Antwort: auf diese Frage finden also drey Antworten statt: nach der ersten war die Zahl der Kaufleute 7, nach der zweyten war dieselbe 8, nach der dritten 10, wie von allen die hier beigefügte Probe anzeigt

	I.	II.	III.
Die Zahl der Kaufleute	7	8	10
Ein jeder legt ein $40x$	280	320	400
also alle zusammen legen ein $40xx$	1960	2560	4000
das alte Capital war	8240	8240	8240
das gantze Capital ist $40xx + 8240$	10200	10800	12240
mit demselben wird gewonnen so viel Pr. C. als der Gesellen sind	714	864	1224
davon nimmt ein jeder weg $10x$	70	80	100
also alle zusammen $10xx$	490	640	1000
bleibt also noch übrig	224	224	224

CAPITEL 12

VON DER REGEL DES CARDANI ODER DES SCIPIONIS FERREI

172.

Wann eine Cubische Gleichung auf gantze Zahlen gebracht wird, wie oben gewiesen worden, und kein Theiler des letzten Glieds eine Wurzel der Gleichung ist, so ist dieses ein sicheres Zeichen, daß die Gleichung keine Wurzel in gantzen Zahlen habe, in Brüchen aber auch keine statt finde, welches also gezeiget wird:

Es sey die Gleichung $x^3 - axx + bx - c = 0$ wo a, b und c gantze Zahlen sind, dann wollte man z. E. setzen $x = \frac{3}{2}$ so kommt $\frac{27}{8} - \frac{9}{4}a + \frac{3}{2}b - c$, hier hat nun das erste Glied allein 8 zum Nenner. Die übrigen sind nur durch 4 und 2 getheilt oder gantze Zahlen, welche also mit dem ersten nicht können 0 werden, und dieses gilt auch von allen andern Brüchen.

173.

Da nun in diesen Fällen die Wurzeln der Gleichung weder gantze Zahlen noch Brüche sind, so sind dieselben Irrational und auch so gar öfters imaginär. Wie nun dieselben ausgedrückt werden sollen, und was darinn für Wurzel-

Zeichen vorkommen, ist eine Sache von großer Wichtigkeit, wovon die Erfindung schon vor einigen 100 Jahren dem CARDANO oder viel mehr dem SCIPIONI FERREO zugeschrieben worden, welche deswegen verdient, hier mit allem Fleiß erklärt zu werden.

174.

Man muß zu diesem Ende die Natur eines Cubi, deßen Wurzel ein Binomium ist, genauer in Erwegung ziehen:

Es sey demnach die Wurzel $a+b$, so ist der Cubus davon $a^3+3aab+3abb+b^3$ welche erstlich aus dem Cubo eines jeden Theils besteht und außer denselben noch die zwey Mittel-Glieder enthält, nemlich $3aab+3abb$, welche beyde $3ab$ zum Factor haben, der andere Factor aber ist $a+b$. Dann $3ab$ mit $a+b$ multiplicirt giebt $3aab+3abb$. Diese zwey Glieder enthalten also das dreyfache Product der beyden Theile a und b mit ihrer Summe multiplicirt.

175.

Man setze nun es sey $x=a+b$ und nehme beyderseits die Cubi, so wird $x^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$. Da nun $a+b=x$ ist, so hat man diese Cubische Gleichung $x^3=a^3+b^3+3abx$ oder $x^3=3abx+a^3+b^3$ von welcher wir wißen, daß eine Wurzel sey $x=a+b$. So oft demnach eine solche Gleichung vorkommt so können wir eine Wurzel davon anzeigen.

Es sey z. E. $a=2$ und $b=3$ so bekommt man diese Gleichung $x^3=18x+35$ von welcher wir gewis wißen, daß $x=5$ eine Wurzel ist.

176.

Man setze nun ferner $a^3=p$ und $b^3=q$, so wird $a=\sqrt[3]{p}$ und $b=\sqrt[3]{q}$, folglich $ab=\sqrt[3]{pq}$; wann dahero diese Cubische Gleichung vorkommt

$$x^3=3x\sqrt[3]{pq}+p+q$$

so ist eine Wurzel davon $\sqrt[3]{p}+\sqrt[3]{q}$.

Man kann aber p und q immer dergestalt bestimmen, daß so wohl $3\sqrt[3]{pq}$ als $p+q$ einer jeden gegebenen Zahl gleich werde, wodurch man im Stand gesetzt wird, eine jede Cubische Gleichung von dieser Art aufzulösen.

177.

Es sey dahero diese allgemeine Cubische Gleichung vorgegeben $x^3 = fx + g$. Hier muß also f verglichen werden mit $3\sqrt[3]{pq}$, und g mit $p + q$; oder man muß p und q so bestimmen, daß $3\sqrt[3]{pq}$ der Zahl f, und $p + q$ der Zahl g gleich werde, und alsdann wißen wir, daß eine Wurzel unserer Gleichung seyn werde $x = \sqrt[3]{p} + \sqrt[3]{q}$.

178.

Man hat also diese zwey Gleichungen aufzulösen

$$\text{I.)}\ 3\sqrt[3]{pq} = f \quad \text{und} \quad \text{II.)}\ p + q = g.$$

Aus der ersten hat man $\sqrt[3]{pq} = \frac{f}{3}$ und $pq = \frac{f^3}{27} = \frac{1}{27}f^3$ und $4pq = \frac{4}{27}f^3$; die andere Gleichung quadrire man, so kommt $pp + 2pq + qq = gg$; davon subtrahire man $4pq = \frac{4}{27}f^3$, so wird $pp - 2pq + qq = gg - \frac{4}{27}f^3$ woraus die Quadrat-Wurzel gezogen giebt $p - q = \sqrt{\left(gg - \frac{4}{27}f^3\right)}$. Da nun $p + q = g$, so wird $2p = g + \sqrt{\left(gg - \frac{4}{27}f^3\right)}$ und $2q = g - \sqrt{\left(gg - \frac{4}{27}f^3\right)}$ dahero erhalten wir

$$p = \frac{g + \sqrt{\left(gg - \frac{4}{27}f^3\right)}}{2} \quad \text{und} \quad q = \frac{g - \sqrt{\left(gg - \frac{4}{27}f^3\right)}}{2}.$$

179.

Wann also eine solche Cubische Gleichung vorkommt $x^3 = fx + g$, die Zahlen f und g mögen beschaffen seyn wie sie wollen, so ist eine Wurzel derselben allezeit

$$x = \sqrt[3]{\frac{g + \sqrt{\left(gg - \frac{4}{27}f^3\right)}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{g - \sqrt{\left(gg - \frac{4}{27}f^3\right)}}{2}};$$

woraus erhellet daß diese Irrationalität nicht nur das Quadrat-Wurzel-Zeichen sondern auch das Cubische in sich faße, und diese Formel ist dasjenige was die Regel des CARDANI genennt zu werden pflegt.

180.

Wir wollen dieselbe mit einigen Exempeln erläutern.

Es sey $x^3 = 6x + 9$ so ist hier $f = 6$ und $g = 9$, also $gg = 81$, $f^3 = 216$ und $\frac{4}{27}f^3 = 32$. Dahero $gg - \frac{4}{27}f^3 = 49$ und $\sqrt{\left(gg - \frac{4}{27}f^3\right)} = 7$; dahero wird von der vorgegebenen Gleichung eine Wurzel seyn $x = \sqrt[3]{\frac{9+7}{2}} + \sqrt[3]{\frac{9-7}{2}}$, das ist $x = \sqrt[3]{\frac{16}{2}} + \sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{1}$ oder $x = 2 + 1 = 3$. Allso ist $x = 3$ eine Wurzel der vorgegebenen Gleichung.

181.

Es sey ferner gegeben diese Gleichung $x^3 = 3x + 2$, so wird $f = 3$ und $g = 2$, allso $gg = 4$, $f^3 = 27$ und $\frac{4}{27}f^3 = 4$; folglich die Quadrat-Wurzel aus $gg - \frac{4}{27}f^3 = 0$; dahero eine Wurzel seyn wird

$$x = \sqrt[3]{\frac{2+0}{2}} + \sqrt[3]{\frac{2-0}{2}} = 1 + 1 = 2.$$

182.

Wann aber gleich eine solche Gleichung eine rationale Wurzel hat, so geschieht es doch öfters, daß dieselbe durch diese Regel nicht gefunden wird ob sie gleich darinnen steckt.

Es sey gegeben diese Gleichung $x^3 = 6x + 40$, wo $x = 4$ eine Wurzel ist. Hier ist nun $f = 6$ und $g = 40$ ferner $gg = 1600$ und $\frac{4}{27}f^3 = 32$, also $gg - \frac{4}{27}f^3 = 1568$ und $\sqrt{\left(gg - \frac{4}{27}f^3\right)} = \sqrt{1568} = \sqrt{4 \cdot 4 \cdot 49 \cdot 2} = 28\sqrt{2}$; folglich ist eine Wurzel

$$x = \sqrt[3]{\frac{40 + 28\sqrt{2}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{40 - 28\sqrt{2}}{2}} \quad \text{oder} \quad x = \sqrt[3]{(20 + 14\sqrt{2})} + \sqrt[3]{(20 - 14\sqrt{2})}$$

welche Formel würcklich 4 ist, ohngeacht solches nicht sogleich daraus erhellet.

Dann da der Cubus von $2 + \sqrt{2}$ ist $20 + 14\sqrt{2}$, so ist umgekehrt die Cubic-Wurzel aus $20 + 14\sqrt{2}$ gleich $2 + \sqrt{2}$, und eben so auch

$$\sqrt[3]{(20 - 14\sqrt{2})} = 2 - \sqrt{2},$$

hieraus wird unsere Wurzel $x = 2 + \sqrt{2} + 2 - \sqrt{2} = 4$.

183.

Man kann gegen diese Regel einwenden, daß dieselbe sich nicht auf alle Cubische Gleichungen erstrecke, weil darinnen nicht das Quadrat von x vorkommt, oder weil darin das zweyte Glied fehlt. Es ist aber zu mercken, daß eine jede vollständige Gleichung allezeit in eine andere verwandelt werden kann, in welcher das zweyte Glied fehlt, und worauf folglich diese Regel angewandt werden kann. Um dieses zu zeigen, so sey diese vollständige Cubische Gleichung vorgegeben $x^3 - 6xx + 11x - 6 = 0$. Da nehme man nun den dritten Theil der Zahl 6 im andern Glied und setze $x - 2 = y$; so wird $x = y + 2$, und die übrige Rechnung wie folget:

da $x = y + 2$, $xx = yy + 4y + 4$ und $x^3 = y^3 + 6yy + 12y + 8$, so ist

$$\begin{array}{rl} x^3 = & y^3 + 6yy + 12y + 8 \\ -6xx = & \quad\; - 6yy - 24y - 24 \\ +11x = & \qquad\qquad + 11y + 22 \\ -\;6 = & \qquad\qquad\qquad\quad - 6 \\ \hline x^3 - 6xx + 11x - 6 = & y^3 \qquad\quad - y. \end{array}$$

Dahero erhalten wir diese Gleichung $y^3 - y = 0$ deren Auflösung so gleich in die Augen fällt: dann nach den Factoren hat man

$$y(yy - 1) = y(y + 1)(y - 1) = 0;$$

setzt man nun einen jeden Factor gleich 0 so bekommt man:

$$\text{I.} \begin{cases} y = 0, \\ x = 2, \end{cases} \quad \text{II.} \begin{cases} y = -1, \\ x = \;\;\, 1, \end{cases} \quad \text{III.} \begin{cases} y = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

welches die drey schon oben [§ 158] gefundenen Wurzeln sind.

184.

Es sey nun diese allgemeine Cubische Gleichung gegeben:

$$x^3 + axx + bx + c = 0$$

aus welcher das zweyte Glied weggebracht werden soll.

Zu diesem Ende setze man zu x den dritten Theil der Zahl des zweyten Glieds mit ihrem Zeichen und schreibe dafür einen neuen Buchstaben z. E. y, dieser Regel zufolge werden wir haben $x + \frac{1}{3}a = y$ und also $x = y - \frac{1}{3}a$ woraus die folgende Rechnung entsteht:

$x = y - \frac{1}{3}a$, $xx = yy - \frac{2}{3}ay + \frac{1}{9}aa$ ferner $x^3 = y^3 - ayy + \frac{1}{3}aay - \frac{1}{27}a^3$; also

$$\begin{array}{rl} x^3 = & y^3 - ayy + \frac{1}{3}aay - \frac{1}{27}a^3 \\ axx = & \quad + ayy - \frac{2}{3}aay + \frac{1}{9}a^3 \\ bx = & \qquad\quad + by \quad - \frac{1}{3}ab \\ c = & \qquad\qquad\quad + c \\ \hline & y^3 - \left(\frac{1}{3}aa - b\right)y + \frac{2}{27}a^3 - \frac{1}{3}ab + c = 0 \end{array}$$

in welcher Gleichung das zweyte Glied fehlt.

185.

Nun kann man auch des Cardani Regel leicht auf diesen Fall anwenden. Dann da wir oben die Gleichung hatten $x^3 = fx + g$ oder $x^3 - fx - g = 0$, so wird für unsern Fall $f = \frac{1}{3}aa - b$, und $g = -\frac{2}{27}a^3 + \frac{1}{3}ab - c$. Aus diesen für die Buchstaben f und g gefundenen Werthen erhalten wir wie oben:

$$y = \sqrt[3]{\frac{g + \sqrt{(gg - \frac{4}{27}f^3)}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{g - \sqrt{(gg - \frac{4}{27}f^3)}}{2}}$$

und da solcher Gestalt y gefunden worden, so werden wir für die vorgegebene Gleichung haben $x = y - \frac{1}{3}a$.

186.

Mit Hülfe dieser Veränderung sind wir nun im Stande die Wurzeln von allen Cubischen Gleichungen zu finden, welches wir durch folgendes Exempel zeigen wollen. Es sey demnach die vorgegebene Gleichung folgende

$$x^3 - 6xx + 13x - 12 = 0.$$

Um hier das zweyte Glied wegzubringen, so setze man $x - 2 = y$, so wird:

$x = y + 2$, $xx = yy + 4y + 4$, ferner $x^3 = y^3 + 6yy + 12y + 8$, also

$$\begin{array}{rl} x^3 = & y^3 + 6yy + 12y + 8 \\ -6xx = & \quad - 6yy - 24y - 24 \\ +13x = & \qquad\quad + 13y + 26 \\ -12 = & \qquad\qquad\quad - 12 \\ \hline & y^3 + y - 2 = 0 \end{array}$$

oder $y^3 = -y + 2$, welche mit der Formel $x^3 = fx + g$ verglichen giebt $f = -1$, $g = 2$; also $gg = 4$, und $\frac{4}{27}f^3 = -\frac{4}{27}$. Also $gg - \frac{4}{27}f^3 = 4 + \frac{4}{27} = \frac{112}{27}$; dahero erhalten wir $\sqrt{\left(gg - \frac{4}{27}f^3\right)} = \sqrt{\frac{112}{27}} = \frac{4\sqrt{21}}{9}$ woraus folget

$$y = \sqrt[3]{\left(\frac{2 + \frac{4\sqrt{21}}{9}}{2}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{2 - \frac{4\sqrt{21}}{9}}{2}\right)} \text{ oder}$$

$$y = \sqrt[3]{\left(1 + \frac{2\sqrt{21}}{9}\right)} + \sqrt[3]{\left(1 - \frac{2\sqrt{21}}{9}\right)}, \text{ oder } y = \sqrt[3]{\left(\frac{9 + 2\sqrt{21}}{9}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{9 - 2\sqrt{21}}{9}\right)}, \text{ oder}$$

$$y = \sqrt[3]{\left(\frac{27 + 6\sqrt{21}}{27}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{27 - 6\sqrt{21}}{27}\right)}, \text{ oder } y = \tfrac{1}{3}\sqrt[3]{(27 + 6\sqrt{21})} + \tfrac{1}{3}\sqrt[3]{(27 - 6\sqrt{21})};$$

•und hernach bekommt man $x = y + 2$.

187.

Bey Auflösung dieses Exempels sind wir auf eine doppelte Irrationalität gerathen, gleich wohl muß man daraus nicht schließen, daß die Wurzel schlechter Dinges Irrational sey, indem es sich glücklicher Weise fügen könnte, daß die Binomie $27 \pm 6\sqrt{21}$ würckliche Cubi wären. Dieses trift auch hier zu, dann da der Cubus von $\frac{3 + \sqrt{21}}{2}$ dem $\frac{216 + 48\sqrt{21}}{8} = 27 + 6\sqrt{21}$ gleich ist, so ist die Cubic-Wurzel aus $27 + 6\sqrt{21}$ gleich $\frac{3 + \sqrt{21}}{2}$ und die Cubic-Wurzel aus $27 - 6\sqrt{21}$ gleich $\frac{3 - \sqrt{21}}{2}$. Hieraus also wird der obige Werth für y seyn $y = \frac{1}{3}\left(\frac{3 + \sqrt{21}}{2}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{3 - \sqrt{21}}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$. Da nun $y = 1$ so bekommen wir $x = 3$, welches eine Wurzel ist der vorgegebenen Gleichung. Wollte man die beyden andern auch finden so müßte man die Gleichung durch $x - 3$ dividiren, wie folget

$$\begin{array}{l}
x - 3) \quad x^3 - 6xx + 13x - 12 \quad (xx - 3x + 4 \\
\qquad\quad \underline{x^3 - 3xx} \\
\qquad\qquad - 3xx + 13x \\
\qquad\qquad \underline{- 3xx + 9x} \\
\qquad\qquad\qquad\quad + 4x - 12 \\
\qquad\qquad\qquad\quad \underline{+ 4x - 12} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

und diesen Quotienten $xx - 3x + 4 = 0$ setzen, also daß $xx = 3x - 4$ und $x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{9}{4} - \frac{16}{4}\right)} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{-\frac{7}{4}}$, das ist $x = \frac{3 \pm \sqrt{-7}}{2}$. Dieses sind nun die beyden andern Wurzeln welche beyde imaginär sind.

188.

Es war aber hier ein bloßes Glück, daß man aus den gefundenen Binomien würcklich die Cubic-Wurzel ausziehen konnte, welches sich auch nur in denen Fällen ereignet, wo die Gleichung eine Rational-Wurzel hat, die dahero weit leichter nach den Regeln des vorigen Capitels hätte gefunden werden können; wann aber keine Rational-Wurzel statt findet, so kann dieselbe auch nicht anders als auf diese Art nach des CARDANI Regel ausgedruckt werden so daß alsdann keine weitere Abkürtzung Platz findet, wie z. E. in dieser Gleichung geschiehet $x^3 = 6x + 4$, wo $f = 6$ und $g = 4$. Dahero gefunden wird $x = \sqrt[3]{(2 + 2\sqrt{-1})} + \sqrt[3]{(2 - 2\sqrt{-1})}$ welche sich nicht anders ausdrücken läßt.

CAPITEL 13

VON DER AUFLÖSUNG DER GLEICHUNGEN DES VIERTEN GRADES WELCHE AUCH BIQUADRATISCHE GLEICHUNGEN GENENNT WERDEN

189.

Wann die höchste Potestät der Zahl x zum vierten Grad hinauf steiget, so werden solche Gleichungen vom vierten Grad auch Biquadratische genennt, wovon also die allgemeine Form seyn wird:

$$x^4 + ax^3 + bxx + cx + d = 0,$$

von diesen kommen nun zu allererst zu betrachten vor die so genanten reinen Biquadratischen Gleichungen, deren Form ist $x^4 = f$ woraus man so gleich die Wurzel findet wann man beyderseits die Wurzel vom vierten Grad auszieht, da man dann erhält $x = \sqrt[4]{f}$.

190.

Da x^4 das Quadrat ist von xx so wird die Rechnung nicht wenig erläutert, wann man erstlich nur die Quadrat-Wurzel ausziehet, da man dann