### 460.

Laßt uns noch ein Exempel hersetzen und von diesen Zahlen 1728 und 2304 den größten gemeinen Theiler suchen, da dann die Rechnung wie folget zu stehen kommen wird:

$$\begin{array}{r|r|r|l}
1728 & 2304 & 1 & \\
 & 1728 & & \\
\hline
 & 576 & 1728 & 3 \\
 & & 1728 & \\
\cline{3-3}
 & & 0 &
\end{array}$$

Also ist 576 der größte gemeine Theiler, und das Verhältniß $1728:2304$ wird auf dieses gebracht $3:4$; folglich verhält sich $1728:2304$ eben so wie $3:4$.

## CAPITEL 8

## VON DEN GEOMETRISCHEN PROPORTIONEN

### 461.

Zwey Geometrische Verhältniße sind einander gleich, wann ihre Benennungen einander gleich sind; und die Gleichheit zweyer solchen Verhältniße wird eine Geometrische Proportion genennt, welche also geschrieben wird $a:b=c:d$, mit Worten aber wird dieselbe also ausgesprochen: $a$ verhält sich zu $b$ wie sich $c$ verhält zu $d$, oder $a$ zu $b$ wie $c$ zu $d$. Ein Exempel einer solchen Proportion ist nun $8:4=12:6$. Dann von dem Verhältniß $8:4$ ist die Benennung $\frac{2}{1}$, und ebenfals ist sie es auch von dem Verhältniß $12:6$.

### 462.

Wann also $a:b=c:d$ eine Geometrische Proportion ist, so muß beyderseits eine gleiche Benennung statt finden und folglich $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ seyn; und hinwiederum wann die Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ einander gleich sind, so ist $a:b=c:d$.

### 463.

Eine Geometrische Proportion besteht demnach aus vier Gliedern welche also beschaffen sind, daß das erste durch das zweyte dividirt eben so viel ist, als das dritte durch das vierte dividirt. Hieraus folget eine sehr wichtige Haupt-Eigenschaft aller Geometrischen Proportionen, welche darin besteht, daß das Product aus dem ersten und vierten Glied immer eben so groß ist, als das Product aus dem zweyten und dritten. Oder kürtzer, daß das Product der äußern gleich ist dem Product der mittlern Gliedern.

464.

Um diese Eigenschaft zu beweisen, so sey $a:b=c:d$ eine Geometrische Proportion, und also $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. Man multiplicire einen jeden dieser Brüche mit $b$, so bekommt man $a=\frac{bc}{d}$, diese multiplicirt man ferner beyderseits mit $d$, so bekommt man $ad=bc$. Nun aber ist $ad$ das Product der äußern Glieder und $bc$ das Product der mittlern, welche beyde Producte folglich einander gleich sind.

465.

Wann hinwiederum vier Zahlen $a$, $b$, $c$, $d$, so beschaffen sind, daß das Product der äußern $ad$ gleich ist dem Product der mittlern $bc$, so stehen dieselben in einer Geometrischen Proportion. Dann da $ad=bc$ so dividire man beyderseits durch $bd$, da bekommt man $\frac{ad}{bd}=\frac{bc}{bd}$ oder $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$; dahero wird $a:b=c:d$.

466.

Die vier Glieder einer Geometrischen Proportion als $a:b=c:d$ können auf verschiedene Arten versetzt werden, so daß die Proportion bleibt. Es kommt nehmlich nur darauf an, daß das Product der äußern Gliedern dem Product der mittlern gleich bleibe, oder daß $ad=bc$. Also wird man haben, erstlich $a:b=c:d$, zweytens $a:c=b:d$, drittens $d:b=c:a$, viertens $d:c=b:a$.

467.

Außer diesen laßen sich auch noch viele andere Geometrische Proportionen herleiten. Dann wann $a:b=c:d$, so ist erstlich $a+b:a$ oder das erste + dem andern zum ersten, wie $c+d:c$ oder das dritte + dem vierten zum dritten; nemlich $a+b:a=c+d:c$.

Hernach ist auch das erste — dem andern zum ersten, wie das dritte — dem vierten zum dritten; oder $a-b:a=c-d:c$.

Dann nimmt man die Producte der äußern und mittlern Gliedern, so ist offenbahr $ac - bc = ac - ad$, weil $ad = bc$. Ferner wird auch $a - b : b = c - d : d$, weil $ad - bd = bc - bd$ und $ad = bc$ ist.

468.

Alle hergeleitete Proportionen die aus $a : b = c : d$ entstehen, können auf eine allgemeine Art also vorgestellt werden

$$ma + nb : pa + qb = mc + nd : pc + qd.$$

Dann das Product der äußern Gliedern ist $mpac + npbc + mqad + nqbd$, oder weil $ad = bc$, so wird dasselbe $mpac + npbc + mqbc + nqbd$; das Product der mittlern Gliedern aber ist $mpac + mqbc + npad + nqbd$, oder weil $ad = bc$ so wird dasselbe $mpac + mqbc + npbc + nqbd$, welches mit jenem einerley ist.

469.

Also kann man aus einer gegebenen Proportion als z. E. $6 : 3 = 10 : 5$, unendlich viel andere herleiten, wovon wir einige hersetzen wollen.

$$3 : 6 = 5 : 10, \quad 6 : 10 = 3 : 5, \quad 9 : 6 = 15 : 10,$$
$$3 : 3 = 5 : 5, \quad 9 : 15 = 3 : 5, \quad 9 : 3 = 15 : 5.$$

470.

Da in einer Geometrischen Proportion das Product der äußern dem Product der mittlern Gliedern gleich ist, so kann man, wann die drey ersten Glieder bekannt sind, aus derselben das vierte finden. Es seyen die drey ersten Glieder $24 : 15 = 40$ zu .... Dann da hier das Product der mittlern 600 ist, so muß das vierte Glied mit dem ersten das ist mit 24 multiplicirt auch 600 machen, folglich muß man 600 durch 24 dividiren, und da wird der Quotus das gesuchte vierte Glied 25 geben. Dahero ist die Proportion $24 : 15 = 40 : 25$. Und wann allgemein die drey ersten Glieder $a : b = c : \ldots$ sind, so setze man für das unbekante vierte Glied den Buchstaben $d$, und da $ad = bc$ seyn muß, so dividire man beyderseits durch $a$ und man wird bekommen $d = \frac{bc}{a}$; folglich ist das vierte Glied $= \frac{bc}{a}$, und wird gefunden wann man das zweyte Glied mit dem dritten multiplicirt und das Product durch das erste Glied dividirt.

471.

Hierauf beruhet nun der Grund der in allen Rechen-Büchern so berühmten Regeldetri, weil darin aus drey gegebenen Zahlen allezeit eine solche vierte gesucht wird, welche mit jenen in einer Geometrischen Proportion stehet, also daß sich die erste verhalte zur zweyten, wie die dritte zur vierten.

472.

Hierbey kommen noch einige besondere Umstände zu bemercken vor: als wann zwey Proportionen einerley erstes und drittes Glied haben, wie in diesen $a:b=c:d$ und $a:f=c:g$ so werden auch die zweyten den vierten proportional seyn, es wird sich nemlich verhalten $b:d=f:g$; dann da aus der ersten folgt $a:c=b:d$, und aus der andern $a:c=f:g$, so sind die Verhältniße $b:d$ und $f:g$ einander gleich, weil ein jedes dem Verhältniße $a:c$ gleich ist. Also da $5:100=2:40$ und $5:15=2:6$, so folgt daraus daß $100:40=15:6$.

473.

Wann aber zwey Proportionen so beschaffen sind daß sich einerley mittlere Glieder darin befinden, so werden sich die ersten Glieder umgekehrt verhalten wie die vierten. Wann nemlich $a:b=c:d$ und $f:b=c:g$, so wird daraus folgen $a:f=g:d$. Es sey z. E. diese Proportion gegeben $24:8=9:3$ und $6:8=9:12$, so wird daraus folgen $24:6=12:3$. Der Grund davon ist offenbahr: weil die erste giebt $ad=bc$ und die zweyte $fg=bc$, folglich wird $ad=fg$, und $a:f=g:d$, oder $a:g=f:d$.

474.

Aus zwey gegebenen Proportionen aber kann immer eine neue gemacht werden, wann man besonders die ersten und die zweyten, die dritten und die vierten Glieder mit einander multiplicirt. Also aus diesen Proportionen $a:b=c:d$ und $e:f=g:h$ entstehet durch die Zusammensetzung diese $ae:bf=cg:dh$. Dann da erstlich $ad=bc$ und aus der zweyten $eh=fg$, so wird auch seyn $adeh=bcfg$. Nun aber ist $adeh$ das Product der äußern und $bcfg$ das Product der mittlern Gliedern in der neuen Proportion, welche folglich einander gleich sind.

475.

Es seyn z. E. diese zwey Proportionen gegeben $6:4 = 15:10$ und $9:12 = 15:20$ so giebt uns derselben Zusammensetzung folgende Proportion

$$6 \cdot 9 : 4 \cdot 12 = 15 \cdot 15 : 10 \cdot 20$$

das ist

$$54 : 48 = 225 : 200$$

oder

$$9 : 8 = 9 : 8.$$

476.

Zuletzt ist hier noch zu mercken, daß wann zwey Producte einander gleich sind, als $ad = bc$, daraus hinwiederum eine Geometrische Proportion formiret werden kann. Es ist nemlich immer der eine Factor des ersten Products zu einem des zweyten, wie der andere Factor des zweyten zum andern des ersten. Es wird nemlich seyn $a : c = b : d$. Da z. E. $3 \cdot 8 = 4 \cdot 6$ so folgt daraus diese Proportion $8:4 = 6:3$ oder $3:4 = 6:8$; und da $3 \cdot 5 = 1 \cdot 15$, so bekommt man $3 : 15 = 1 : 5$ oder $5 : 1 = 15 : 3$ oder $3 : 1 = 15 : 5$.

## CAPITEL 9

## ANMERKUNGEN ÜBER DIE PROPORTIONEN UND IHREN NUTZEN

477.

Diese Lehre ist in dem allgemeinen Handel und Wandel von solcher Nothwendigkeit, daß fast niemand dieselbe entbehren kann. Die Preiße und Waaren sind einander immer proportional und bey den verschiedenen Geld-Sorten kommt alles darauf an, die Verhältniße darzwischen zu bestimmen. Dieses wird sehr dienlich seyn um die vorgetragene Lehre beßer zu erläutern und zum Nutzen anzuwenden.

478.

Will man das Verhältniß zwischen zweyen Münz-Sorten z. E. einem Louisdor und einem Ducaten erforschen, so muß man sehen wie viel diese Stücke nach einerley Müntz-Sorte gelten. Also da in Berlin ein Louisdor 5 Rthl. 8 Gr. ein Ducaten aber 3 Rthl. gilt so darf man diese beyden Werthe