cqq + app)^2,$$

welches auch geschieht, wann man nimmt $x = app - cqq$, weil das Quadrat xx in beyden Fällen einerley herauskommt.

Diese neue Auflösung wird auch durch die hier gebrauchte Methode also gefunden. Man setze

$$x + y\sqrt{-ac} = (p\sqrt{a} + q\sqrt{-c})^2, \quad \text{und} \quad x - y\sqrt{-ac} = (p\sqrt{a} - q\sqrt{-c})^2,$$

damit herauskomme $xx + acyy = (app + cqq)^2$, und also gleich einem Quadrat; alsdann aber wird

$$x + y\sqrt{-ac} = app + 2pq\sqrt{-ac} - cqq$$

und

$$x - y\sqrt{-ac} = app - 2pq\sqrt{-ac} - cqq,$$

woraus folgt

$$x = app - cqq \quad \text{und} \quad y = 2pq.$$

Läßt sich also die Zahl ac auf mehrerley Arten in zwey Factoren zertheilen so kann man auch mehrere Auflösungen angeben.

185.

Wir wollen dieses durch einige bestimmte Formeln erläutern, und erstlich diese Formel $xx + yy$ betrachten, welche ein Quadrat werden soll. Da nun hier $ac = 1$, so nehme man $x = pp - qq$ und $y = 2pq$, so wird

$$xx + yy = (pp + qq)^2.$$

Soll zweytens diese Formel $xx - yy$ ein Quadrat werden, so ist $ac = -1$; man nehme also $x = pp + qq$ und $y = 2pq$, da dann $xx - yy = (pp - qq)^2$ wird.

Soll drittens diese Formel $xx + 2yy$ ein Quadrat werden, wo $ac = 2$, so nehme man $x = pp - 2qq$, oder $x = 2pp - qq$ und $y = 2pq$, und dann wird

$$xx + 2yy = (pp + 2qq)^2, \quad \text{oder} \quad xx + 2yy = (2pp + qq)^2.$$

Soll viertens diese Formel $xx - 2yy$ ein Quadrat werden wo $ac = -2$, so nehme man $x = pp + 2qq$ und $y = 2pq$, da dann kommt

$$xx - 2yy = (pp - 2qq)^2.$$

Soll fünftens diese Formel $xx + 6yy$ ein Quadrat werden wo $ac = 6$, und also entweder $a = 1$ und $c = 6$, oder $a = 2$ und $c = 3$; so kann man erstlich setzen $x = pp - 6qq$ und $y = 2pq$, da dann

$$xx + 6yy = (pp + 6qq)^2.$$

Hernach kann man auch setzen $x = 2pp - 3qq$ und $y = 2pq$, da dann

$$xx + 6yy = (2pp + 3qq)^2.$$

186.

Sollte aber diese Formel $axx + cyy$ zu einem Quadrat gemacht werden, so ist schon erinnert worden, daß dieses nicht geschehen könne wofern nicht schon ein Fall bekant ist, in welchem diese Formel würcklich ein Quadrat werde. Dieser bekante Fall sey demnach, wann $x = f$ und $y = g$, also daß $aff + cgg = hh$; und alsdann kann unsere Formel in einer andern von dieser Art $tt + acuu$ verwandelt werden, wann man setzt

$$t = \frac{afx + cgy}{h} \quad \text{und} \quad u = \frac{gx - fy}{h};$$

dann da wird $tt = \frac{aaffxx + 2acfgxy + ccggyy}{hh}$ und $uu = \frac{ggxx - 2fgxy + ffyy}{hh}$, woraus folgt

$$tt+acuu=\frac{aaffxx+ccggyy+acggxx+acffyy}{hh}=\frac{axx(aff+cgg)+cyy(aff+cgg)}{hh};$$

da nun $aff+cgg=hh$, so wird $tt+acuu=axx+cyy$; und solchergestalt bekommt die vorgelegte Formel $axx+cyy$ diese Form $tt+acuu$, welche nach den hier gegebenen Regeln leicht zu einem Quadrat gemacht werden kann.

187.

Nun wollen wir weiter fortgehen und zusehen wie diese Formel $axx+cyy$, wo x und y unter sich untheilbahr seyn sollen, zu einem Cubo gemacht werden könne; wozu die vorigen Regeln keineswegs hinlänglich sind, die hier angebrachte Methode aber mit dem besten Fortgang angewandt werden kann: wobey noch dieses insonderheit zu mercken, daß diese Formel allezeit zu einem Cubo gemacht werden könne, die Zahlen a und c mögen beschaffen seyn wie sie wollen, welches bey den Quadraten nicht angieng, wofern nicht schon ein Fall bekannt war; welches auch von allen andern geraden Potestäten gilt; bey den ungeraden aber, als der dritten, fünften, siebenten etc. Potestät, ist die Auflösung immer möglich.

188.

Wann demnach diese Formel $axx+cyy$ zu einem Cubo gemacht werden soll, so setze man auf eine ähnliche Weise als vorher

$$x\sqrt{a}+y\sqrt{-c}=(p\sqrt{a}+q\sqrt{-c})^3 \quad \text{und} \quad x\sqrt{a}-y\sqrt{-c}=(p\sqrt{a}-q\sqrt{-c})^3,$$

dann daraus wird das Product $axx+cyy=(app+cqq)^3$, und also unsere Formel ein Cubus: es kommt aber nur darauf an, ob auch hier x und y auf eine rationale Art bestimmt werden könne? welches glücklicher weise gelingt; dann wann die angesetzte Cubi würcklich genommen werden, so erhalten wir diese zwei Gleichungen

$$x\sqrt{a}+y\sqrt{-c}=ap^3\sqrt{a}+3appq\sqrt{-c}-3cpqq\sqrt{a}-cq^3\sqrt{-c},$$

und

$$x\sqrt{a}-y\sqrt{-c}=ap^3\sqrt{a}-3appq\sqrt{-c}-3cpqq\sqrt{a}+cq^3\sqrt{-c},$$

woraus offenbahr folgt, daß

$$x=ap^3-3cpqq \quad \text{und} \quad y=3appq-cq^3.$$

Man suche z. E. zwey Quadrate xx und yy, deren Summ $xx + yy$ einen Cubus ausmache: weil nun hier $a = 1$ und $c = 1$, so bekommen wir

$$x = p^3 - 3pqq \quad \text{und} \quad y = 3ppq - q^3,$$

und alsdann wird $xx + yy = (pp + qq)^3$. Es sey nun $p = 2$ und $q = 1$, so wird $x = 2$ und $y = 11$; hieraus $xx + yy = 125 = 5^3$.

189.

Wir wollen noch diese Formel betrachten $xx + 3yy$, welche zu einem Cubo gemacht werden soll: weil nun hier $a = 1$ und $c = 3$, so wird

$$x = p^3 - 9pqq \quad \text{und} \quad y = 3ppq - 3q^3,$$

und alsdann $xx + 3yy = (pp + 3qq)^3$. Weil diese Formel öfters vorkommt wollen wir davon die leichtere Fälle hieher setzen.[1])

p	q	x	y	$xx + 3yy$
1	1	8	0	$64 = 4^3$
2	1	10	9	$343 = 7^3$
1	2	35	18	$2197 = 13^3$
3	1	0	24	$1728 = 12^3$
1	3	80	72	$21952 = 28^3$
3	2	81	30	$9261 = 21^3$
2	3	154	45	$29791 = 31^3$

190.

Wäre die Bedingung nicht vorgeschrieben, daß die beyden Zahlen x und y unter sich untheilbahr seyn sollen, so hätte die Frage gar keine Schwierigkeit: dann wann $axx + cyy$ ein Cubus seyn soll, so setze man $x = tz$ und $y = uz$, so wird unsere Formel $attzz + cuuzz$ welche dem Cubo $\frac{z^3}{v^3}$ gleich gesetzt werde, woraus so gleich gefunden wird $z = v^3(att + cuu)$; folglich sind die gesuchte Werthe für x und y, $x = tv^3(att + cuu)$ und $y = uv^3(att + cuu)$,

1) In der Tabelle ist davon Gebrauch gemacht, daß x, y auch durch $-x$, $-y$ ersetzt werden können. H. W.

welche außer dem Cubo v^3 noch $att+cuu$ zum gemeinen Theiler haben: diese Auflösung giebt so gleich

$$axx+cyy=v^6(att+cuu)^2(att+cuu)=v^6(att+cuu)^3,$$

welches offenbahr der Cubus ist von $v^2(att+cuu)$.

191.

Die hier gebrauchte Methode ist um so viel merckwürdiger, da wir durch Hülfe irrationaler und so gar imaginärer Formeln solche Auflösungen gefunden haben, wozu einig und allein rationale und so gar gantze Zahlen erfordert wurden. Noch merckwürdiger aber ist es, daß in denjenigen Fällen wo die Irrationalität verschwindet, unsere Methode nicht mehr statt findet: dann wann z. E. $xx+cyy$ ein Cubus seyn soll, so kann man sicher schließen daß auch die beyden irrationalen Factoren davon, nemlich $x+y\sqrt{-c}$ und $x-y\sqrt{-c}$, Cubos seyn müßen; weil dieselben unter sich untheilbahr sind indem die Zahlen x und y keinen gemeinen Theiler haben. Fiele aber die Irrationalität $\sqrt{-c}$ weg, als wann z. E. $c=-1$ wäre, so würde dieser Grund nicht mehr stattfinden, weil alsdann die beyden Factoren nemlich $x+y$ und $x-y$ allerdings gemeine Theiler haben könnten, ohngeacht x und y dergleichen nicht haben, z. E. wann beyde ungerade Zahlen wären.

Wann demnach $xx-yy$ ein Cubus seyn soll, so ist nicht nöthig daß so wohl $x+y$ als $x-y$ für sich ein Cubus sey, sondern man könnte wohl setzen $x+y=2p^3$ und $x-y=4q^3$, da dann $xx-yy$ ohnstreitig ein Cubus würde nemlich $8p^3q^3$, davon die Cubic-Wurzel ist $2pq$; alsdann aber wird $x=p^3+2q^3$, und $y=p^3-2q^3$. Wann aber die Formel $axx+cyy$ sich nicht in zwey rationale Factores zertheilen läßt, so finden auch keine andere Auflösungen statt, als die hier gegeben worden.

192.

Wir wollen diese Abhandlung durch einige merckwürdige Fragen erläutern:

I. Frage: Man verlangt in gantzen Zahlen ein Quadrat xx daß wann darzu 4 addirt wird, ein Cubus herauskomme; dergleichen sind 4 und 121, ob aber mehr dergleichen gegeben werden können, ist hier die Frage?

Da 4 ein Quadrat ist, so suche man erstlich die Fälle da $xx+yy$ ein Cubus wird, welches wie aus dem obigen erhellet geschieht, wann $x=p^3-3pqq$

und $y = 3ppq - q^3$; da nun hier $yy = 4$, so ist $y = \pm 2$, folglich muß seyn $3ppq - q^3 = +2$ oder $3ppq - q^3 = -2$: im erstern Fall wird also $q(3pp - qq) = 2$, folglich q ein Theiler von 2. Es sey demnach erstlich $q = 1$, so wird $3pp - 1 = 2$, folglich $p = 1$ und also $x = 2$ und $xx = 4$.

Setzt man $q = 2$, so wird $6pp - 8 = \pm 2$; gilt das Zeichen $+$, so wird $6pp = 10$ und $pp = \frac{5}{3}$, woraus der Werth von p irrational würde und hier also nicht statt fände; gilt aber das Zeichen $-$, so wird $6pp = 6$ und $p = 1$, folglich $x = 11$. Mehr Fälle giebt es nicht, und also können nur zwey Quadraten gegeben werden, nemlich 4 und 121, welche wann dazu 4 addirt wird Cubi werden.

193.

II. Frage: Man verlangt solche Quadrate in gantzen Zahlen, welche wann dazu 2 addirt wird Cubi werden, wie bey dem Quadrat 25 geschieht: ob es nun noch mehr dergleichen giebt wird hier gefragt?

Da also $xx + 2$ ein Cubus seyn soll, und 2 ein doppeltes Quadrat ist, so suche man erstlich die Fälle, wo die Formel $xx + 2yy$ ein Cubus wird, welches aus dem obigen Articul 188, wo $a = 1$ und $c = 2$, geschieht, wann $x = p^3 - 6pqq$ und $y = 3ppq - 2q^3$; da nun hier $y = \pm 1$ so muß seyn $3ppq - 2q^3 = q(3pp - 2qq) = \pm 1$, und also q ein Theiler von 1; es sey demnach $q = 1$, so wird $3pp - 2 = \pm 1$; gilt das obere Zeichen, so wird $3pp = 3$ und $p = 1$, folglich $x = 5$; das untere Zeichen aber giebt vor p einen irrationalen Werth, welcher hier nicht statt findet; woraus folgt daß nur das einzige Quadrat 25 in gantzen Zahlen die verlangte Eigenschaft habe.

194.

III. Frage: Man verlangt solche fünffache Quadrate, wann dazu 7 addirt wird daß ein Cubus herauskomme: oder daß $5xx + 7$ ein Cubus sey?

Man suche erstlich diejenigen Fälle da $5xx + 7yy$ ein Cubus wird, welches nach dem Articul 188, wo $a = 5$ und $c = 7$, geschieht, wann $x = 5p^3 - 21pqq$ und $y = 15ppq - 7q^3$; weil nun hier seyn soll $y = \pm 1$, so wird

$$15ppq - 7q^3 = q(15pp - 7qq) = \pm 1,$$

da dann q ein Theiler seyn muß von 1, folglich $q = 1$; daher wird $15pp - 7 = \pm 1$, wo beyde Fälle für p etwas irrationales geben, woraus aber doch nicht geschlossen werden kann, daß diese Frage gar nicht möglich sey, weil p und q

solche Brüche seyn könnten, da $y=1$ und x doch eine gantze Zahl würde; solches geschieht würcklich wann $p=\frac{1}{2}$ und $q=\frac{1}{2}$, dann da wird $y=1$ und $x=2$; mit andern Brüchen aber ist die Sache nicht möglich.

195.

IV. Frage: Man suche solche Quadrate in gantzen Zahlen, welche doppelt genommen wann davon 5 subtrahirt wird, daß ein Cubus heraus komme; oder $2xx-5$ soll ein Cubus seyn.

Man suche erstlich diejenigen Fälle da $2xx-5yy$ ein Cubus wird, welches nach dem 188ten Articul, wo $a=2$ und $c=-5$, geschieht, wann $x=2p^3+15pqq$ und $y=6ppq+5q^3$. Hier aber muß seyn $y=\pm 1$, und folglich

$$6ppq+5q^3=q(6pp+5qq)=\pm 1,$$

welches in gantzen Zahlen nicht geschehen kann, und auch nicht einmahl in Brüchen; dahero dieser Fall sehr merckwürdig ist, da gleichwohl eine Auflösung statt findet, wann nemlich $x=4$, dann da wird $2xx-5=27$, welches der Cubus ist von 3; und hievon ist es von der größten Wichtigkeit den Grund zu untersuchen.

196.

Es ist also möglich, daß $2xx-5yy$ ein Cubus seyn könne deßen Wurzel so gar diese Form hat $2pp-5qq$, wann nemlich $x=4$, $y=1$ und $p=2$, $q=1$, und demnach haben wir einen Fall wo $2xx-5yy=(2pp-5qq)^3$, ungeacht die beyden Factoren von $2xx-5yy$ nemlich $x\sqrt{2}+y\sqrt{5}$ und $x\sqrt{2}-y\sqrt{5}$, keine Cubi sind, da dieselben doch nach dieser Methode die Cubi von $p\sqrt{2}+q\sqrt{5}$ und $p\sqrt{2}-q\sqrt{5}$ seyn sollten, indem in unserm Fall $x\sqrt{2}+y\sqrt{5}=4\sqrt{2}+\sqrt{5}$, hingegen $(p\sqrt{2}+q\sqrt{5})^3=(2\sqrt{2}+\sqrt{5})^3=46\sqrt{2}+29\sqrt{5}$, welches keineswegs mit $4\sqrt{2}+\sqrt{5}$ überein kommt.

Es ist aber zu mercken, daß diese Formel $rr-10ss$ in unendlich viel Fällen 1 oder -1 werden kann; wann nemlich $r=3$ und $s=1$, ferner wann $r=19$ und $s=6$, welche mit dieser Formel $2pp-5qq$ multiplicirt wieder eine Zahl von der letztern Form giebt.

Es sey demnach $ff-10gg=1$, und anstatt daß wir oben gesetzt haben $2xx-5yy=(2pp-5qq)^3$, so können wir jetzt auch auf eine allgemeinere Art setzen $2xx-5yy=(ff-10gg)(2pp-5qq)^3$, und die Factores davon genommen geben $x\sqrt{2}\pm y\sqrt{5}=(f\pm g\sqrt{10})(p\sqrt{2}\pm q\sqrt{5})^3$. Es ist aber

$$(p\sqrt{2}\pm q\sqrt{5})^3=(2p^3+15pqq)\sqrt{2}\pm(6ppq+5q^3)\sqrt{5},$$

wofür wir der Kürtze halber schreiben wollen $A\sqrt{2} + B\sqrt{5}$, welches mit $f + g\sqrt{10}$ multiplicirt giebt $Af\sqrt{2} + Bf\sqrt{5} + 2Ag\sqrt{5} + 5Bg\sqrt{2}$, welches dem $x\sqrt{2} + y\sqrt{5}$ gleich seyn muß, woraus entspringet

$$x = Af + 5Bg \quad \text{und} \quad y = Bf + 2Ag;$$

da nun $y = \pm 1$ seyn muß, so ist nicht unumgänglich nöthig daß $6ppq + 5q^3 = 1$ werde, sondern es ist genung wann nur die Formel $Bf + 2Ag$, das ist

$$f(6ppq + 5q^3) + 2g(2p^3 + 15pqq)$$

dem ± 1 gleich werde, wo f und g vielerley Werthe haben können. Es sey z. E. $f = 3$ und $g = 1$, so muß diese Formel $18ppq + 15q^3 + 4p^3 + 30pqq$ dem ± 1 gleich werden, oder es muß seyn $4p^3 + 18ppq + 30pqq + 15q^3 = \pm 1$.

197.

Diese Schwierigkeit alle dergleichen mögliche Fälle heraus zu bringen findet sich aber nur alsdann, wann in der Formel $axx + cyy$ die Zahl c negativ ist, weil alsdann diese Formel $axx + cyy$ oder diese $xx + acyy$, so mit ihr in einer genauen Verwandtschaft stehet, 1 werden kann, welches aber niemals geschehen kann wann c eine positive Zahl ist, weil $axx + cyy$ oder $xx + acyy$ immer größere Zahlen giebt, je größer x und y genommen werden. Dahero die hier vorgetragene Methode nur in solchen Fällen mit Vortheil gebraucht werden kann, wann die beyden Zahlen a und c positiv genommen werden.

198.

Wir kommen also zur vierten Potestät und bemercken zuförderst, daß wann die Formel $axx + cyy$ ein Biquadrat werden soll, die Zahl $a = 1$ seyn müße; dann wann dieselbe kein Quadrat wäre, so wäre es entweder nicht möglich diese Formel nur zu einem Quadrat zu machen, oder wann es möglich wäre so könnte dieselbe auch in dieser Form $tt + acuu$ verwandelt werden, dahero wir die Frage nur auf diese letztere Form, mit welcher die obige $xx + cyy$ wann $a = 1$ übereinstimmt, einschräncken. Nun kommt es also darauf an, wie die Werthe von x und y beschaffen seyn müßen, daß diese Formel $xx + cyy$ ein Biquadrat werde. Da nun dieselbe aus diesen zwey Factoren besteht $(x + y\sqrt{-c})(x - y\sqrt{-c})$, so muß ein jeder auch ein Biquadrat von gleicher Art seyn, dahero gesetzt werden muß

$$x + y\sqrt{-c} = (p + q\sqrt{-c})^4 \quad \text{und} \quad x - y\sqrt{-c} = (p - q\sqrt{-c})^4,$$

woraus unsere Formel diesem Biquadrat $(pp+cqq)^4$ gleich wird, die Buchstaben x und y selbst aber werden aus der Entwickelung dieser Formel leicht bestimmt, wie folget:

$$x+y\sqrt{-c}=p^4+4p^3q\sqrt{-c}-6cppqq-4cpq^3\sqrt{-c}+ccq^4$$

$$x-y\sqrt{-c}=p^4-4p^3q\sqrt{-c}-6cppqq+4cpq^3\sqrt{-c}+ccq^4$$

folglich

$$x=p^4-6cppqq+ccq^4 \quad \text{und} \quad y=4p^3q-4cpq^3.$$

199.

Wann also $xx+yy$ ein Biquadrat werden soll, weil hier $c=1$, so haben wir diese Werthe $x=p^4-6ppqq+q^4$ und $y=4p^3q-4pq^3$ und alsdann wird seyn $xx+yy=(pp+qq)^4$.

Laßt uns z. E. setzen $p=2$ und $q=1$, so bekommen wir $x=7$ und $y=24$; hieraus wird $xx+yy=625=5^4$.

Nimmt man ferner $p=3$ und $q=2$, so bekommt man $x=119$ und $y=120$, daraus wird $xx+yy=13^4$.

200.

Bey allen geraden Potestäten wozu die Formel $axx+cyy$ gemacht werden soll, ist ebenfalls unumgänglich nöthig, daß diese Formel zu einem Quadrat gemacht werden könne, zu welchem Ende genug ist daß man nur einen einzigen Fall wiße, wo dieses geschieht; und alsdann kann diese Formel wie wir oben gesehen haben, in dieser Gestalt verwandelt werden $tt+acuu$, wo das erste Glied nur mit 1 multiplicirt ist, und also als in dieser Form $xx+cyy$ enthalten angesehen werden kann, welche hierauf auf eine ähnliche Weise, so wohl zur sechsten Potestät als einer jeglichen andern noch höhern geraden Potestät gemacht werden kann.

201.

Bey den ungeraden Potestäten aber ist diese Bedingung nicht nothwendig, sondern die Zahlen a und c mögen beschaffen seyn wie sie wollen, so kann die Formel $axx+cyy$ allezeit zu einer jeglichen ungeraden Potestät gemacht werden. Dann verlangt man z. E. die fünfte Potestät, so darf man nur setzen $x\sqrt{a}+y\sqrt{-c}=(p\sqrt{a}+q\sqrt{-c})^5$, und $x\sqrt{a}-y\sqrt{-c}=(p\sqrt{a}-q\sqrt{-c})^5$, da dann offenbahr wird $axx + cyy = (app + cqq)^5$. Weil nun die fünfte Potestät von $p\sqrt{a} + q\sqrt{-c}$ ist

$$aap^5\sqrt{a} + 5aap^4q\sqrt{-c} - 10acp^3qq\sqrt{a} - 10acppq^3\sqrt{-c} + 5ccpq^4\sqrt{a} + ccq^5\sqrt{-c},$$

woraus sogleich geschlossen wird

$$x = aap^5 - 10acp^3qq + 5ccpq^4 \quad \text{und} \quad y = 5aap^4q - 10acppq^3 + ccq^5.$$

Verlangt man allso eine Summ von zwey Quadraten $xx + yy$, die zugleich eine fünfte Potestät sey, so ist $a = 1$ und $c = 1$; folglich

$$x = p^5 - 10p^3qq + 5pq^4 \quad \text{und} \quad y = 5p^4q - 10ppq^3 + q^5.$$

Nimmt man nun $p = 2$ und $q = 1$, so wird $x = 38$ und $y = 41$, und

$$xx + yy = 3125 = 5^5.$$

CAPITEL 13

VON EINIGEN FORMELN DIESER ART $ax^4 + by^4$ WELCHE SICH NICHT ZU EINEM QUADRAT MACHEN LASSEN

202.

Man hat sich alle Mühe gegeben zwey Biquadrate zu finden, deren Summ oder Differenz eine Quadrat-Zahl würde; allein alle Mühe war vergebens, und endlich fand man so gar einen Beweis, daß weder diese Formel $x^4 + y^4$ noch diese $x^4 - y^4$ jemals ein Quadrat werden könne, nur zwey Fälle ausgenommen, wo nemlich bey der erstern entweder $x = 0$ oder $y = 0$, bey der andern aber wo entweder $y = 0$ oder $y = x$, und in welchen Fällen die Sache offenbahr vor Augen liegt. Daß aber in allen übrigen die Sache unmöglich seyn soll, ist um so viel mehr merckwürdig, weil wann nur von schlechten Quadraten die Rede ist, unendlich viel Auflösungen statt finden.

203.

Um diesen Beweis gehörig vorzutragen, ist vor allen Dingen zu bemercken, daß die beyden Zahlen x und y als untheilbahr unter sich angesehen werden können; dann sollten dieselben einen gemeinen Theiler z. E. d haben,