CAPITEL 7

VON DER AUSZIEHUNG DER WURZELN AUS DEN VIELECKIGTEN ZAHLEN

94.

Wir haben oben [I, § 425—439] gezeigt, wie die vieleckigten Zahlen gefunden werden sollen; was wir aber daselbst eine Seite genennt haben wird auch eine Wurzel genannt. Wann nun die Wurzel durch x angedeutet wird, so werden daraus die vieleckigten Zahlen folgender Gestalt gefunden.

Das	3 eck	ist	$\frac{xx+x}{2}$
„	4 eck	„	xx
„	5 eck	„	$\frac{3xx-x}{2}$
„	6 eck	„	$2xx-x$
„	7 eck	„	$\frac{5xx-3x}{2}$
„	8 eck	„	$3xx-2x$
„	9 eck	„	$\frac{7xx-5x}{2}$
„	10 eck	„	$4xx-3x$
„	n eck	„	$\frac{(n-2)xx-(n-4)x}{2}$

95.

Durch Hülfe dieser Formeln ist es nun leicht für eine jede gegebene Seite, oder Wurzel, eine verlangte vieleckigte Zahl so groß auch die Zahl der Ecke seyn mag zu finden, wie schon oben genungsam gezeigt worden. Wann aber umgekehrt eine vieleckigte Zahl von einer gewißen Anzahl Seite gegeben ist, so ist es weit schwerer die Wurzel oder Seite davon zu finden, und wird dazu die Auflösung Quadratischer Gleichungen erfordert, dahero diese Sache allhier besonders verdienet abgehandelt zu werden. Wir wollen hiebey der Ordnung nach von den dreyeckigten Zahlen anfangen, und zu den mehreckigten fortschreiten.

96.

Es sey demnach 91 die gegebene dreyeckigte Zahl, wovon die Seite oder Wurzel gesucht werden soll.

Setzt man nun diese Wurzel $= x$ so muß $\frac{xx+x}{2}$ der Zahl 91 gleich seyn: man multiplicire mit 2 so hat man $xx + x = 182$, woraus gefunden wird $xx = -x + 182$ und also

$$x = -\tfrac{1}{2} + \sqrt{\left(\tfrac{1}{4} + 182\right)} = -\tfrac{1}{2} + \sqrt{\tfrac{729}{4}} \text{ folglich } x = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{27}{2} = 13;$$

dahero ist die verlangte Dreyecks-Wurzel $= 13$, dann das Dreyeck von 13 ist 91.

97.

Es sey aber auf eine allgemeine Art a die gegebene dreyeckigte Zahl, wovon die Wurzel gefunden werden soll.

Setzt man dieselbe $= x$ so wird $\frac{xx+x}{2} = a$, oder $xx + x = 2a$, oder ferner $xx = -x + 2a$, woraus gefunden wird $x = -\frac{1}{2} + \sqrt{\left(\frac{1}{4} + 2a\right)}$, oder

$$x = \frac{-1 + \sqrt{(8a+1)}}{2}.$$

Hieraus entspringt diese Regel. Man multiplicire die gegebene dreyeckigte Zahl mit 8 und zum Product addire 1, aus der Summ ziehe man die Quadrat-Wurzel, von derselben subtrahire 1; den Rest dividire durch 2, so kommt die gesuchte Dreyecks-Wurzel heraus.

98.

Hieraus sieht man daß alle dreyeckigte Zahlen diese Eigenschaft haben, daß wann man dieselben mit 8 multiplicirt und 1 dazu addirt immer eine Quadrat-Zahl herauskommen müße, wie aus folgendem Täfelgen zu ersehen,

III. Eck.	1,	3,	6,	10,	15,	21,	28,	36,	45,	55,	66,	etc.
8 mahl + 1:	9,	25,	49,	81,	121,	169,	225,	289,	361,	441,	529,	etc.

Ist nun die gegebene Zahl a nicht so beschaffen, so ist es ein Zeichen, daß dieselbe keine würckliche dreyeckigte Zahl sey, oder die Wurzel davon nicht rational angegeben werden könne.

99.

Man suche nach dieser Regel die Dreyecks-Wurzel aus der Zahl 210, so ist $a = 210$ und $8a + 1 = 1681$ wovon die Quadrat-Wurzel 41, woraus man sieht, daß die Zahl 210 würcklich eine dreyeckigte Zahl ist, wovon die Wurzel $= \frac{41-1}{2} = 20$.

Wäre aber die Zahl 4 als ein Dreyeck gegeben, wovon die Wurzel gesucht werden sollte, so wäre dieselbe $= \frac{\sqrt{33}-1}{2}$ und also irrational. Es wird aber auch würcklich von dieser Wurzel, nemlich $\frac{\sqrt{33}-1}{2}$, das Dreyeck gefunden wie folget:

Da $x = \frac{\sqrt{33}-1}{2}$, so ist $xx = \frac{17-\sqrt{33}}{2}$; darzu x addirt, wird $xx + x = \frac{16}{2} = 8$, und folglich die dreyeckigte Zahl $\frac{xx+x}{2} = 4$.

100.

Da die viereckigten Zahlen mit den Quadraten einerley sind, so hat die Sache keine Schwierigkeit. Dann setzt man die gegebene viereckigte Zahl $= a$ und ihre Verecks-Wurzel $= x$, so wird $xx = a$ und also $x = \sqrt{a}$. Also daß die Quadrat-Wurzel und Vierecks-Wurzel einerley sind.

101.

Wir wollen demnach zu den fünfeckigten Zahlen fortschreiten.

Es sey nun 22 eine fünfeckigte Zahl und die Wurzel derselben $= x$, so muß seyn $\frac{3xx-x}{2} = 22$, oder $3xx - x = 44$, oder $xx = \frac{1}{3}x + \frac{44}{3}$; woraus gefunden wird $x = \frac{1}{6} + \sqrt{\left(\frac{1}{36} + \frac{44}{3}\right)}$, das ist $x = \frac{1+\sqrt{529}}{6} = \frac{1}{6} + \frac{23}{6} = 4$. Also ist 4 die gesuchte Fünfecks-Wurzel aus der Zahl 22.

102.

Es sey nun vorgelegt diese Frage: wann das gegebene Fünfeck $= a$ ist, wie soll davon die Wurzel gefunden werden?

Setzt man diese gesuchte Wurzel $= x$, so kommt man auf diese Gleichung $\frac{3xx-x}{2} = a$, oder $3xx - x = 2a$, oder $xx = \frac{1}{3}x + \frac{2a}{3}$; woraus gefunden wird $x = \frac{1}{6} + \sqrt{\left(\frac{1}{36} + \frac{2a}{3}\right)}$, das ist

$$x = \frac{1+\sqrt{(24a+1)}}{6}.$$

Wann dahero a ein würckliches Fünfeck ist, so muß $24a + 1$ immer eine Quadrat-Zahl seyn.

Es sey z. E. 330 das gegebene Fünfeck, so wird die Wurzel davon seyn $x = \frac{1+\sqrt{7921}}{6} = \frac{1+89}{6} = 15$.

103.

Es sey nun a eine gegebene sechseckigte Zahl, wovon die Wurzel gesucht werden soll.

Setzt man diese Wurzel $= x$ so wird $2xx - x = a$, oder $xx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}a$, dahero gefunden wird

$$x = \frac{1}{4} + \sqrt{\left(\frac{1}{16} + \frac{1}{2}a\right)} = \frac{1+\sqrt{(8a+1)}}{4}.$$

Wann also a ein würckliches Sechseck ist, so muß $8a + 1$ ein Quadrat werden, woraus man sieht daß alle sechseckigte Zahlen unter den dreyeckigten begriffen sind; die Wurzeln aber sind anders beschaffen.

Es sey z. E. die sechseckigte Zahl 1225 so wird die Wurzel davon seyn $x = \frac{1+\sqrt{9801}}{4} = \frac{1+99}{4} = 25$.

104.

Es sey ferner a eine gegebene siebeneckigte Zahl, wovon die Seite oder Wurzel gesucht werden soll.

Setzt man diese Wurzel $= x$ so hat man $\frac{5xx - 3x}{2} = a$, oder $5xx - 3x = 2a$, allso $xx = \frac{3}{5}x + \frac{2}{5}a$, woraus gefunden wird

$$x = \frac{3}{10} + \sqrt{\left(\frac{9}{100} + \frac{2}{5}a\right)} = \frac{3+\sqrt{(40a+9)}}{10}.$$

Alle siebeneckigte Zahlen sind demnach also beschaffen, daß wann man dieselben mit 40 multiplicirt und zum Product 9 addirt, die Summe immer Quadrat-Zahlen werden.

Es sey z. E. das gegebene Siebeneck 2059, so findet man die Wurzel davon $x = \frac{3+\sqrt{82369}}{10} = \frac{3+287}{10} = 29$.

105.

Es sey nun a eine gegebene achteckigte Zahl wovon die Wurzel x gefunden werden soll.

Man hat dahero $3xx - 2x = a$, oder $xx = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}a$, woraus gefunden wird

$$x = \frac{1}{3} + \sqrt{\left(\frac{1}{9} + \frac{a}{3}\right)} = \frac{1+\sqrt{(3a+1)}}{3}.$$

Alle achteckigte Zahlen sind demnach also beschaffen, daß wann man sie mit 3 multiplicirt und dazu 1 addirt die Summe immer eine Quadrat-Zahl werde.

Es sey z. E. 3816 eine achteckigte Zahl, so wird die Wurzel davon seyn $x = \frac{1+\sqrt{11449}}{3} = \frac{1+107}{3} = 36$.

106.

Es sey endlich a eine gegebene n eckigte Zahl, wovon die Wurzel x gesucht werden soll, so hat man diese Gleichung $\frac{(n-2)xx-(n-4)x}{2} = a$, oder $(n-2)xx-(n-4)x = 2a$, allso $xx = \frac{(n-4)x}{n-2} + \frac{2a}{n-2}$, woraus gefunden wird $x = \frac{n-4}{2(n-2)} + \sqrt{\left(\frac{(n-4)^2}{4(n-2)^2} + \frac{2a}{n-2}\right)}$ oder $x = \frac{n-4}{2(n-2)} + \sqrt{\left(\frac{(n-4)^2}{4(n-2)^2} + \frac{8(n-2)a}{4(n-2)^2}\right)}$ und folglich

$$x = \frac{n-4+\sqrt{(8(n-2)a+(n-4)^2)}}{2(n-2)}.$$

Welche Formel eine allgemeine Regel enthält um aus gegebenen Zahlen alle mögliche vieleckigte Wurzeln zu finden.

Um dieses mit einem Exempel zu erläutern, so sey gegeben diese 24eckigte Zahl 3009; weil nun hier $a = 3009$ und $n = 24$, folglich $n-2 = 22$ und $n-4 = 20$ so bekommen wir die Wurzel

$$x = \frac{20+\sqrt{(529584+400)}}{44} = \frac{20+728}{44} = 17.$$

CAPITEL 8

VON DER AUSZIEHUNG DER QUADRAT-WURZELN AUS BINOMIEN

107.

Ein Binomium wird in der Algebra genennt eine aus zwey Theilen bestehende Zahl, wovon eine oder auch beyde das Quadratische Wurzel-Zeichen enthalten.

Also ist $3+\sqrt{5}$ ein Binomium, imgleichen $\sqrt{8}+\sqrt{3}$, und es ist gleich viel ob diese beyden Theile mit dem Zeichen $+$ oder $-$ verbunden sind. Dahero wird $3-\sqrt{5}$ eben so wohl ein Binomium genennt als $3+\sqrt{5}$.