

und diesen Quotienten $xx - 3x + 4 = 0$ setzen, also daß $xx = 3x - 4$ und $x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{9}{4} - \frac{16}{4}\right)} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{-\frac{7}{4}}$, das ist $x = \frac{3 \pm \sqrt{-7}}{2}$. Dieses sind nun die beyden andern Wurzeln welche beyde imaginär sind.

188.

Es war aber hier ein bloßes Glück, daß man aus den gefundenen Binomien würcklich die Cubic-Wurzel ausziehen konnte, welches sich auch nur in denen Fällen ereignet, wo die Gleichung eine Rational-Wurzel hat, die dahero weit leichter nach den Regeln des vorigen Capitels hätte gefunden werden können; wann aber keine Rational-Wurzel statt findet, so kann dieselbe auch nicht anders als auf diese Art nach des CARDANI Regel ausgedruckt werden so daß alsdann keine weitere Abkürzung Platz findet, wie z. E. in dieser Gleichung geschiehet $x^3 = 6x + 4$, wo $f = 6$ und $g = 4$. Dahero gefunden wird $x = \sqrt[3]{2 + 2\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 2\sqrt{-1}}$ welche sich nicht anders ausdrücken läßt.

CAPITEL 13

VON DER AUFLÖSUNG DER GLEICHUNGEN DES VIERTEN GRADES
WELCHE AUCH BIQUADRATISCHE GLEICHUNGEN GENENNT WERDEN

189.

Wann die höchste Potestät der Zahl x zum vierten Grad hinauf steigt, so werden solche Gleichungen vom vierten Grad auch Biquadratische genennt, wovon also die allgemeine Form seyn wird:

$$x^4 + ax^3 + bxx + cx + d = 0,$$

von diesen kommen nun zu allererst zu betrachten vor die so genanten reinen Biquadratischen Gleichungen, deren Form ist $x^4 = f$ woraus man so gleich die Wurzel findet wann man beyderseits die Wurzel vom vierten Grad auszieht, da man dann erhält $x = \sqrt[4]{f}$.

190.

Da x^4 das Quadrat ist von xx so wird die Rechnung nicht wenig erläutert, wann man erstlich nur die Quadrat-Wurzel ausziehet, da man dann

bekommt $xx = \sqrt{f}$; hernach zieht man nochmahls die Quadrat-Wurzel aus, so bekommt man $x = \sqrt{\sqrt{f}}$, also daß $\sqrt[4]{f}$ nichts anders ist, als die Quadrat-Wurzel aus der Quadrat-Wurzel von f .

Hätte man z. E. diese Gleichung $x^4 = 2401$ so findet man daraus erstlich $xx = 49$ und ferner $x = 7$.

191.

Solcher gestalt aber findet man nur eine Wurzel, und da immer drey Cubische Wurzeln statt finden, so ist kein Zweifel, daß hier nicht vier Wurzel solten Platz haben, welche inzwischen auch auf diese Art herausgebracht werden können. Dann da aus dem letzten Exempel nicht nur folget $xx = 49$ sondern auch $xx = -49$, so erhalten wir aus jenem diese zwey Wurzeln $x = 7$, $x = -7$ aus diesem aber bekommen wir ebenfalls: $x = \sqrt{-49} = 7\sqrt{-1}$ und $x = -\sqrt{-49} = -7\sqrt{-1}$ welches die vier Biquadratische Wurzeln sind aus 2401. Und so verhält es sich auch mit allen andern Zahlen.

192.

Nach diesen reinen Gleichungen folgen der Ordnung nach diejenigen, in welchen das zweyte und vierte Glied fehlt, oder die diese Form haben:

$$x^4 + fxx + g = 0,$$

als welche nach der Regel der Quadratischen Gleichungen aufgelöst werden können. Dann setzt man $xx = y$ so hat man

$$yy + fy + g = 0, \quad \text{oder} \quad yy = -fy - g$$

woraus gefunden wird: $y = -\frac{1}{2}f \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}ff - g\right)} = -\frac{f}{2} \pm \sqrt{\frac{ff - 4g}{4}}$. Da nun $xx = y$, so wird daraus $x = \pm \sqrt{-\frac{f}{2} \pm \sqrt{\frac{ff - 4g}{4}}}$ wo die zweydeutigen Zeichen \pm alle vier Wurzeln angeben.

193.

Kommen aber alle Glieder in der Gleichung vor, so kann man dieselbe immer als ein Product aus vier Factoren ansehen. Dann multipliziert man diese vier Factores mit einander $(x - p)(x - q)(x - r)(x - s)$ so findet man folgendes Product

$$x^4 - (p + q + r + s)x^3 + (pq + pr + ps + qr + qs + rs)xx - (pqr + pqs + prs + qrs)x + pqrs,$$

welche Formel nicht anders gleich 0 werden kann, als wann einer von obigen vier Factoren = 0 ist. Dieses kann demnach auf viererley Art geschehen, I.) wann $x = p$, II.) $x = q$, III.) $x = r$, IV.) $x = s$, welches demnach die vier Wurzeln dieser Gleichung sind.

194.

Betrachten wir diese Form etwas genauer, so finden wir, daß in dem zweyten Glied die Summe aller vier Wurzeln vorkommt, welche mit $-x^3$ multiplicirt ist, im dritten Glied findet sich die Summe der Producte aus je zwey Wurzeln mit einander multiplicirt, welches mit xx multiplicirt ist, im vierten Glied sieht man die Summe der Producte aus je drey Wurzeln mit einander multiplicirt, welches mit $-x$ multiplicirt ist, und endlich das fünfte und letzte Glied enthält das Product aus allen vier Wurzeln mit einander multiplicirt.

195.

Da das letzte Glied das Product aus allen Wurzeln enthält, so kann eine solche Biquadratische Gleichung keine andere Rational-Wurzeln haben, als welche zugleich Theiler des letzten Glieds sind, daher man aus diesem Grund alle Rational-Wurzeln, wann dergleichen vorhanden, leicht finden kann, wann man für x nach und nach einen jeden Theiler des letzten Glieds setzt und zusieht, mit welchem der Gleichung ein Genüge geschehe; hat man aber auch nur eine solche Wurzel gefunden, z. E. $x = p$, so darf man nur die Gleichung, nachdem alle Glieder auf eine Seite gebracht worden, durch $x - p$ dividiren und den Quotienten gleich 0 setzen, welche eine Cubische Gleichung geben wird, die nach den obigen Regeln weiter aufgelöst werden kann.

196.

Hierzu aber wird nun unumgänglich erfordert, daß alle Glieder aus gantzen Zahlen bestehen, und daß das erste blos da stehe, oder nur mit 1 multiplicirt sey; kommen demnach in einigen Gliedern Brüche vor, so müssen dieselben vorher weggeschafft werden, welches jederzeit geschehen kann, wann man für x schreibt y getheilt durch eine Zahl, welche die Nenner der Brüche in sich schließt:

Als wann diese Gleichung vorkäme

$$x^4 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{3}xx - \frac{3}{4}x + \frac{1}{18} = 0,$$

so setze man weil in den Nennern 2 und 3 nebst ihren Potestäten vorkommen

$$x = \frac{y}{6}, \text{ so wird } \frac{y^4}{6^4} - \frac{\frac{1}{2}y^3}{6^3} + \frac{\frac{1}{3}yy}{6^2} - \frac{\frac{3}{4}y}{6} + \frac{1}{18} = 0,$$

welche mit 6^4 multiplicirt giebt $y^4 - 3y^3 + 12yy - 162y + 72 = 0$. Wollte man nun suchen ob diese Gleichung Rational-Wurzeln habe, so müßte man für y nach und nach die Theiler der Zahl 72 schreiben um zu sehen, in welchen Fällen die Formel würcklich 0 werde.

197.

Da aber die Wurzeln so wohl negativ als positiv seyn können, so müßte man mit einem jeden Theiler zwey Proben anstellen, die erste indem derselbe positiv, die andere indem derselbe negativ genommen würde; man hat aber auch hier wiederum zu bemercken, daß so oft die zwey Zeichen + und — mit einander abwechseln, die Gleichung eben so viel positive Wurzeln habe; so oft aber einerley Zeichen auf einander folgen, eben so viel negative Wurzeln vorhanden seyn müssen. Da nun in unserm Exempel 4 Abwechselungen vorkommen, und keine Folge, so sind alle Wurzeln positiv, und also hat man nicht nöthig einen Theiler des letzten Gliedes negativ zu nehmen.¹⁾

198.

Es sey z. E. diese Gleichung vorgegeben $x^4 + 2x^3 - 7xx - 8x + 12 = 0$. Hier kommen nun zwey Abwechselungen der Zeichen, und auch zwey Folgen vor, woraus man sicher schließen kann, daß diese Gleichung zwey positive und auch zwey negative Wurzeln haben müße, welche alle Theiler der Zahl 12 seyn müssen. Da nun diese Theiler sind 1, 2, 3, 4, 6, 12, so probire man erstlich mit $x = +1$ so kommt würcklich 0 heraus, also ist eine Wurzel $x = 1$. Setzt man ferner $x = -1$ so kommt folgendes $+1 - 2 - 7 + 8 + 12 = 21 - 9 = 12$ und dahero giebt $x = -1$ keine Wurzel. Man setze ferner $x = 2$ so wird unsere Formel wieder $= 0$, und also $x = 2$ eine Wurzel; aber $x = -2$ geht auch²⁾ an. Setzt man weiter $x = 3$ so kommt $81 + 54 - 63 - 24 + 12 = 60$ geht also nicht an; man setze aber $x = -3$

1) Siehe die Anmerkungen zu § 160 und 163. H. W.

2) Im Original steht irrtümlich: „hingegen $x = -2$ geht nicht an.“ Nach $x = -3$ wird dann außerdem noch $x = -4$ als Wurzel angegeben, was wiederum unrichtig ist. Die Korrektur dieser Rechenfehler erforderte eine leichte Modifikation des Textes. H. W.

so kommt $81 - 54 - 63 + 24 + 12 = 0$, folglich ist $x = -3$ eine Wurzel; also daß alle vier Wurzeln Rational sind und sich also verhalten

$$\text{I.) } x = 1, \quad \text{II.) } x = 2, \quad \text{III.) } x = -2, \quad \text{IV.) } x = -3,$$

von welchen zwey positiv und zwey negativ sind, wie die obige Regel anzeigt.

199.

Wann aber keine Wurzel Rational ist, so läßt sich auch durch diesen Weg keine finden; daher man auf solche Mittel bedacht gewesen, um in diesen Fällen die Irrational-Wurzeln ausdrücken zu können. Hierin ist man auch so glücklich gewesen, daß man zweyerley verschiedene Wege entdeckt habe, um zur Erkenntniß solcher Wurzeln zu gelangen, die Biquadratische Gleichung mag auch beschaffen seyn wie sie wolle.

Ehe wir aber diese allgemeine Wege erörtern, so wird es dienlich seyn einige besondere Fälle aufzulösen, welche öfters mit Nutzen angebracht werden können.

200.

Wann die Gleichung so beschaffen ist, daß die Zahlen in den Gliedern rückwärts eben so fortgehen als vorwärts, wie in dieser Gleichung geschieht:

$$x^4 + mx^3 + nxx + mx + 1 = 0,$$

welche noch etwas allgemeiner also vorgestellt werden kann:

$$x^4 + max^3 + naaxx + ma^3x + a^4 = 0,$$

so kann eine solche Form allezeit als ein Product zweyer Factoren, welche quadratische Formeln sind, angesehen werden und die sich leicht bestimmen laßen: dann man setze für diese Gleichung folgendes Product

$$(xx + pax + aa)(xx + qax + aa) = 0,$$

wo p und q gesucht werden müssen, daß die obige Gleichung herauskomme. Es wird aber durch die würckliche Multiplication gefunden

$$x^4 + (p + q)ax^3 + (pq + 2)aaaxx + (p + q)a^3x + a^4 = 0;$$

damit also diese Gleichung mit der vorgegebenen einerley sey, so werden

folgende zwey Stücke erfordert I.) daß $p + q = m$, und II.) daß $pq + 2 = n$, folglich $pq = n - 2$.

Die erstere quadriert giebt $pp + 2pq + qq = mm$, davon die andere viermal genommen, nemlich $4pq = 4n - 8$, subtrahirt bleibt über

$$pp - 2pq + qq = mm - 4n + 8,$$

davon die Quadrat-Wurzel ist: $p - q = \sqrt{mm - 4n + 8}$. Da nun $p + q = m$ so erhalten wir durch die Addition

$$2p = m + \sqrt{mm - 4n + 8} \quad \text{oder} \quad p = \frac{m + \sqrt{mm - 4n + 8}}{2};$$

durch die Subtraction aber bekommen wir

$$2q = m - \sqrt{mm - 4n + 8} \quad \text{oder} \quad q = \frac{m - \sqrt{mm - 4n + 8}}{2}.$$

Hat man nun p und q gefunden, so darf man nur einen jeden der Factoren $= 0$ setzen, um daraus die Werthe von x zu finden: der erste giebt $xx + pax + aa = 0$ oder $xx = -pax - aa$, woraus man findet

$$x = -\frac{pa}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{ppaa}{4} - aa\right)} \quad \text{oder} \quad x = -\frac{pa}{2} \pm a\sqrt{\left(\frac{pp}{4} - 1\right)}$$

$$\text{oder} \quad x = -\frac{1}{2}pa \pm \frac{1}{2}a\sqrt{pp - 4};$$

der andere Factor giebt aber

$$x = -\frac{1}{2}qa \pm \frac{1}{2}a\sqrt{qq - 4}$$

und also hat man die vier Wurzeln der vorgegebenen Gleichung.

201.

Um dieses zu erläutern, so sey diese Gleichung vorgegeben

$$x^4 - 4x^3 - 3xx - 4x + 1 = 0.$$

Hier ist nun $a = 1$, $m = -4$, $n = -3$, daher $mm - 4n + 8 = 36$ und die Quadrat-Wurzel daraus $= 6$; daher bekommen wir $p = \frac{-4 + 6}{2} = 1$ und $q = \frac{-4 - 6}{2} = -5$, woraus die vier Wurzeln seyn werden:

$$\text{I.) und II.) } x = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{-3} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2};$$

$$\text{und ferner III.) und IV.) } x = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{21} = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2};$$

also sind die vier Wurzeln der vorgegebenen Gleichung folgende

$$\begin{aligned} \text{I.) } x &= \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}, & \text{II.) } x &= \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}, \\ \text{III.) } x &= \frac{5 + \sqrt{21}}{2}, & \text{IV.) } x &= \frac{5 - \sqrt{21}}{2}, \end{aligned}$$

wovon die zwey ersten imaginär oder unmöglich sind, die beyden andern aber möglich, weil man $\sqrt{21}$ so genau anzeigen kann als man will, indem man die Wurzel durch Decimal-Brüche ausdrückt. Dann da 21 so viel ist als 21,00000000 so ziehe man daraus die Quadrat-Wurzel wie folget:

$$\begin{array}{r} 21\,00\,00\,00\,00 \quad (4,5825 \\ \underline{16} \\ 85\,500 \\ \underline{425} \\ 908\,7500 \\ \underline{7264} \\ 9162\,23600 \\ \underline{18324} \\ 91645\,527600 \\ \underline{458225} \\ 69375 \end{array}$$

Da nun $\sqrt{21} = 4,5825$ so ist die dritte Wurzel ziemlich genau $x = 4,7912$, und die vierte $x = 0,2087$ welche man leicht noch genauer hätte berechnen können.

Weil die vierte Wurzel dem $\frac{2}{10}$ oder $\frac{1}{5}$ ziemlich nahe kommt, so wird dieser Werth der Gleichung auch ziemlich genau ein Genüge leisten; man setze also $x = \frac{1}{5}$ so bekommt man $\frac{1}{625} - \frac{4}{125} - \frac{3}{25} - \frac{4}{5} + 1 = \frac{31}{625}$ und dieses sollte $= 0$ seyn, welches ziemlich genau eintritt.

202.

Der zweyte Fall, wo eine ähnliche Auflösung statt findet, ist den Zahlen nach dem vorigen gleich, nur daß das zweyte und vierte Glied verschiedene Zeichen haben; eine solche Gleichung ist demnach:

$$x^4 + max^3 + naaxx - ma^3x + a^4 = 0$$

welche durch folgendes Product kann vorgestellet werden

$$(xx + pax - aa)(xx + qax - aa) = 0.$$

Dann durch die Multiplication bekommt man

$$x^4 + (p + q)ax^3 + (pq - 2)aaax - (p + q)a^3x + a^4$$

welche mit der vorgegebenen einerley wird, wann erstlich $p + q = m$ und hernach $pq - 2 = n$ oder $pq = n + 2$; dann solchergestalt wird das vierte Glied von selbst einerley; man quadrire wie vor die erste Gleichung, so hat man $pp + 2pq + qq = mm$, davon subtrahire man die andere viermal genommen $4pq = 4n + 8$, so bekommt man $pp - 2pq + qq = mm - 4n - 8$ woraus die Quadrat-Wurzel giebt $p - q = \sqrt{mm - 4n - 8}$, und daher erhalten wir

$$p = \frac{m + \sqrt{mm - 4n - 8}}{2} \quad \text{und} \quad q = \frac{m - \sqrt{mm - 4n - 8}}{2}.$$

Hat man nun p und q gefunden so giebt der erste Factor diese zwey Wurzeln

$$x = -\frac{1}{2}pa \pm \frac{1}{2}a\sqrt{pp + 4}$$

und der zweyte Factor giebt diese

$$x = -\frac{1}{2}qa \pm \frac{1}{2}a\sqrt{qq + 4}$$

und also hat man die vier Wurzeln der vorgegebenen Gleichung.

203.

Es sey z. E. diese Gleichung gegeben $x^4 - 3 \cdot 2x^3 + 3 \cdot 8x + 16 = 0$, hier ist nun $a = 2$ und $m = -3$ und $n = 0$, daher $\sqrt{mm - 4n - 8} = 1$, folglich $p = \frac{-3 + 1}{2} = -1$, und $q = \frac{-3 - 1}{2} = -2$ woraus die zwey erstern Wurzeln

seyen werden $x = 1 \pm \sqrt{5}$ und die zwey letztern $x = 2 \pm \sqrt{8}$ also daß die vier gesuchten Wurzeln seyn werden:

$$\text{I.) } x = 1 + \sqrt{5}, \quad \text{II.) } x = 1 - \sqrt{5}, \quad \text{III.) } x = 2 + \sqrt{8}, \quad \text{IV.) } x = 2 - \sqrt{8}.$$

Woraus die vier Factoren unserer Gleichung seyn werden

$$(x - 1 - \sqrt{5})(x - 1 + \sqrt{5})(x - 2 - \sqrt{8})(x - 2 + \sqrt{8}),$$

welche würrklich mit einander multiplicirt unsere Gleichung hervorbringen müßen. Dann der erste und zweyte mit einander multiplicirt geben $xx - 2x - 4$ und die beiden andern geben $xx - 4x - 4$, welche zwey Producte wiederum mit einander multiplicirt geben $x^4 - 6x^3 + 24x + 16$, welches just die vorgegebene Gleichung ist.

CAPITEL 14

VON DES BOMBELLI REGEL DIE AUFLÖSUNG DER BIQUADRATISCHEN GLEICHUNGEN AUF CUBISCHE ZU BRINGEN

204.

Da schon oben gezeigt worden, wie die Cubische Gleichungen durch Hülfe des CARDANI Regel aufgelöst werden können, so kommt die Hauptsache bey den Biquadratischen Gleichungen darauf an, daß man die Auflösung derselben auf Cubische Gleichungen zu bringen wiße. Dann ohne Hülfe der Cubischen Gleichungen ist nicht möglich die Biquadratische auf eine allgemeine Art aufzulösen: dann wann man auch eine Wurzel gefunden, so erfordern die übrigen Wurzeln eine Cubische Gleichung. Woraus man sogleich erkennt, daß auch die Gleichungen von einem höheren Grade die Auflösung aller niedrigen voraus setzen.

205.

Hierzu hat nun schon vor etlichen 100 Jahren ein Italiener, Nahmens BOMBELLI,¹⁾ eine Regel gegeben, welche wir in diesem Capitel vortragen wollen:

Es sey demnach die allgemeine Biquadratische Gleichung gegeben

$$x^4 + ax^3 + bxx + cx + d = 0,$$

1) Im Original ist dieser Name stets POMBELLI geschrieben.