Es sey ferner gegeben der Cubus 34965783 woraus die Cubic-Wurzel gefunden werden soll.

	34 965 783	(300 + 20 + 7 = 327
	27 000 000	
270000	7 965 783	
18000		
400		
288400	5 768 000	
307200	2 197 783	
6720		
49		
313969	2 197 783	
	0	

CAPITEL 10

VON DEN HÖHERN POTESTÄTEN ZUSAMMENGESETZTER GRÖSSEN

340.

Nach den Quadraten und Cubis folgen die höhern Potestäten, welche durch Exponente wie schon oben gemeldet worden, pflegen angezeigt zu werden: nur muß man die Wurzel wann sie zusammengesetzt ist in Klammern einschließen. Also $(a+b)^5$ deutet die fümfte Potestät von $a+b$ an, und $(a-b)^6$ deutet die sechste Potestät an von $a-b$. Wie aber diese Potestäten entwickelt werden können, soll in diesem Capitel gezeigt werden.

341.

Es sey demnach $a+b$ die Wurzel, oder die erste Potestät, so werden die höhern Potestäten durch die Multiplication folgender Gestalt gefunden.

$$
\begin{array}{rl}
(a+b)^1 = & a + b \\
& a + b \\
\hline
& aa + ab \\
& \quad + ab + bb \\
\hline
(a+b)^2 = & aa + 2ab + bb \\
& a + b \\
\hline
& a^3 + 2aab + abb \\
& \quad + aab + 2abb + b^3 \\
\hline
(a+b)^3 = & a^3 + 3aab + 3abb + b^3 \\
& a + b \\
\hline
& a^4 + 3a^3b + 3aabb + ab^3 \\
& \quad + a^3b + 3aabb + 3ab^3 + b^4 \\
\hline
(a+b)^4 = & a^4 + 4a^3b + 6aabb + 4ab^3 + b^4 \\
& a + b \\
\hline
& a^5 + 4a^4b + 6a^3bb + 4aab^3 + ab^4 \\
& \quad + a^4b + 4a^3bb + 6aab^3 + 4ab^4 + b^5 \\
\hline
(a+b)^5 = & a^5 + 5a^4b + 10a^3bb + 10aab^3 + 5ab^4 + b^5 \\
& a + b \\
\hline
& a^6 + 5a^5b + 10a^4bb + 10a^3b^3 + 5aab^4 + ab^5 \\
& \quad + a^5b + 5a^4bb + 10a^3b^3 + 10aab^4 + 5ab^5 + b^6 \\
\hline
(a+b)^6 = & a^6 + 6a^5b + 15a^4bb + 20a^3b^3 + 15aab^4 + 6ab^5 + b^6 \text{ etc.}
\end{array}
$$

342.

Eben so werden auch die Potestäten von der Wurzel $a - b$ gefunden, welche von den vorigen nur darin unterschieden sind, daß das 2te 4te 6te etc. Glied das Zeichen *minus* bekommt wie aus folgendem zu ersehen.

$$
\begin{array}{lllllll}
(a-b)^1 = & a-b \\
& a-b \\
\hline
& aa-ab \\
& \quad -ab & +bb \\
\hline
(a-b)^2 = & aa-2ab & +bb \\
& a-b \\
\hline
& a^3-2aab & + abb \\
& \quad - aab & +2abb & -b^3 \\
\hline
(a-b)^3 = & a^3-3aab & +3abb & -b^3 \\
& a-b \\
\hline
& a^4-3a^3b & + 3aabb & - ab^3 \\
& \quad - a^3b & + 3aabb & - 3ab^3 & +b^4 \\
\hline
(a-b)^4 = & a^4-4a^3b & + 6aabb & - 4ab^3 & +b^4 \\
& a-b \\
\hline
& a^5-4a^4b & + 6a^3bb & - 4aab^3 & + ab^4 \\
& \quad - a^4b & + 4a^3bb & - 6aab^3 & +4ab^4 & -b^5 \\
\hline
(a-b)^5 = & a^5-5a^4b & +10a^3bb & -10aab^3 & +5ab^4 & -b^5 \\
& a-b \\
\hline
& a^6-5a^5b & +10a^4bb & -10a^3b^3 & + 5aab^4 & - ab^5 \\
& \quad - a^5b & + 5a^4bb & -10a^3b^3 & +10aab^4 & -5ab^5 & +b^6 \\
\hline
(a-b)^6 = & a^6-6a^5b & +15a^4bb & -20a^3b^3 & +15aab^4 & -6ab^5 & +b^6 \text{ etc.}
\end{array}
$$

Hier bekommen nemlich alle ungerade Potestäten von b das Zeichen — die geraden aber behalten das Zeichen $+$, wovon der Grund offenbahr ist: dann da in der Wurzel $-b$ steht so gehen die Potestäten davon folgender Gestallt fort: $-b$, $+bb$, $-b^3$, $+b^4$, $-b^5$, $+b^6$, etc. wo die geraden Potestäten alle das Zeichen $+$ die ungeraden aber alle das Zeichen $-$ haben.

343.

Hier kommt aber diese wichtige Frage vor, wie ohne diese Rechnung würcklich fortzusetzen, alle Potestäten so wohl von $a+b$ als von $a-b$ gefunden werden können? wobey vor allen Dingen zu mercken, daß wann man die Potestäten von $a+b$ anzugeben im Stande ist, daraus von selbsten die Potestäten von $a-b$ entstehen, dann man darf nur die Zeichen der geraden Glieder nemlich des 2ten 4ten 6ten 8ten etc. verändern. Es kommt demnach hier darauf an, eine Regul festzusetzen nach welcher eine jegliche Potestät von $a+b$, so hoch dieselbe auch seyn mag, gefunden werden könne, ohne daß man nöthig habe die Rechnung durch alle vorhergehenden anzustellen.

344.

Wann man bey den oben gefundenen Potestäten die Zahlen so einem jedem Gliede vorgesetzt sind wegläßt, welche Zahlen die Coefficienten genennt werden, so bemerckt man in den Gliedern eine sehr schöne Ordnung, indem erstlich eben die Potestät von a vorkommt welche verlangt wird; in den folgenden Gliedern aber werden die Potestäten von a immer um eins niedriger, die Potestäten von b hingegen steigen immer um eins, so daß die Summa der Exponenten von a und b in allen Gliedern gleich viel beträgt. Wann man also die zehnte Potestät von $a+b$ verlangt, so werden die Glieder ohne Coefficienten also fort gehen:

$$a^{10},\ a^9b,\ a^8bb,\ a^7b^3,\ a^6b^4,\ a^5b^5,\ a^4b^6,\ a^3b^7,\ a^2b^8,\ a^1b^9,\ b^{10}.$$

345.

Es muß also nur noch gezeigt werden, wie man die darzu gehörigen Coefficienten finde, oder mit was für Zahlen ein jegliches Glied multiplicirt werden soll. Was zwar das erste Glied anbetrift, so ist sein Coefficient immer 1 und bey dem zweyten Glied ist der Coefficient allemahl der Exponent der Potestät selber. Allein für die folgenden läßt sich nicht so leicht eine Ordnung bemercken, inzwischen wann diese Coefficienten nach und nach weiter fortgesetzt werden, so kann man leicht so weit gehen als man will, wie aus folgender Tabelle zu sehen.

Potestät:	Coefficienten:
I.	1, 1,
II.	1, 2, 1.
III.	1, 3, 3, 1.
IV.	1, 4, 6, 4, 1.
V.	1, 5, 10, 10, 5, 1.
VI.	1, 6, 15, 20, 15, 6, 1.
VII.	1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1.
VIII.	1, 8, 28, 56, 70, 56, 28, 8, 1.
IX.	1, 9, 36, 84, 126, 126, 84, 36, 9, 1.
X.	1, 10, 45, 120, 210, 252, 210, 120, 45, 10, 1 etc.

Also wird von $a+b$ die zehnte Potestät seyn:

$$a^{10}+10a^9b+45a^8bb+120a^7b^3+210a^6b^4+252a^5b^5$$
$$+210a^4b^6+120a^3b^7+45a^2b^8+10ab^9+b^{10}.$$

346.

Bey diesen Coefficienten ist zu mercken daß die Summe derselben für jede Potestät die gleiche Potestät von 2 geben müße. Dann man setze $a=1$, und $b=1$, so wird ein jedes Glied außer dem Coefficienten $=1$, so daß nur die Coefficienten zusammen genommen werden müßen. Dahero dann die zehnte Potestät seyn wird $(1+1)^{10}=2^{10}=1024$.

Eben so verhält es sich auch mit allen übrigen. Also ist für die

Iste	$1+1=2=2^1$
IIte	$1+2+1=4=2^2$
IIIte	$1+3+3+1=8=2^3$
IVte	$1+4+6+4+1=16=2^4$
Vte	$1+5+10+10+5+1=32=2^5$
VIte	$1+6+15+20+15+6+1=64=2^6$
VIIte	$1+7+21+35+35+21+7+1=128=2^7$ etc.

347.

Bey diesen Coefficienten ist noch zu mercken, daß dieselben von Anfang bis in die Mitte steigen, hernach aber nach eben der Ordnung wieder abnehmen. Bey den geraden steht der größte in der Mitte, bey den ungeraden aber sind zwey mittlere, welche die größten und einander gleich sind.

Die Ordnung selbst aber verdient noch genauer in Erwegung gezogen zu werden, damit man dieselben für eine jegliche Potestät finden könne, ohne die vorhergehenden erst zu suchen, wozu hier die Regul gegeben werden soll; der Beweiß aber davon wird in das folgende Capitel ersparet werden.

348.

Um nun die Coefficienten für eine gegebene Potestät als z. E. die siebente zu finden, so schreibe man folgende Brüche der Ordnung nach hinter einander:

$$\frac{7}{1},\ \frac{6}{2},\ \frac{5}{3},\ \frac{4}{4},\ \frac{3}{5},\ \frac{2}{6},\ \frac{1}{7},$$

wo nemlich die Zehler von dem Exponenten der verlangten Potestät anfangen und immer um eines vermindert werden, die Nenner aber nach der Ordnung der Zahlen 1, 2, 3, 4, etc. fortschreiten. Da nun der erste Coefficient immer eins ist, so giebt der erste Bruch den zweyten Coefficienten; die zwey ersten Brüche mit einander multiplicirt den dritten, die drey ersten mit einander multiplicirt den vierten, und so fort.

Also ist der erste Coefficient $=1$, der 2te $=\frac{7}{1}=7$, der 3te $=\frac{7}{1}\cdot\frac{6}{2}=21$, der 4te $=\frac{7}{1}\cdot\frac{6}{2}\cdot\frac{5}{3}=35$, der 5te $=\frac{7}{1}\cdot\frac{6}{2}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{4}{4}=35$, der 6te $=\frac{7}{1}\cdot\frac{6}{2}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{4}{4}\cdot\frac{3}{5}$ $=21$, der 7te $=21\cdot\frac{2}{6}=7$, der 8te $=7\cdot\frac{1}{7}=1$.

349.

Also für die zweyte Potestät hat man diese Brüche $\frac{2}{1}$; $\frac{1}{2}$; daher der erste Coefficient $=1$, der 2te $\frac{2}{1}=2$, der 3te $2\cdot\frac{1}{2}=1$.

Vor die dritte Potestät hat man diese Brüche $\frac{3}{1}$; $\frac{2}{2}$; $\frac{1}{3}$; dahero der erste Coefficient $=1$, der 2te $\frac{3}{1}=3$, der 3te $3\cdot\frac{2}{2}=3$, der 4te $\frac{3}{1}\cdot\frac{2}{2}\cdot\frac{1}{3}=1$.

Vor die vierte Potestät hat man diese Brüche $\frac{4}{1}$; $\frac{3}{2}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{1}{4}$; dahero der erste Coefficient $=1$, der 2te $\frac{4}{1}=4$, der 3te $\frac{4}{1}\cdot\frac{3}{2}=6$, der 4te $\frac{4}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}=4$, der 5te $\frac{4}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}=1$.

350.

Diese Regul schafft uns also diesen Vortheil, daß man nicht nöthig hat die vorhergehenden Coefficienten zu wißen, sondern sogleich für eine jegliche Potestät die dahin gehörigen Coefficienten finden kann.

Also für die zehnte Potestät schreibt man diese Brüche

$$\frac{10}{1},\ \frac{9}{2},\ \frac{8}{3},\ \frac{7}{4},\ \frac{6}{5},\ \frac{5}{6},\ \frac{4}{7},\ \frac{3}{8},\ \frac{2}{9},\ \frac{1}{10}.$$

Dahero bekommt man den ersten Coefficient $= 1$, den zweyten Coefficient $= \frac{10}{1} = 10$,

$$\begin{array}{ll} \text{den 3ten} = 10 \cdot \frac{9}{2} = 45, & \text{den 4ten} = 45 \cdot \frac{8}{3} = 120, \\ \text{den 5ten} = 120 \cdot \frac{7}{4} = 210, & \text{den 6ten} = 210 \cdot \frac{6}{5} = 252, \\ \text{den 7ten} = 252 \cdot \frac{5}{6} = 210, & \text{den 8ten} = 210 \cdot \frac{4}{7} = 120, \\ \text{den 9ten} = 120 \cdot \frac{3}{8} = 45, & \text{den 10ten} = 45 \cdot \frac{2}{9} = 10, \end{array}$$

$$\text{den 11ten} = 10 \cdot \frac{1}{10} = 1.$$

351.

Man kann auch diese Brüche so schlecht weg hinschreiben ohne den Werth derselben zu berechnen, und solcher Gestalt wird es leicht seyn, eine jegliche Potestät von $a + b$, so hoch dieselbe auch seyn mag, hinzuschreiben.

Also wird die 100te Potestät seyn

$$(a+b)^{100} = a^{100} + \frac{100}{1} a^{99} b + \frac{100 \cdot 99}{1 \cdot 2} a^{98} bb + \frac{100 \cdot 99 \cdot 98}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{97} b^3 + \frac{100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot 97}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} a^{96} b^4 \text{ etc.}$$

woraus die Ordnung der folgenden Glieder offenbahr zu ersehen.

CAPITEL 11

VON DER VERSETZUNG DER BUCHSTABEN ALS WORAUF DER BEWEIS DER VORIGEN REGUL BERUHET

352.

Wann man auf den Ursprung der obigen Coefficienten zurück gehet, so wird man finden, daß ein jegliches Glied so viel mal vorkommt, als sich die Buchstaben, daraus dasselbe besteht, versetzen laßen: als bey der zweyten