Alle achteckigte Zahlen sind demnach also beschaffen, daß wann man sie mit 3 multiplicirt und dazu 1 addirt die Summe immer eine Quadrat-Zahl werde.

Es sey z. E. 3816 eine achteckigte Zahl, so wird die Wurzel davon seyn $x = \frac{1+\sqrt{11449}}{3} = \frac{1+107}{3} = 36$.

106.

Es sey endlich a eine gegebene $n$eckigte Zahl, wovon die Wurzel x gesucht werden soll, so hat man diese Gleichung $\frac{(n-2)xx-(n-4)x}{2} = a$, oder $(n-2)xx-(n-4)x = 2a$, allso $xx = \frac{(n-4)x}{n-2} + \frac{2a}{n-2}$, woraus gefunden wird $x = \frac{n-4}{2(n-2)} + \sqrt{\left(\frac{(n-4)^2}{4(n-2)^2} + \frac{2a}{n-2}\right)}$ oder $x = \frac{n-4}{2(n-2)} + \sqrt{\left(\frac{(n-4)^2}{4(n-2)^2} + \frac{8(n-2)a}{4(n-2)^2}\right)}$ und folglich

$$x = \frac{n-4+\sqrt{(8(n-2)a+(n-4)^2)}}{2(n-2)}.$$

Welche Formel eine allgemeine Regel enthält um aus gegebenen Zahlen alle mögliche vieleckigte Wurzeln zu finden.

Um dieses mit einem Exempel zu erläutern, so sey gegeben diese 24eckigte Zahl 3009; weil nun hier $a = 3009$ und $n = 24$, folglich $n-2 = 22$ und $n-4 = 20$ so bekommen wir die Wurzel

$$x = \frac{20+\sqrt{(529584+400)}}{44} = \frac{20+728}{44} = 17.$$

CAPITEL 8

VON DER AUSZIEHUNG DER QUADRAT-WURZELN AUS BINOMIEN

107.

Ein Binomium wird in der Algebra genennt eine aus zwey Theilen bestehende Zahl, wovon eine oder auch beyde das Quadratische Wurzel-Zeichen enthalten.

Also ist $3+\sqrt{5}$ ein Binomium, imgleichen $\sqrt{8}+\sqrt{3}$, und es ist gleich viel ob diese beyden Theile mit dem Zeichen $+$ oder $-$ verbunden sind. Dahero wird $3-\sqrt{5}$ eben so wohl ein Binomium genennt als $3+\sqrt{5}$.

108.

Diese Binomien sind deswegen hauptsächlich merckwürdig, weil man bey Auflösung der Quadratischen Gleichungen jedesmahl auf solche Formeln kommt, so offt die Auflösung nicht geschehen kann.

Also wann z. E. diese Gleichung vorkommt $xx = 6x - 4$, so wird dann $x = 3 + \sqrt{5}$. Um dieser Ursache willen kommen nun solche Formeln in den Algebraischen Rechnungen sehr häuffig vor, und wir haben auch schon oben gezeiget, wie damit die gewöhnliche Operationen der Addition, Subtraction, Multiplication und Division angestellt werden sollen. Nun aber sind wir erst im Stande zu zeigen, wie aus solchen Formeln auch die Quadrat-Wurzeln ausgezogen werden können, wofern nemlich eine solche Ausziehung statt findet, indem wiedrigenfals nur noch ein Wurzelzeichen vorgesetzt wird, nemlich von $3 + \sqrt{2}$ ist die Quadrat-Wurzel $\sqrt{(3 + \sqrt{2})}$.

109.

Man hat demnach zuförderst zu bemercken, daß die Quadrate von solchen Binomien wiederum dergleichen Binomien werden, in welchen so gar der eine Theil rational ist.

Dann sucht man das Quadrat von $a + \sqrt{b}$, so wird dasselbe $(aa + b) + 2a\sqrt{b}$. Wann also von dieser Formel $(aa + b) + 2a\sqrt{b}$ hinwiederum die Quadrat-Wurzel verlangt würde, so wäre dieselbe $a + \sqrt{b}$, welche ohnstreitig deutlicher zu begreiffen ist, als wann man vor jene Formel noch das $\sqrt{}$ Zeichen setzen wollte. Eben so, wann man von dieser Formel $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ das Quadrat nimmt, so wird dasselbe $(a + b) + 2\sqrt{ab}$, dahero auch umgekehrt von dieser Formel $(a + b) + 2\sqrt{ab}$ die Quadrat-Wurzel seyn wird $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ welche wiederum verständlicher ist, als wann man vor jene noch das $\sqrt{}$ Zeichen setzen wollte.

110.

Es kommt dahero darauf an, wie ein Kennzeichen zu erfinden sey, woraus in einem jeglichen Fall beurtheilet werden kann, ob eine solche Quadrat-Wurzel statt finde oder nicht. Wir wollen zu diesem Ende mit einer leichten Formel den Anfang machen und sehen, ob man aus diesem Binomio $5 + 2\sqrt{6}$ solcher Gestalt die Quadrat-Wurzel finden könne.

Man setze also diese Wurzel sey $\sqrt{x} + \sqrt{y}$, wovon das Quadrat $(x + y) + 2\sqrt{xy}$ ist, allso muß dieses Quadrat jener Formel $5 + 2\sqrt{6}$ gleich seyn; folglich der rationale Theil $x+y$ muß gleich seyn 5 und der irrationale $2\sqrt{xy}$ muß gleich seyn $2\sqrt{6}$; dahero bekommt man $\sqrt{xy}=\sqrt{6}$ und die Quadrate genommen $xy=6$. Da nun $x+y=5$, so wird hieraus $y=5-x$ welcher Werth in der Gleichung $xy=6$ gesetzt giebt $5x-xx=6$ oder $xx=5x-6$, dahero $x=\frac{5}{2}+\sqrt{\left(\frac{25}{4}-\frac{24}{4}\right)}=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}=3$; also $x=3$ und $y=2$, folglich wird aus $5+2\sqrt{6}$ die Quadrat-Wurzel seyn $\sqrt{3}+\sqrt{2}$.

111.

Da wir hier diese beyde Gleichungen erhalten haben

$$\text{I.)}\ x+y=5 \quad \text{und} \quad \text{II.)}\ xy=6,$$

so wollen wir hier einen besondern Weg anzeigen, um daraus x und y zu finden, welcher darinn besteht:

Da $x+y=5$ so nehme man die Quadraten $xx+2xy+yy=25$. Nun bemercke man, daß $xx-2xy+yy$ das Quadrat von $x-y$ ist; man subtrahire dahero von jener Gleichung nemlich von $xx+2xy+yy=25$, diese $xy=6$ vier mal genommen oder $4xy=24$, so erhält man $xx-2xy+yy=1$ und hieraus die Quadrat-Wurzel $x-y=1$, so wird, weil $x+y=5$ ist, gefunden $x=3$ und $y=2$. Dahero die gesuchte Quadrat-Wurzel von $5+2\sqrt{6}$ seyn wird $\sqrt{3}+\sqrt{2}$.

112.

Laßt uns dieses allgemeine Binomium $a+\sqrt{b}$ betrachten und die Quadrat-Wurzel davon $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ setzen, so erhalten wir diese Gleichung

$$(x+y)+2\sqrt{xy}=a+\sqrt{b}, \quad \text{also} \quad x+y=a \quad \text{und} \quad 2\sqrt{xy}=\sqrt{b} \quad \text{oder} \quad 4xy=b$$

von jener ist das Quadrat $xx+2xy+yy=aa$ wovon diese $4xy=b$ subtrahirt, giebt $xx-2xy+yy=aa-b$, und wovon die Quadrat-Wurzel ist $x-y=\sqrt{(aa-b)}$. Da nun $x+y=a$, so finden wir

$$x=\frac{a+\sqrt{(aa-b)}}{2} \quad \text{und} \quad y=\frac{a-\sqrt{(aa-b)}}{2}$$

dahero die verlangte Quadrat-Wurzel aus $a+\sqrt{b}$ seyn wird:

$$\sqrt{\frac{a+\sqrt{(aa-b)}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{(aa-b)}}{2}}.$$

113.

Diese Formel ist allerdings verwirrter, als wann man vor das gegebene Binomium $a + \sqrt{b}$ schlecht weg das Wurzel-Zeichen $\sqrt{\ }$ gesetzt hätte, nemlich $\sqrt{(a + \sqrt{b})}$. Allein jene Formel kann weit leichter werden, wann die Zahlen a und b so beschaffen sind, daß $aa - b$ ein Quadrat wird, weil alsdann das $\sqrt{\ }$ hinter dem $\sqrt{\ }$ wegfällt. Hieraus erkennt man, daß man nur in solchen Fällen aus dem Binomio $a + \sqrt{b}$ die Quadrat-Wurzel bequem ausziehen könne, wann $aa - b = cc$, dann alsdenn wird die gesuchte Quadrat-Wurzel seyn

$$\sqrt{\frac{a+c}{2}} + \sqrt{\frac{a-c}{2}};$$

wann aber $aa - b$ keine Quadrat-Zahl ist, so läßt sich die Quadrat-Wurzel nicht füglicher anzeigen, als durch Vorsetzung des $\sqrt{\ }$ Zeichens.

114.

Dahero erhalten wir diese Regel um aus einem Binomio $a + \sqrt{b}$ die Quadrat-Wurzel auf eine bequemere Art auszudrücken. Hierzu wird nemlich erfodert daß $aa - b$ eine Quadrat-Zahl sey; ist nun dieselbe $= cc$, so wird die verlangte Quadrat-Wurzel seyn $\sqrt{\frac{a+c}{2}} + \sqrt{\frac{a-c}{2}}$; wobey noch anzumercken, daß von $a - \sqrt{b}$ die Quadrat-Wurzel seyn werde $\sqrt{\frac{a+c}{2}} - \sqrt{\frac{a-c}{2}}$. Dann nimmt man von dieser Formel das Quadrat, so wird solches $a - 2\sqrt{\frac{aa-cc}{4}}$; da nun $cc = aa - b$, so ist $aa - cc = b$; dahero dieses Quadrat

$$= a - 2\sqrt{\frac{b}{4}} = a - \frac{2\sqrt{b}}{2} = a - \sqrt{b}.$$

115.

Wann also aus einem solchen Binomio $a \pm \sqrt{b}$ die Quadrat-Wurzel gezogen werden soll, so subtrahirt man von dem Quadrat des rationalen Theils aa das Quadrat des irrationalen Theils b; aus dem Rest ziehe man die Quadrat-Wurzel, welche $= c$ sey, so ist die verlangte Quadrat-Wurzel

$$\sqrt{\frac{a+c}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-c}{2}}.$$

116.

Man suche die Quadrat-Wurzel aus $2 + \sqrt{3}$ so ist $a = 2$ und $b = 3$; dahero $aa - b = cc = 1$ und allso $c = 1$: dahero die verlangte Quadrat-Wurzel ist

$$\sqrt{\tfrac{3}{2}} + \sqrt{\tfrac{1}{2}}.$$

Es sey ferner dieses Binomium gegeben $11 + 6\sqrt{2}$, woraus die Quadrat-Wurzel gefunden werden soll. Hier ist nun $a = 11$ und $\sqrt{b} = 6\sqrt{2}$; dahero $b = 36 \cdot 2 = 72$ und $aa - b = 49$ folglich $c = 7$. Dahero die Quadrat-Wurzel aus $11 + 6\sqrt{2}$ seyn wird $\sqrt{9} + \sqrt{2} = 3 + \sqrt{2}$.

Man suche die Quadrat-Wurzel aus $11 - 2\sqrt{30}$. Hier ist $a = 11$ und $\sqrt{b} = 2\sqrt{30}$, dahero $b = 4 \cdot 30 = 120$ und $aa - b = 1$ und $c = 1$: folglich die gesuchte Quadrat-Wurzel $\sqrt{6} - \sqrt{5}$.

117.

Diese Regel findet auch statt, wann so gar imaginäre, oder unmögliche Zahlen, vorkommen.

Wann also gegeben ist dieses Binomium $1 + 4\sqrt{-3}$, so ist $a = 1$ und $\sqrt{b} = 4\sqrt{-3}$; dahero $b = -48$ und $aa - b = 49$. Dahero $c = 7$ folglich die gesuchte Quadrat-Wurzel $\sqrt{4} + \sqrt{-3} = 2 + \sqrt{-3}$.

Es sey ferner gegeben $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}$. Hier ist $a = -\frac{1}{2}$, $\sqrt{b} = \frac{1}{2}\sqrt{-3}$ und $b = \frac{1}{4} \cdot -3 = -\frac{3}{4}$ dahero $aa - b = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$ und $c = 1$: folglich die gesuchte Quadrat-Wurzel

$$\sqrt{\tfrac{1}{4}} + \sqrt{-\tfrac{3}{4}} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{-3}}{2} \quad \text{oder} \quad \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{-3}.$$

Noch ist merckwürdig dieses Exempel, wo aus $2\sqrt{-1}$ die Quadrat-Wurzel gesucht werden soll.

Weil hier kein rationaler Theil ist, so ist $a = 0$ und $\sqrt{b} = 2\sqrt{-1}$ dahero $b = -4$ und $aa - b = 4$, also $c = 2$, woraus die gesuchte Quadrat-Wurzel ist $\sqrt{1} + \sqrt{-1} = 1 + \sqrt{-1}$ wovon das Quadrat ist $1 + 2\sqrt{-1} - 1 = 2\sqrt{-1}$.

118.

Sollte auch eine solche Gleichung aufzulösen vorfallen wie $xx = a \pm \sqrt{b}$ und es wäre $aa - b = cc$, so würde man daraus diesen Werth für x erhalten $x = \sqrt{\frac{a+c}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-c}{2}}$ welches in vielen Fällen Nutzen haben kann.

Es sey z. E. $xx = 17 + 12\sqrt{2}$, so wird $x = 3 + \sqrt{8} = 3 + 2\sqrt{2}$.

119.

Dieses findet insonderheit statt bey Auflösung einiger Gleichungen vom vierten Grad, als $x^4 = 2axx + d$. Dann setzt man hier $xx = y$ so wird $x^4 = yy$, dahero unsere Gleichung $yy = 2ay + d$, woraus gefunden wird $y = a \pm \sqrt{(aa + d)}$: dahero für die erste Gleichung seyn wird $xx = a \pm \sqrt{(aa + d)}$, woraus folglich noch die Quadrat-Wurzel gezogen werden muß. Da nun hier

$$\sqrt{b} = \sqrt{(aa + d)} \quad \text{also} \quad b = aa + d, \quad \text{so wird} \quad aa - b = -d.$$

Wäre nun $-d$ ein Quadrat nemlich cc oder $d = -cc$, so kann die Wurzel angezeigt werden; es sey demnach $d = -cc$, oder es sey diese Gleichung vom vierten Grad vorgegeben $x^4 = 2axx - cc$, so wird daraus der Werth von x also ausgedrückt

$$x = \sqrt{\frac{a + c}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - c}{2}}.$$

120.

Wir wollen dieses durch einige Exempel erläutern;

I. Erstlich suche man zwey Zahlen deren Product sey 105, und wann man ihre Quadraten zusammen addirt, so sey die Summe $= 274$?

Man setze diese Zahlen seyen x und y, so hat man sogleich diese zwey Gleichungen

$$\text{I.)}\ xy = 105 \quad \text{und} \quad \text{II.)}\ xx + yy = 274.$$

Aus der ersten findet man $y = \frac{105}{x}$ welcher Werth in der andern vor y gesetzt, giebt $xx + \frac{105^2}{xx} = 274$.

Mit xx multiplicirt wird $x^4 + 105^2 = 274xx$, oder $x^4 = 274xx - 105^2$.

Vergleicht man nun diese Gleichung mit der obigen, so wird $2a = 274$ und $-cc = -105^2$; dahero $c = 105$ und $a = 137$. Also finden wir:

$$x = \sqrt{\frac{137 + 105}{2}} \pm \sqrt{\frac{137 - 105}{2}} = 11 \pm 4:$$

folglich entweder $x = 15$, oder $x = 7$. Im erstern Fall wird $y = 7$, im letzteren aber $y = 15$. Dahero die beyden gesuchten Zahlen sind 15 und 7.

121.

Es ist hier aber gut zu bemercken, daß die Rechnung weit leichter gemacht werden kann. Dann da $xx + 2xy + yy$, und auch $xx - 2xy + yy$ ein

Quadrat ist, wir aber wißen was so wohl $xx+yy$ als xy ist, so dürfen wir nur das letztere doppelt genommen, so wohl zu dem ersten addiren, als auch davon subtrahiren, wie hier zu sehen: $xx+yy=274$. Erstlich $2xy=210$ addirt giebt $xx+2xy+yy=484$ und $x+y=22$; darnach $2xy$ subtrahirt giebt $xx-2xy+yy=64$ und $x-y=8$.

Allso $2x=30$ und $2y=14$, woraus erhellet daß $x=15$ und $y=7$.

Auf diese Art kann auch diese allgemeine Frage aufgelößt werden:

II. Man suche zwey Zahlen, davon das Product $=m$, und die Summ ihrer Quadraten $=n$?

Die gesuchten Zahlen seyen x und y, so hat man die beyden folgenden Gleichungen

$$\text{I.)}\quad xy=m, \qquad \text{II.)}\quad xx+yy=n.$$

Nun aber ist $2xy=2m$, woraus erstlich $2xy$ addirt wird $xx+2xy+yy=n+2m$ und $x+y=\sqrt{(n+2m)}$ hierauf $2xy$ subtrahirt giebt $xx-2xy+yy=n-2m$ und $x-y=\sqrt{(n-2m)}$ also

$$x=\tfrac{1}{2}\sqrt{(n+2m)}+\tfrac{1}{2}\sqrt{(n-2m)} \quad \text{und} \quad y=\tfrac{1}{2}\sqrt{(n+2m)}-\tfrac{1}{2}\sqrt{(n-2m)}.$$

122.

III. Es sey ferner diese Frage vorgelegt: man suche zwey Zahlen, deren Product $=35$ und die Differenz ihrer Quadraten $=24$?

Es sey x die größere, und y die kleinere, so hat man diese beyde Gleichungen $xy=35$ und $xx-yy=24$; da nun hier die vorigen Vortheile nicht statt finden, so verfahre man nach der gewöhnlichen Weise, und da giebt die erste $y=\frac{35}{x}$, welcher Werth in der andern für y gesetzt, giebt $xx-\frac{1225}{xx}=24$, mit xx multiplicirt, so hat man $x^4-1225=24xx$ und $x^4=24xx+1225$. Weil hier das letzte Glied das Zeichen *plus* hat, so kann die obige Gleichung nicht angewandt werden, weil nehmlich $cc=-1225$, und also c imaginär würde.

Man setze dahero $xx=z$, so hat man $zz=24z+1225$ woraus gefunden wird $z=12\pm\sqrt{(144+1225)}$ oder $z=12\pm 37$ dahero $xx=12\pm 37$, das ist entweder $xx=49$ oder $xx=-25$.

Nach dem ersten Werth wird $x=7$ und $y=5$.

Nach dem andern aber wird

$$x=\sqrt{-25} \quad \text{und} \quad y=\frac{35}{\sqrt{-25}}, \quad \text{oder} \quad y=\sqrt{\frac{1225}{-25}}, \quad \text{oder} \quad y=\sqrt{-49}.$$

123.

Zum Beschluß dieses Capitels wollen wir noch diese Frage beyfügen:

IV. Man suche zwey Zahlen, deren Summe, Product, und die Differenz ihrer Quadraten einander gleich seyen?

Die größere Zahl sey x, die kleinere y, so müßen diese drey Formeln einander gleich seyn: I.) Summe $x+y$, II.) Product xy, III.) Differenz der Quadraten $xx-yy$. Vergleicht man die erste mit der zweyten, so hat man $x+y=xy$ und daraus suche man x. Man wird allso haben $y=xy-x$ oder $y=x(y-1)$ und daraus wird $x=\frac{y}{y-1}$; dahero wird $x+y=\frac{yy}{y-1}$ und $xy=\frac{yy}{y-1}$ und also ist die Summe dem Product schon gleich. Diesem muß aber noch die Differenz der Quadraten gleich seyn: es wird aber

$$xx-yy=\frac{yy}{yy-2y+1}-yy=\frac{-y^4+2y^3}{yy-2y+1}$$

welches dem obigen Werth $\frac{yy}{y-1}$ gleich seyn muß; dahero bekommt man $\frac{yy}{y-1}=\frac{-y^4+2y^3}{(y-1)^2}$; durch yy dividirt wird $\frac{1}{y-1}=\frac{-yy+2y}{(y-1)^2}$; ferner mit $y-1$ multiplicirt wird $1=\frac{-yy+2y}{y-1}$ nochmahls mit $y-1$ multiplicirt giebt

$$y-1=-yy+2y, \quad \text{folglich} \quad yy=y+1.$$

Hieraus findet man

$$y=\tfrac{1}{2}\pm\sqrt{\left(\tfrac{1}{4}+1\right)}=\tfrac{1}{2}\pm\sqrt{\tfrac{5}{4}} \quad \text{oder} \quad y=\frac{1+\sqrt{5}}{2};$$

und dahero erhalten wir $x=\frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}$. Um hier die Irrationalität aus dem Nenner wegzubringen, so multiplicirt man oben und unten mit $\sqrt{5}+1$, so bekommt man $x=\frac{6+2\sqrt{5}}{4}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Antwort: Also ist die größere der gesuchten Zahlen $x=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$, und die kleinere $y=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Ihre Summe ist also $x+y=2+\sqrt{5}$, ferner das Product $xy=2+\sqrt{5}$, und da $xx=\frac{7+3\sqrt{5}}{2}$ und $yy=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ so wird die Differenz der Quadraten $xx-yy=2+\sqrt{5}$.

124.

Weil diese Auflösung ziemlich mühsam war, so kann dieselbe leichter gefunden werden; man setze erstlich die Summe $x+y$ der Differenz der

Quadraten $xx - yy$ gleich, so hat man $x + y = xx - yy$. Hier kann man durch $x + y$ dividiren weil $xx - yy = (x + y)(x - y)$, und da erhält man $1 = x - y$ woraus $x = y + 1$; dahero $x + y = 2y + 1$ und $xx - yy = 2y + 1$; und diesem muß noch gleich seyn das Product $xy = yy + y$. Man hat also $yy + y = 2y + 1$, oder $yy = y + 1$, woraus wie oben gefunden wird $y = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

125.

V. Dieses leitet uns noch auf folgende Frage: Zwey Zahlen zu finden, deren Summe, Product und die Summe ihrer Quadraten einander gleich seyn?

Die gesuchten Zahlen seyen x und y, so müßen diese drey Formeln einander gleich seyn I.) $x + y$, II.) xy, und III.) $xx + yy$.

Setzt man die erste der zweyten gleich $x + y = xy$, so findet man daraus $x = \frac{y}{y-1}$ und $x + y = \frac{yy}{y-1}$, welchem auch xy gleich ist. Hieraus aber wird $xx + yy = \frac{yy}{yy - 2y + 1} + yy$, welches dem $\frac{yy}{y-1}$ gleich zu setzen: Man multiplicire mit $yy - 2y + 1$ so bekommt man $y^4 - 2y^3 + 2yy = y^3 - yy$ oder $y^4 = 3y^3 - 3yy$, und durch yy dividirt $yy = 3y - 3$; dahero $y = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{9}{4} - 3\right)}$, also $y = \frac{3 + \sqrt{-3}}{2}$ dahero $y - 1 = \frac{1 + \sqrt{-3}}{2}$, folglich $x = \frac{3 + \sqrt{-3}}{1 + \sqrt{-3}}$. Man multiplicire oben und unten mit $1 - \sqrt{-3}$, so wird $x = \frac{6 - 2\sqrt{-3}}{4}$ oder $x = \frac{3 - \sqrt{-3}}{2}$.

Antwort: also sind die beyden gesuchten Zahlen

$$x = \frac{3 - \sqrt{-3}}{2} \quad \text{und} \quad y = \frac{3 + \sqrt{-3}}{2},$$

ihre Summe ist $x + y = 3$, das Product $xy = 3$, und da endlich $xx = \frac{3 - 3\sqrt{-3}}{2}$ und $yy = \frac{3 + 3\sqrt{-3}}{2}$, so wird $xx + yy = 3$.

126.

Diese Rechnung kann durch einen besondern Vortheil nicht wenig erleichtert werden, welches noch in andern Fällen statt findet. Derselbe bestehet darin, daß man die gesuchte Zahlen nicht durch einzelne Buchstaben, sondern durch die Summe und Differenz zweyer andern ausdrückt.

Also bey der vorigen Aufgabe setze man die eine der gesuchten Zahlen gleich $p + q$ und die andere $p - q$, so wird die Summe derselben seyn $2p$, ihr Product $pp - qq$ und die Summe ihrer Quadraten $2pp + 2qq$ welche drey Stück einander gleich seyn müßen. Man setze das erste gleich dem zweyten so wird $2p = pp - qq$ und daraus $qq = pp - 2p$. Diesen Werth setze man im dritten für qq, so wird dasselbe $4pp - 4p$. Welches dem ersten gleich gesetzt giebt $2p = 4pp - 4p$. Man addire $4p$ so wird $6p = 4pp$, durch p dividirt $6 = 4p$ und also $p = \frac{3}{2}$.

Hieraus $qq = -\frac{3}{4}$ und $q = \frac{\sqrt{-3}}{2}$; folglich sind unsere gesuchten Zahlen $p + q = \frac{3+\sqrt{-3}}{2}$ und die andere $p - q = \frac{3-\sqrt{-3}}{2}$ welche wir auch vorher gefunden.

CAPITEL 9

VON DER NATUR DER QUADRATISCHEN GLEICHUNGEN

127.

Aus dem vorhergehenden hat man zur Genüge ersehen, daß die Quadratische Gleichungen auf eine doppelte Art aufgelöst werden können, welche Eigenschaft allerdings verdienet in Erwegung gezogen zu werden, weil dadurch die Natur der höhern Gleichungen nicht wenig erläutert wird. Wir wollen dahero genauer untersuchen, woher es komme, daß eine jede Quadratische Gleichung zweyerley Auflösungen zulaße, weil darinn ohnstreitig eine sehr wesentliche Eigenschaft dieser Gleichungen enthalten ist.

128.

Man hat zwar schon gesehen, daß diese doppelte Auflösung daher rühret, weil die Quadrat-Wurzel aus einer jeglichen Zahl so wohl negativ als positiv gesetzt werden könne: allein dieser Grund würde sich nicht wohl auf höhere Gleichungen anwenden laßen, dahero wird es gut seyn den Grund davon noch auf eine andere Art deutlich vor Augen zu legen. Es ist demnach nöthig zu erklären woher es komme daß eine Quadratische Gleichung als z. E. $xx = 12x - 35$ auf eine doppelte Art aufgelöset werden, oder daß vor x zweyerley Werthe angezeiget werden können, welche beyde der Gleichung ein Genüge leisten, wie in diesem Exempel vor x so wohl 5 als 7 gesetzt werden kann, indem in beyden Fällen xx und $12x - 35$ einander gleich werden.

129.

Um den Grund hievon deutlicher darzulegen, so ist es dienlich alle Glieder der Gleichung auf eine Seite zu bringen, so daß auf der andern 0 zu stehen