CAPITEL 2

VON DEN ARITHMETISCHEN PROPORTIONEN

390.

Wann zwey Arithmetische Verhältniße einander gleich sind, so wird die Gleichheit derselben eine Arithmetische Proportion genennt.

Also wann $a - b = d$ und auch $p - q = d$, so daß der Unterscheid zwischen den Zahlen p und q eben so groß ist, als zwischen den Zahlen a und b; so machen diese vier Zahlen eine Arithmetische Proportion aus, welche also geschrieben wird $a - b = p - q$, als wodurch deutlich angezeigt wird, daß der Unterscheid zwischen a und b eben so groß sey als zwischen p und q.

391.

Eine Arithmetische Proportion besteht demnach aus vier Gliedern, welche so beschaffen seyn müßen, daß wann man das zweyte von dem ersten subtrahirt, eben so viel übrig bleibt, als wann man das vierte von dem dritten subtrahirt. Also machen diese Zahlen 12, 7, 9, 4, eine Arithmetische Proportion aus, weil $12 - 7 = 9 - 4$.

392.

Wann man eine Arithmetische Proportion hat, als $a - b = p - q$, so laßen sich darinn das zweyte und dritte Glied verwechseln und es wird auch seyn $a - p = b - q$. Dann da $a - b = p - q$ so addire man erstlich beyderseits b und da hat man $a = b + p - q$. Hernach subtrahire man beyderseits p, so bekommt man $a - p = b - q$. Da also $12 - 7 = 9 - 4$ so ist auch $12 - 9 = 7 - 4$.

393.

In einer jeglichen Arithmetischen Proportion kann man auch das erste Glied mit dem zweyten und zugleich das dritte mit dem vierten verwechseln. Dann wann $a - b = p - q$ so ist auch $b - a = q - p$. Dann $b - a$ ist das Negative von $a - b$ und eben so ist auch $q - p$ das Negative von $p - q$. Da nun $12 - 7 = 9 - 4$ so ist auch $7 - 12 = 4 - 9$.

394.

Insonderheit aber ist bey einer jeglichen Arithmetischen Proportion diese Haupt-Eigenschaft wohl zu bemercken, daß die Summ des zweyten und dritten Glieds immer eben so groß sey, als die Summ des ersten und vierten Glieds. Welches auch also ausgesprochen wird daß die Summ der mittlern Glieder so groß sey als die Summ der äußern. Also da $12-7=9-4$ so ist $7+9=12+4$, dann jedes macht 16.

395.

Um diese Haupt-Eigenschaft zu beweisen, so sey $a-b=p-q$; man addire beyderseits $b+q$ so bekommt man $a+q=b+p$, das ist die Summ des ersten und vierten ist gleich der Summ des zweyten und dritten. Hinwiederum auch wann vier Zahlen als a, b, p, q, so beschaffen sind, daß die Summ der zweyten und dritten so groß ist als die Summ der ersten und vierten, nemlich daß $b+p=a+q$, so sind dieselben Zahlen gewis in einer Arithmetischen Proportion und es wird seyn $a-b=p-q$. Dann da $a+q=b+p$ so subtrahire man beyderseits $b+q$, und da bekommt man $a-b=p-q$.

Da nun die Zahlen 18, 13, 15, 10, so beschaffen sind, daß die Summ der mittlern $13+15=28$ der Summe der äußern $18+10=28$ gleich ist, so sind dieselben auch gewis in einer Arithmetischen Proportion und folglich $18-13=15-10$.

396.

Aus dieser Eigenschaft kann man leicht folgende Frage auflösen: Wann von einer Arithmetischen Proportion die drey ersten Glieder gegeben sind, wie man daraus das vierte finden soll. Es seyn die drey ersten Glieder a, b, p und für das vierte, so gefunden werden soll, schreibe man q, so wird man haben $a+q=b+p$. Nun subtrahire man beyderseits a so bekommt man $q=b+p-a$. Also wird das vierte Glied gefunden, wann man das zweyte und dritte zusammen addirt und von der Summ das erste subtrahirt. Es seyn z. E. 19, 28, 13 die drey ersten Glieder, so ist die Summa des zweyten und dritten $=41$ davon das erste 19 subtrahirt, bleibt 22 für das vierte Glied, und die Arithmetische Proportion wird seyn $19-28=13-22$, oder $28-19=22-13$, oder $28-22=19-13$.

397.

Wann in einer Arithmetischen Proportion das zweyte Glied dem dritten gleich ist, so hat man nur drey Zahlen, welche also beschaffen sind, daß die erste weniger der andern so groß ist als die andre weniger der dritten, oder daß der Unterscheid zwischen der ersten und andern so groß ist, als der Unterscheid zwischen der andern und dritten. Solche 3 Zahlen sind 19, 15, 11, weil $19 - 15 = 15 - 11$.

398.

Solche drey Zahlen schreiten in einer Arithmetischen Progression fort, welche entweder steigt, wann die zweyte um so viel die erste übersteigt, als die dritte die andere, wie in diesem Exempel 4, 7, 10, oder fält, wann die Zahlen um gleich viel kleiner werden, als 9, 5, 1.

399.

Es seyn die Zahlen a, b, c in einer Arithmetischen Progression, so muß seyn $a - b = b - c$ woraus folget, nach der Gleichheit der mittlern und der äußern Summ $2b = a + c$. Nimmt man beyderseits a weg so bekommt man $c = 2b - a$.

400.

Wann also von einer Arithmetischen Progression die zwey ersten Glieder gegeben sind als a, b so wird daraus das dritte gefunden, wann man das zweyte verdoppelt und davon das erste subtrahirt. Es seyn 1 und 3 die zwey ersten Glieder einer Arithmetischen Progression, so wird das dritte seyn $= 2 \cdot 3 - 1 = 5$, und aus den Zahlen 1, 3, 5 hat man diese Proportion $1 - 3 = 3 - 5$.

401.

Man kann nach dieser Regul weiter fortschreiten und wie man aus dem ersten und zweyten das dritte gefunden hat, so kann man aus dem zweyten und dritten das vierte u. s. f. finden, und solcher gestalt die Arithmetische Progression fortsetzen so weit man will. Es sey a das erste Glied und b das zweyte, so wird das dritte $= 2b - a$; das vierte $= 4b - 2a - b = 3b - 2a$; das fünfte $6b - 4a - 2b + a = 4b - 3a$; das sechste $= 8b - 6a - 3b + 2a = 5b - 4a$; das siebente $= 10b - 8a - 4b + 3a = 6b - 5a$ etc.