Die Zahl der Käse sey gewesen x, so sind dieselben gegen $\frac{3}{2}x$ Hüner vertauscht worden; da nun ein Huhn $\frac{1}{2}x$ Eyer legt, so ist die Zahl aller Eyer $\frac{3}{4}xx$. Nun werden 9 Eyer verkauft für $\frac{1}{2}x$ Pf. also wird in allem gelöst $\frac{1}{24}x^3$, so 72 gleich seyn muß: also daß $\frac{1}{24}x^3 = 72$ folglich $x^3 = 24 \cdot 72 = 8 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 9$ oder $x^3 = 8 \cdot 8 \cdot 27$ folglich $x = 12$, und so viel Käse hat die Bäuerin gehabt, welche gegen 18 Hüner vertauscht worden.

CAPITEL 11

VON DER AUFLÖSUNG DER VOLLSTÄNDIGEN CUBISCHEN GLEICHUNGEN

157.

Eine vollständige Cubische Gleichung wird genennt, wann darinn außer dem Cubo der unbekanten Zahl, noch diese unbekante Zahl selbst und ihr Quadrat vorkommen, dahero die allgemeine Form solcher Gleichungen ist:

$$ax^3 \pm bx^2 \pm cx \pm d = 0$$

wann nemlich alle Glieder auf eine Seite sind gebracht worden. Wie nun aus einer solchen Gleichung die Werthe für x, welche auch die Wurzeln der Gleichung genennt werden, zu finden seyn, soll in diesem Capitel gezeigt werden; dann man kann hier schon zum voraus setzen, daß eine solche Gleichung, immer drey Wurzeln habe, weil dieses schon im vorigen Capitel von den reinen Gleichungen dieses Grads ist gezeiget worden.

158.

Wir wollen für den Anfang diese Gleichung betrachten:

$$x^3 - 6xx + 11x - 6 = 0,$$

und da eine Quadratische Gleichung als ein Product aus zweyen Factoren angesehen werden kann, so kann man diese Cubische Gleichung als ein Product aus drey Factoren ansehen, welche in diesem Fall sind:

$$(x-1)(x-2)(x-3) = 0$$

als welche mit einander multiplicirt die obige Gleichung hervorbringen.

Dann $(x-1)\cdot(x-2)$ giebt $xx-3x+2$, und dieses noch mit $x-3$ multiplicirt giebt $x^3-6xx+11x-6$ welches die obige Form ist, so $=0$ seyn soll. Dieses geschiehet demnach, wann dieses Product $(x-1)(x-2)(x-3)$ nichts wird, welches eintrifft wann nur einer von den drey Factoren $=0$ wird, und also in drey Fällen erstlich wann $x-1=0$ oder $x=1$, zweytens wann $x-2=0$ oder $x=2$, und drittens wann $x-3=0$ oder $x=3$.

Man sieht auch so gleich, daß wann für x eine jegliche andere Zahl gesetzt wird, keiner von diesen drey Factoren 0 werde, und also auch nicht das Product. Dahero unsere Gleichung keine andern Wurzeln hat als diese 3.

159.

Könnte man in einem jeglichen andern Fall die drey Factores einer solchen Gleichung anzeigen, so hätte man so gleich die drey Wurzeln derselben. Wir wollen zu diesem Ende drey solche Factores auf eine allgemeine Art betrachten, welche seyn sollen $x-p$, $x-q$, $x-r$; man suche demnach ihr Product, und da der erste mit dem zweyten multiplicirt giebt

$$xx-(p+q)x+pq,$$

so giebt dieses Product noch mit $x-r$ multiplicirt folgende Formel

$$x^3-(p+q+r)xx+(pq+pr+qr)x-pqr.$$

Soll nun diese Formel gleich 0 seyn, so geschieht dieses in drey Fällen; erstlich wann $x-p=0$ oder $x=p$, zweytens wann $x-q=0$ oder $x=q$ und drittens wann $x-r=0$ oder $x=r$.

160.

Es sey nun diese Gleichung folgender Gestalt ausgedrückt

$$x^3-axx+bx-c=0,$$

und wann die Wurzeln derselben sind

$$\text{I.) } x=p, \qquad \text{II.) } x=q, \qquad \text{III.) } x=r,$$

so muß seyn erstlich $a=p+q+r$, und hernach zweytens $b=pq+pr+qr$ und drittens $c=pqr$, woraus wir sehen, daß das zweyte Glied die Summe der drey Wurzeln enthält, das dritte Glied die Summe der Producte aus je zwey Wurzeln und endlich das letzte Glied das Product aus allen drey Wurzeln mit einander multiplicirt.

Diese letzte Eigenschaft verschaft uns so gleich diesen wichtigen Vortheil, daß eine Cubische Gleichung gewiß keine andere Rational-Wurzeln haben kann, als solche, wodurch sich das letzte Glied theilen läßt: dann da dasselbe das Product aller drey Wurzeln ist, so muß es sich auch durch eine jede derselben theilen laßen. Man weis dahero so gleich, wann man eine Wurzel nur errathen will, mit was für Zahlen man die Probe anstellen soll.

Dieses zu erläutern wollen wir diese Gleichung betrachten $x^3 = x + 6$, oder $x^3 - x - 6 = 0$. Da nun dieselbe keine andere Rational-Wurzeln haben kann, als solche, dadurch sich das letzte Glied 6 theilen läßt, so hat man nur nöthig mit diesen Zahlen die Probe anzustellen 1, 2, 3, 6, welche Proben also zu stehen kommen:

I.) wann $x = 1$ so kommt $1 - 1 - 6 = -6$.
II.) wann $x = 2$ so kommt $8 - 2 - 6 = 0$.
III.) wann $x = 3$ so kommt $27 - 3 - 6 = 18$.
IV.) wann $x = 6$ so kommt $216 - 6 - 6 = 204$.[1])

Hieraus sehen wir, daß $x = 2$ eine Wurzel der vorgegebenen Gleichung ist, aus welcher es nun leicht ist, die beyden übrigen zu finden. Dann da $x = 2$ eine Wurzel ist, so ist $x - 2$ ein Factor der Gleichung, man darf also nur den andern suchen, welches durch folgende Division geschiehet

$$\begin{array}{rl}
x - 2) & x^3 - x - 6 \quad (xx + 2x + 3 \\
& \underline{x^3 - 2xx\qquad\qquad} \\
& \qquad 2xx - x - 6 \\
& \qquad \underline{2xx - 4x\qquad} \\
& \qquad\qquad\quad 3x - 6 \\
& \qquad\qquad\quad \underline{3x - 6} \\
& \qquad\qquad\qquad\; 0
\end{array}$$

Da nun unsere Formel durch dieses Product vorgestellet wird

$$(x - 2)(xx + 2x + 3)$$

1) Euler erwähnt hier nicht, daß die Probe auch noch mit den entgegengesetzten Werten angestellt werden müßte (vergleiche § 197). H. W.

so wird dieselbe 0, nicht nur wann $x - 2 = 0$, sondern auch wann

$$xx + 2x + 3 = 0.$$

Hieraus aber bekommen wir $xx = -2x - 3$ und daher $x = -1 \pm \sqrt{-2}$, welches die beyden andern Wurzeln unserer Gleichung sind, die wie man sieht unmöglich oder imaginär sind.

161.

Dieses findet aber nur statt, wann das erste Glied der Gleichung x^3 mit 1, die übrigen aber mit ganzen Zahlen multiplicirt sind. Wann aber darinn Brüche vorkommen, so hat man ein Mittel die Gleichung in eine andere zu verwandeln, welche von Brüchen befreyt ist, da dann die vorige Probe kann angestellet werden.

Dann es sey diese Gleichung gegeben $x^3 - 3xx + \frac{11}{4}x - \frac{3}{4} = 0$; weil hier nun Viertel vorkommen, so setze man $x = \frac{y}{2}$, da bekommt man

$$\frac{y^3}{8} - \frac{3yy}{4} + \frac{11y}{8} - \frac{3}{4} = 0,$$

welche mit 8 multiplicirt giebt $y^3 - 6yy + 11y - 6 = 0$, wovon die Wurzeln sind wie wir oben gesehen $y = 1$, $y = 2$, $y = 3$, dahero ist für unsere Gleichung

$$\text{I.)}\ x = \tfrac{1}{2}, \quad \text{II.)}\ x = 1, \quad \text{III.)}\ x = \tfrac{3}{2}.$$

162.

Wann nun das erste Glied mit einer Zahl multiplicirt, das letzte aber 1 ist, als wie in dieser Gleichung $6x^3 - 11xx + 6x - 1 = 0$, woraus durch 6 dividirt diese entspringt $x^3 - \frac{11}{6}xx + x - \frac{1}{6} = 0$, welche nach obiger Regel von den Brüchen befreyet werden könnte, indem man setzt $x = \frac{y}{6}$; dann da erhält man $\frac{y^3}{216} - \frac{11yy}{216} + \frac{y}{6} - \frac{1}{6} = 0$, und diese mit 216 multiplicirt wird $y^3 - 11yy + 36y - 36 = 0$. Hier würde es mühsam seyn die Probe mit allen Theilern der Zahl 36 anzustellen; weil aber in unserer erstern Gleichung das letzte Glied 1 ist, so setze man $x = \frac{1}{z}$ so wird $\frac{6}{z^3} - \frac{11}{z^2} + \frac{6}{z} - 1 = 0$ welche mit z^3 multiplicirt giebt $6 - 11z + 6z^2 - z^3 = 0$ und alle Glieder auf die andere Seite gebracht $z^3 - 6zz + 11z - 6 = 0$, deren Wurzeln sind $z = 1$, $z = 2$, $z = 3$; dahero wir für unsere Gleichung erhalten $x = 1$, $x = \frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{3}$.

163.

Aus dem obigen erkennt man, daß wann alle Wurzeln positive Zahlen sind, in der Gleichung die Zeichen *plus* und *minus* mit einander abwechseln müssen, allso daß die Gleichung eine solche Gestalt bekommt: $x^3 - axx + bx - c = 0$, wo drey Abwechselungen vorkommen, nemlich eben so viel als positive Wurzeln vorhanden. Wären aber alle drey Wurzeln negativ gewesen und man hätte diese drey Factores mit einander multiplicirt $x + p$, $x + q$, $x + r$ so würden alle Glieder das Zeichen *plus*, und die Gleichung diese Form bekommen haben $x^3 + axx + bx + c = 0$, wo dreymal zwey gleiche Zeichen auf einander folgen, das ist, eben so viel als negative Wurzeln sind.

Hieraus hat man nun den Schluß gezogen, daß so oft die Zeichen abwechseln, die Gleichung auch so viel positive Wurzeln, so oft aber gleiche Zeichen auf einander folgen, dieselbe eben so viel negative Wurzeln habe, welche Anmerckung allhier von großer Wichtigkeit ist, damit man wiße ob man die Theiler des letzten Glieds, damit man die Probe anstellen will, negativ oder positiv nehmen soll.[1])

164.

Um dieses mit einem Exempel zu erläutern, so wollen wir diese Gleichung betrachten:

$$x^3 + xx - 34x + 56 = 0,$$

in welcher zwey Abwechselungen der Zeichen und nur eine Folge eben desselben Zeichens vorkommt, woraus wir schliessen daß diese Gleichung zwey positive und eine negative Wurzel habe, welche Theiler seyn müßen des letzten Glieds 56 und also unter diesen Zahlen $\pm 1, 2, 4, 7, 8, 14, 28, 56$ begriffen sind.

Setzt man nun $x = 2$ so wird $8 + 4 - 68 + 56 = 0$, woraus wir sehen daß $x = 2$ eine Positive Wurzel, und also $x - 2$ ein Theiler unserer Gleichung sey, woraus die beyden übrigen Wurzeln leicht gefunden werden können, wann man nur die Gleichung durch $x - 2$ theilet wie folget

1) Diese Behauptung ist hiermit nicht vollständig bewiesen und nur richtig unter der Voraussetzung, daß keine imaginären Wurzeln vorhanden sind. H. W.

$$\begin{array}{rl} x-2) & x^3+\ xx-34x+56\ \ (xx+3x-28 \\ & \underline{x^3-2xx} \\ & \ 3xx-34x+56 \\ & \ \underline{3xx-\ \ 6x} \\ & -28x+56 \\ & \underline{-28x+56} \\ & 0 \end{array}$$

Man setze also diesen Quotienten $xx+3x-28=0$ so wird man daraus die beyden übrigen Wurzeln finden, welche seyn werden $x=-\frac{3}{2}\pm\frac{11}{2}$, dahero die beyden übrigen Wurzeln sind $x=4$ und $x=-7$ wozu die obige $x=2$ zu nehmen.

Woraus erhellet daß würcklich zwey positive und nur eine negative Wurzel vorhanden; dieses wollen wir noch durch folgende Exempel erläutern.

165.

I. Frage: Es sind zwey Zahlen, ihre Differenz ist 12, wann man ihr Product mit ihrer Summe multiplicirt, so kommen 14560, welche sind diese Zahlen?

Die kleinere sey x so ist die größere $x+12$, ihr Product ist $xx+12x$ so mit ihrer Summe $2x+12$ multiplicirt giebt $2x^3+36xx+144x=14560$ durch 2 dividirt wird $x^3+18xx+72x=7280$.

Weil nun das letzte Glied 7280 allzu groß ist als daß die Probe mit allen seinen Theilern könnte angestellet werden, dasselbe aber durch 8 theilbar ist, so setze man $x=2y$ da dann kommt: $8y^3+72yy+144y=7280$ welche Gleichung durch 8 dividirt wird $y^3+9yy+18y=910$, und jetzo darf man nur mit den Theilern der Zahl 910 probiren welche sind 1, 2, 5, 7, 10, 13 etc. nun aber sind die ersten 1, 2, 5 offenbahr zu klein, nimmt man aber $y=7$ so bekommt man $343+441+126$ just $=910$; also ist eine Wurzel $y=7$, folglich $x=14$; will man noch die beyden übrigen Wurzeln von y wißen so dividire man $y^3+9yy+18y-910$ durch $y-7$ wie folget:

$$
\begin{array}{r|l}
y-7) & y^3+9yy+18y-910 \quad (yy+16y+130 \\
& \underline{y^3-7yy} \\
& \quad 16yy+18y-910 \\
& \quad \underline{16yy-112y} \\
& \qquad 130y-910 \\
& \qquad \underline{130y-910} \\
& \qquad\quad 0
\end{array}
$$

Setzt man nun diesen Quotient $yy+16y+130=0$, so bekommt man $yy=-16y-130$ und daher $y=-8\pm\sqrt{-66}$, also sind die beyden andern Wurzeln unmöglich.

Antwort: die beyden gesuchten Zahlen sind demnach 14 und 26, deren Product 364 mit ihrer Summe 40 multiplicirt giebt 14560.

166.

II. Frage: Suche zwey Zahlen deren Differenz 18, wann man die Differenz ihrer Cuborum mit der Summe der Zahlen multiplicirt, daß 275184 heraus komme, welche sind diese Zahlen?

Die kleinere Zahl sey x, so ist die größere $x+18$, der Cubus der kleinern aber x^3 und der Cubus der größern $=x^3+54xx+972x+5832$, also die Differenz derselben $54xx+972x+5832=54(xx+18x+108)$ welche mit der Summe der Zahlen $2x+18=2(x+9)$ multiplicirt werden soll; das Product ist aber $108(x^3+27xx+270x+972)=275184$; man dividire durch 108 so kommt $x^3+27xx+270x+972=2548$ oder $x^3+27xx+270x=1576$. Die Theiler der Zahl 1576 sind 1, 2, 4, 8 etc. wo 1 und 2 zu klein, 4 aber für x gesetzt dieser Gleichung ein Genüge leistet; wollte man die beyden übrigen Wurzeln finden, so müßte man die Gleichung durch $x-4$ theilen wie folget:

$$
\begin{array}{r|l}
x-4) & x^3+27xx+270x-1576 \quad (xx+31x+394 \\
& \underline{x^3-4xx} \\
& \quad 31xx+270x \\
& \quad \underline{31xx-124x} \\
& \qquad 394x-1576 \\
& \qquad \underline{394x-1576} \\
& \qquad\quad 0
\end{array}
$$

Aus dem Quotienten erhält man dahero $xx = -31x - 394$ und daraus wird $x = -\frac{31}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{961}{4} - \frac{1576}{4}\right)}$ welche beyde Wurzeln imaginär oder unmöglich sind.

Antwort: also sind die gesuchten Zahlen 4 und 22.

167.

III. Frage: Suche zwey Zahlen deren Differenz 720; so ich die Quadrat-Wurzel der größern Zahl multiplicire mit der kleinern Zahl so kommt 20736. Welche Zahlen sind es?

Es sey die kleinere $= x$ so ist die größere $x + 720$ und soll seyn

$$x\sqrt{(x + 720)} = 20736 = 8 \cdot 8 \cdot 4 \cdot 81.$$

Nun nehme man beyderseits die Quadrate so wird

$$xx(x + 720) = x^3 + 720xx = 8^2 \cdot 8^2 \cdot 4^2 \cdot 81^2$$

man setze $x = 8y$, so wird $8^3y^3 + 720 \cdot 8^2y^2 = 8^2 \cdot 8^2 \cdot 4^2 \cdot 81^2$, durch 8^3 dividirt wird $y^3 + 90y^2 = 8 \cdot 4^2 \cdot 81^2$; es sey nun $y = 2z$, so wird $8z^3 + 4 \cdot 90zz = 8 \cdot 4^2 \cdot 81^2$, durch 8 dividirt wird $z^3 + 45zz = 4^2 \cdot 81^2$. Man setze ferner $z = 9u$, so wird $9^3u^3 + 45 \cdot 9^2uu = 4^2 \cdot 9^4$, durch 9^3 dividirt wird $u^3 + 5uu = 4^2 \cdot 9$ oder $uu(u + 5) = 16 \cdot 9 = 144$. Hier sieht man offenbahr, daß $u = 4$: dann da wird $uu = 16$ und $u + 5 = 9$; da nun $u = 4$ so ist $z = 36$, $y = 72$ und $x = 576$, welches die kleinere Zahl war, die größere aber 1296, wovon die Quadrat-Wurzel 36 welche mit der kleineren Zahl 576 multiplicirt giebt 20736.

168.

Anmerckung: Diese Frage kann bequemer folgender Gestalt aufgelöset werden: weil die größere Zahl ein Quadrat seyn muß indem sonst ihre Wurzel mit der kleinern multiplicirt nicht die vorgegebene Zahl hervorbringen könnte, so sey die größere Zahl xx, die kleinere also $xx - 720$ welche mit der Quadrat-Wurzel jener, das ist mit x multiplicirt, giebt $x^3 - 720x = 20736 = 64 \cdot 27 \cdot 12$; man setze $x = 4y$ so wird $64y^3 - 720 \cdot 4y = 64 \cdot 27 \cdot 12$, durch 64 dividirt wird $y^3 - 45y = 27 \cdot 12$; man setze ferner $y = 3z$, so wird $27z^3 - 135z = 27 \cdot 12$, durch 27 dividirt wird $z^3 - 5z = 12$ oder $z^3 - 5z - 12 = 0$.

Die Theiler von 12 sind 1, 2, 3, 4, 6, 12, davon sind 1 und 2 zu klein, setzt man aber $z = 3$ so kommt $27 - 15 - 12 = 0$; dahero ist $z = 3$, $y = 9$ und $x = 36$; dahero ist die größere Zahl $xx = 1296$ und die kleinere $xx - 720 = 576$ wie oben.

169.

IV. Frage: Es sind 2 Zahlen, deren Differenz 12 ist. So man nun diese Differenz multiplicirt mit der Summe ihrer Cuborum, so kommen 102144: welche Zahlen sind es?

Es sey die kleinere x so ist die größere $x+12$, der Cubus der ersteren ist x^3, der andern aber $x^3+36xx+432x+1728$, die Summe derselben mit 12 multiplicirt giebt

$$12\,(2x^3+36xx+432x+1728)=102144;$$

durch 12 dividirt wird $2x^3+36xx+432x+1728=8512$, durch 2 dividirt giebt $x^3+18xx+216x+864=4256$ oder $x^3+18xx+216x=3392=8\cdot 8\cdot 53$. Man setze $x=2y$ und dividire sogleich durch 8 so wird $y^3+9yy+54y=8\cdot 53=424$.

Die Theiler des letzten Glieds sind 1, 2, 4, 8, 53, etc. wovon 1 und 2 zu klein sind; setzt man aber $y=4$ so kommt $64+144+216=424$. Also ist $y=4$ und $x=8$; dahero sind die beyden Zahlen 8 und 20.

170.

V. Frage: Etliche machen eine Gesellschaft, davon jeder zehnmal so viel Fl. einlegt, als der Personen sind, gewinnen je mit 100 Fl. 6 Fl. mehr als ihrer sind. Nun findet sich daß der Gewinst zusammen betrage 392 Fl. wie viel sind der Gesellen gewesen?

Man setze es seyen x Gesellen gewesen, so legt einer $10x$ Fl. ein, alle aber legen $10xx$ Fl. ein und gewinnen mit 100 Fl. 6 Fl. mehr als ihrer sind; also mit 100 Fl. gewinnen sie $x+6$ Fl. und mit dem gantzen Capital gewinnen sie $\frac{x^3+6xx}{10}=392$. Mit 10 multiplicirt kommt $x^3+6xx=3920$. Setzt man nun $x=2y$, so erhält man $8y^3+24yy=3920$, welches durch 8 dividirt giebt $y^3+3yy=490$. Die Theiler des letzten Glieds sind 1, 2, 5, 7, 10, etc. wovon 1, 2 und 5 zu klein sind. Setzt man aber $y=7$ so kommt $343+147=490$ also ist $y=7$ und $x=14$.

Antwort: Es sind 14 Gesellen gewesen, und hat ein jeder 140 Fl. eingelegt.

171.

VI. Frage: Einige Kaufleute haben zusammen ein Capital von 8240 Rthl. dazu legt ein jeder noch 40mal so viel Rthl. als der Gesellen sind. Mit dieser gantzen Summe gewinnen sie so viel Pr. C. als der Gesellen sind; hierauf theilen sie den Gewinnst und da findet es sich, daß nachdem ein jeder zehn mal so viel Rthl. genommen hat als der Gesellen sind, so bleiben noch 224 Rthl. übrig. Wie viel sind es Gesellen gewesen?

Die Zahl der Gesellen sey $= x$ so legt ein jeder noch $40x$ Rthl. zu dem Capital von 8240 Rthl. alle zusammen legen also dazu noch $40xx$ Rthl. also war die gantze Summe $40xx + 8240$, mit dieser gewinnen sie von 100 x Rthl. dahero wird der gantze Gewinnst seyn: $\frac{40x^3}{100} + \frac{8240x}{100} = \frac{4}{10}x^3 + \frac{824}{10}x = \frac{2}{5}x^3 + \frac{412}{5}x$. Hiervon nimmt nun ein jeder $10x$ Rthl. und also alle zusammen $10xx$ Rthl. und da bleiben noch 224 Rthl. übrig, woraus erhellet daß der Gewinnst gewesen sey: $10xx + 224$ woraus diese Gleichung entsteht $\frac{2}{5}x^3 + \frac{412}{5}x = 10xx + 224$ welche mit 5 multiplicirt und durch 2 dividirt wird

$$x^3 + 206x = 25xx + 560 \quad \text{oder} \quad x^3 - 25xx + 206x - 560 = 0.$$

Doch um zu probiren wird die erste Form bequemer seyn; da nun die Theiler des letzten Glieds sind: 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 14, 16, etc. welche Positiv genommen werden müßen, weil in der letztern Gleichung drey Abwechselungen von Zeichen vorkommen, woraus man sicher schließen kann, daß alle drey Wurzeln positiv sind. Probirt man nun mit $x = 1$ oder $x = 2$ so ist offenbahr, daß der erste Theil viel kleiner werde als der zweyte. Wir wollen also mit den folgenden probiren: wann $x = 4$, so wird $64 + 824 = 400 + 560$ trift nicht zu; wann $x = 5$, so wird $125 + 1030 = 625 + 560$ trift nicht zu; wann $x = 7$, so wird $343 + 1442 = 1225 + 560$ trift zu: dahero ist $x = 7$ eine Wurzel unserer Gleichung. Um die beyden andern zu finden, so theile man die letzte Form durch $x - 7$ wie folget:

$$\begin{array}{r|l}
x - 7) & x^3 - 25xx + 206x - 560 \quad (xx - 18x + 80 \\
 & \underline{x^3 - 7xx} \\
 & -18xx + 206x \\
 & \underline{-18xx + 126x} \\
 & 80x - 560 \\
 & \underline{80x - 560} \\
 & 0
\end{array}$$

Man setze also den Quotienten gleich 0, so hat man

$$xx - 18x + 80 = 0 \quad \text{oder} \quad xx = 18x - 80$$

dahero $x = 9 \pm 1$, also sind die beyden andern Wurzeln $x = 8$ und $x = 10$.

Antwort: auf diese Frage finden also drey Antworten statt: nach der ersten war die Zahl der Kaufleute 7, nach der zweyten war dieselbe 8, nach der dritten 10, wie von allen die hier beigefügte Probe anzeigt

	I.	II.	III.
Die Zahl der Kaufleute	7	8	10
Ein jeder legt ein $40x$	280	320	400
also alle zusammen legen ein $40xx$	1960	2560	4000
das alte Capital war	8240	8240	8240
das gantze Capital ist $40xx + 8240$	10200	10800	12240
mit demselben wird gewonnen so viel Pr. C. als der Gesellen sind	714	864	1224
davon nimmt ein jeder weg $10x$	70	80	100
also alle zusammen $10xx$	490	640	1000
bleibt also noch übrig	224	224	224

CAPITEL 12

VON DER REGEL DES CARDANI ODER DES SCIPIONIS FERREI

172.

Wann eine Cubische Gleichung auf gantze Zahlen gebracht wird, wie oben gewiesen worden, und kein Theiler des letzten Glieds eine Wurzel der Gleichung ist, so ist dieses ein sicheres Zeichen, daß die Gleichung keine Wurzel in gantzen Zahlen habe, in Brüchen aber auch keine statt finde, welches also gezeiget wird:

Es sey die Gleichung $x^3 - axx + bx - c = 0$ wo a, b und c gantze Zahlen sind, dann wollte man z. E. setzen $x = \frac{3}{2}$ so kommt $\frac{27}{8} - \frac{9}{4}a + \frac{3}{2}b - c$, hier hat nun das erste Glied allein 8 zum Nenner. Die übrigen sind nur durch 4 und 2 getheilt oder gantze Zahlen, welche also mit dem ersten nicht können 0 werden, und dieses gilt auch von allen andern Brüchen.

173.

Da nun in diesen Fällen die Wurzeln der Gleichung weder gantze Zahlen noch Brüche sind, so sind dieselben Irrational und auch so gar öfters imaginär. Wie nun dieselben ausgedrückt werden sollen, und was darinn für Wurzel-