Hier wollen wir folgendes Täfelgen anhängen:

wann $d = 1$,	so ist die Summa	$n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{nn+n}{2}$	
„ $d = 2$	„ „ „ „	$n + \frac{2n(n-1)}{2} = nn$	
„ $d = 3$	„ „ „ „	$n + \frac{3n(n-1)}{2} = \frac{3nn-n}{2}$	
„ $d = 4$	„ „ „ „	$n + \frac{4n(n-1)}{2} = 2nn - n$	
„ $d = 5$	„ „ „ „	$n + \frac{5n(n-1)}{2} = \frac{5nn-3n}{2}$	
„ $d = 6$	„ „ „ „	$n + \frac{6n(n-1)}{2} = 3nn - 2n$	
„ $d = 7$	„ „ „ „	$n + \frac{7n(n-1)}{2} = \frac{7nn-5n}{2}$	
„ $d = 8$	„ „ „ „	$n + \frac{8n(n-1)}{2} = 4nn - 3n$	
„ $d = 9$	„ „ „ „	$n + \frac{9n(n-1)}{2} = \frac{9nn-7n}{2}$	
„ $d = 10$	„ „ „ „	$n + \frac{10n(n-1)}{2} = 5nn - 4n$	etc.

CAPITEL 5

VON DEN FIGURIRTEN ODER VIELECKIGTEN ZAHLEN

425.

Die Summation der Arithmetischen Progressionen, welche von 1 anfangen und deren Differenz entweder 1 oder 2 oder 3 oder eine andere beliebige gantze Zahl ist, leitet uns auf die Lehre von den vieleckigten Zahlen, welche entstehen, wann man einige Glieder von solchen Progressionen zusammen addirt.

426.

Setzt man die Differenz $= 1$, indem das erste Glied beständig 1 ist, so entsteht daher diese Arithmetische Progression

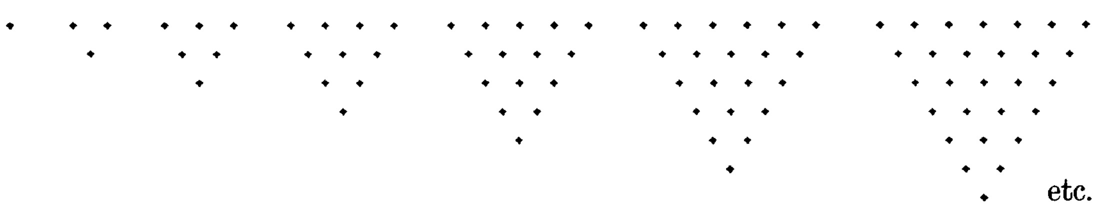
$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12 \text{ etc.}$$

Nimmt man nun in derselben die Summa von einem, zweyen, dreyen, vieren etc. Gliedern, so entsteht daraus diese Reihe von Zahlen

$$1,\ 3,\ 6,\ 10,\ 15,\ 21,\ 28,\ 36,\ 45,\ 55,\ 66,\ 78 \text{ etc.}$$

Also daß $1 = 1$, $3 = 1 + 2$, $6 = 1 + 2 + 3$, $10 = 1 + 2 + 3 + 4$ etc. Und es werden diese Zahlen dreyeckigte Zahlen genennet, weil sich, so viel Punckte als eine solche Zahl anzeigt durch ein Dreyeck vorstellen laßen, wie aus folgendem zu ersehen:

1 3 6 10 15 21 28



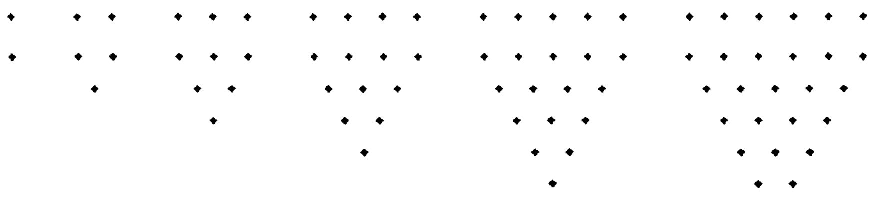
etc.

427.

Bey einem jeden dieser Dreyecke sieht man wie viel Punckte in einer jeden Seite sind: bey dem ersten ist nur eines, bey dem zweyten 2, bey dem dritten 3, bey dem vierten 4, u. s. f. Also nach der Anzahl der Punckte in einer Seite, welche schlechtweg die Seite genennt wird, verhalten sich die dreyeckigten Zahlen, oder die Anzahl aller Punckte, welche schlechtweg ein Dreyeck genennt wird, folgender Gestalt

Seite

Dreyeck



428.

Hier kommt also die Frage vor, wie aus der gegebenen Seite das Dreyeck gefunden werden soll? welches aus dem obigen leicht geschehen kann:

Dann es sey die Seite $= n$, so wird das Dreyeck seyn

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots n,$$

deren Summe $= \frac{nn+n}{2}$, folglich wird das Dreyeck $\frac{nn+n}{2}$. Ist also $n = 1$ so wird das Dreyeck $= 1$.

Ist $n = 2$ so ist das Dreyeck $= 3$.
„ $n = 3$ „ „ „ „ $= 6$.
„ $n = 4$ „ „ „ „ $= 10$ und so fort.

Nimmt man $n = 100$, so wird das Dreyeck $= 5050$ etc.

429.

Diese Formel $\frac{nn+n}{2}$ wird nun die General-Formel für alle dreyeckigte Zahlen genennet: weil sich aus derselben für eine jede Seite, die durch n angedeutet wird, die dreyeckigte Zahl finden läßt.

Dieselbe Formel kann auch also vorgestellet werden $\frac{n(n+1)}{2}$, welche zu Erleichterung der Rechnung dienet, weil allezeit entweder n oder $n+1$ eine gerade Zahl ist und sich durch 2 theilen läßt.

Also wann $n = 12$, so ist das Dreyeck $= \frac{12 \cdot 13}{2} = 6 \cdot 13 = 78$. Ist $n = 15$, so ist das Dreyeck $= \frac{15 \cdot 16}{2} = 15 \cdot 8 = 120$ etc.

430.

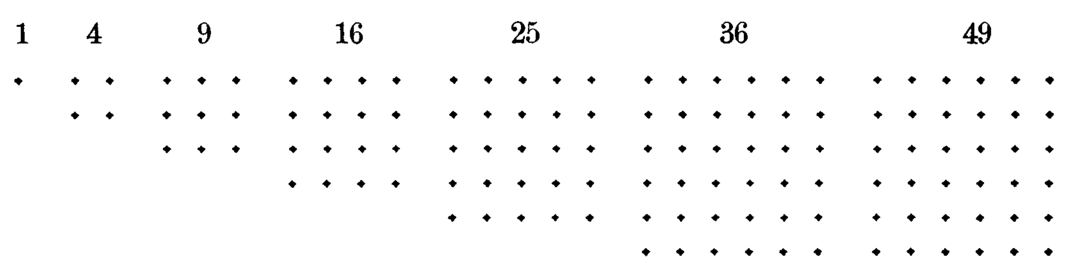
Setzt man die Differenz $= 2$ so hat man diese Arithmetische Progression

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21 etc.

wovon die Summen diese Reihe ausmachen

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, etc.

welche Zahlen viereckigte Zahlen genennt werden, und eben diejenige sind, welche oben Quadrate genennet worden. Es lassen sich nehmlich so viel Punckte, als eine solche Zahl anzeigt, in ein Viereck setzen:



431.

Hier sieht man, daß die Seite eines solchen Vierecks eben so viel Punckte enthält, als die Quadrat-Wurzel davon anzeigt, also ist von der Seite 5 das Viereck 25, und von der Seite 6 das Viereck 36; überhaupt aber wann die Seite n ist, wodurch die Anzahl der Glieder dieser Progression 1, 3, 5, 7 etc. bis n angedeutet wird, so ist das Viereck die Summe derselben Glieder, welche oben gefunden worden $= nn$. Von diesem Viereck oder Quadrat aber ist schon oben ausführlich gehandelt worden.

432.

Setzt man die Differenz $=3$ und nimmt gleicher Gestalt die Summen, so werden dieselben fünfeckigte Zahlen genennt, ob sich dieselben gleich nicht mehr so net durch Punckte vorstellen laßen. Dieselben schreiten demnach folgender Maßen fort.

Zeiger	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10,	11	
Arith. Prog.	1,	4,	7,	10,	13,	16,	19,	22,	25,	28.	31	
Fünfeck	1,	5,	12,	22,	35,	51,	70,	92,	117,	145,	176	etc.

und der Zeiger weißt die Seite einer jeglichen.

433.

Wann also die Seite n gesetzt wird, so ist die fünfeckigte Zahl

$$=\frac{3nn-n}{2}=\frac{n(3n-1)}{2}.$$

Wann z. E. $n=7$ so ist das Fünfeck 70. Will man die fünfeckigte Zahl von der Seite 100 wißen, so setzt man $n=100$ und bekommt 14950.

434.

Setzt man die Differenz $=4$, so erhält man auf diese Art die sechseckigte Zahlen, welche also fortschreiten:

Zeiger	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10	
Arith. Prog.	1,	5,	9,	13,	17,	21,	25,	29,	33,	37	
Sechseck	1,	6,	15,	28,	45,	66,	91,	120,	153,	190	etc.

Wo der Zeiger wiederum die Seite eines jeden giebt.

435.

Wann also die Seite n ist, so wird die sechseckigte Zahl

$$=2nn-n=n(2n-1),$$

wobey zu mercken, daß alle diese sechseckigte Zahlen zugleich dreyeckigte Zahlen sind. Dann wann man in diese immer eine überspringt so erhält man die sechseckigte.

436.

Auf gleiche weise findet man die siebeneckigte, achteckigte, neuneckigte Zahlen, und so fort. Von welchen wir die General-Formeln hier insgesammt hersetzen wollen. Wann also die Seite n ist so wird seyn

$$\text{das Dreyeck} = \frac{nn+n}{2} = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$\text{Viereck} = \frac{2nn+0n}{2} = nn,$$

$$\text{V eck} = \frac{3nn-n}{2} = \frac{n(3n-1)}{2},$$

$$\text{VI eck} = \frac{4nn-2n}{2} = 2nn-n = n(2n-1),$$

$$\text{VII eck} = \frac{5nn-3n}{2} = \frac{n(5n-3)}{2},$$

$$\text{VIII eck} = \frac{6nn-4n}{2} = 3nn-2n = n(3n-2),$$

$$\text{IX eck} = \frac{7nn-5n}{2} = \frac{n(7n-5)}{2},$$

$$\text{X eck} = \frac{8nn-6n}{2} = 4nn-3n = n(4n-3),$$

$$\text{XI eck} = \frac{9nn-7n}{2} = \frac{n(9n-7)}{2},$$

$$\text{XII eck} = \frac{10nn-8n}{2} = 5nn-4n = n(5n-4),$$

$$\text{XX eck} = \frac{18nn-16n}{2} = 9nn-8n = n(9n-8),$$

$$\text{XXV eck} = \frac{23nn-21n}{2} = \frac{n(23n-21)}{2},$$

$$m\,\text{eck} = \frac{(m-2)nn-(m-4)n}{2}.$$

437.

Wann also die Seite n ist, so hat man auf eine allgemeine Art die $m$eckigte Zahl $= \frac{(m-2)nn-(m-4)n}{2}$ woraus man alle nur mögliche vieleckigte

Zahlen finden kann, deren Seite $= n$. Wollte man daraus die zweyeckigte Zahlen finden, so würde $m = 2$ und dieselbe $= n$ seyn.

Setzt man $m = 3$ so wird die IIIeckigte Zahl $= \frac{nn + n}{2}$.

Setzt man $m = 4$ so wird die IVeckigte Zahl $= nn$ etc.

438.

Um diese Regul mit einigen Exempeln zu erläutern, so suche man die XXVeckigte Zahl, deren Seite 36 ist? Man suche erstlich vor die Seite n die XXVeckigte Zahl, so wird dieselbe $= \frac{23nn - 21n}{2}$. Nun setze man $n = 36$, so bekommt man die gesuchte Zahl $= 14526$.

439.

Frage: Einer hat ein Haus gekauft und wird gefragt wie theuer? darauf antwortet er, die Zahl der Rubel, die er dafür bezahlet, sey die 365eckigte Zahl von 12.

Um nun diese Zahl zu finden so wird $m = 365$ und also das 365eck von $n = \frac{363nn - 361n}{2}$. Nun ist $n = 12$, woraus der gesuchte Preis des Haußes seyn wird 23970 Rubel.

CAPITEL 6

VON DEM GEOMETRISCHEN VERHÄLTNISS

440.

Das Geometrische Verhältniß zwischen zweyen Zahlen enthält die Antwort auf die Frage, wie viel mal die eine Zahl größer sey als die andere? und wird gefunden, wann man die eine durch die andere dividirt, da dann der Quotient die Benennung des Verhältnißes anzeigt.

441.

Es kommen demnach bey einem Geometrischen Verhältniß drey Sachen zu betrachten vor. Erstlich, die erste der beyden vorgegebenen Zahlen, welche der Vorsatz genennet wird. Zweytens, die andere derselben, welche der Nachsatz genennt wird. Drittens, die Benennung des Verhältnißes, welche