sey, so muß man $\frac{5}{8}$ mit $\frac{2}{3}$ multipliciren, da dann kommt $\frac{10}{24}$; und $\frac{3}{4}$ von $\frac{9}{16}$ ist eben so viel als $\frac{9}{16}$ mit $\frac{3}{4}$ multiplicirt und beträgt $\frac{27}{64}$. Welches wohl zu mercken, so oft diese Redens-Art vorkommt.

114.

Endlich ist hier wegen der Zeichen + und — eben das zu bemercken, was oben bey den gantzen Zahlen gesagt worden. Also: $+\frac{1}{2}$ mit $-\frac{1}{3}$ multiplicirt, giebt $-\frac{1}{6}$; und $-\frac{2}{3}$ mit $-\frac{4}{5}$ multiplicirt, giebt $+\frac{8}{15}$. Ferner $-\frac{5}{8}$ durch $+\frac{2}{3}$ dividirt, giebt $-\frac{15}{16}$; und $-\frac{3}{4}$ durch $-\frac{3}{4}$, giebt $+\frac{12}{12}$ oder $+1$.

CAPITEL 11

VON DEN QUADRAT-ZAHLEN

115.

Wann eine Zahl mit sich selbsten multiplicirt wird, so wird das Product ein *Quadrat* genennet, so wie in Ansehung deßen die Zahl, daraus es entstanden, seine *Quadrat-Wurtzel* genennt wird.

Also wann man z. E. 12 mit 12 multiplicirt, so ist das Product 144 eine Quadrat-Zahl, deren Wurzel die Zahl 12 ist.

Der Grund dieser Benennung ist aus der Geometrie genommen, wo der Inhalt eines Quadrats gefunden wird, wann man die Seite deßelben mit sich selbsten multipliciret.

116.

Daher werden alle Quadrat-Zahlen durch die Multiplication gefunden, wann man nehmlich die Wurtzel mit sich selbsten multipliciret.

Also weil 1 mit 1 multiplicirt 1 giebt, so ist 1 das Quadrat von 1.

Ferner ist 4 das Quadrat von der Zahl 2; und 2 ist hingegen die Quadrat-Wurtzel von 4.

Eben so ist 9 das Quadrat von 3, und 3 die Quadrat-Wurtzel von 9. Wir wollen demnach die Quadraten der natürlichen Zahlen betrachten, und folgende Tafel hersetzen, in welcher die Zahlen oder Wurtzeln in der ersten, die Quadraten aber in der andern Reihe vorgestelt werden.

Zahlen	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Quad.	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196	225	256	289

117.

Bey diesen der Ordnung nach fortschreitenden Quadrat-Zahlen bemercken wir sogleich eine schöne Eigenschaft, welche darinnen besteht, daß wann man eine jede von der folgenden subtrahiret, die Reste in folgender Ordnung fortgehen:

$$3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13,\ 15,\ 17,\ 19,\ 21,\ \text{etc.}$$

welche immer um zwey steigen, und alle ungerade Zahlen der Ordnung nach vorstellen.

118.

Auf gleiche Weise werden die Quadraten von Brüchen gefunden, wann man nemlich einen Bruch mit sich selbsten multiplicirt. Also ist von $\frac{1}{2}$ das Quadrat $\frac{1}{4}$,

von $\frac{1}{3}$ ist das Quadrat $\frac{1}{9}$, von $\frac{2}{3}$ ist das Quadrat $\frac{4}{9}$,

von $\frac{1}{4}$ ist das Quadrat $\frac{1}{16}$, von $\frac{3}{4}$ ist das Quadrat $\frac{9}{16}$ und so ferner.

Man darf nemlich nur das Quadrat des Zehlers durch das Quadrat des Nenners dividiren, so bekommt man das Quadrat des Bruchs. Also ist $\frac{25}{64}$ das Quadrat des Bruchs $\frac{5}{8}$ und umgekehrt ist $\frac{5}{8}$ die Wurtzel von $\frac{25}{64}$.

119.

Wann man das Quadrat von einer vermischten Zahl, welche aus einer gantzen Zahl und einem Bruch besteht, finden will, so darf man nur dieselbe in einem einzelnen Bruch bringen, und das Quadrat davon nehmen. Also um das Quadrat von $2\frac{1}{2}$ zu finden, so ist erstlich $2\frac{1}{2}$ so viel als $\frac{5}{2}$, und folglich das Quadrat $\frac{25}{4}$ welches beträgt $6\frac{1}{4}$. Also ist $6\frac{1}{4}$ das Quadrat von $2\frac{1}{2}$. Eben so um das Quadrat von $3\frac{1}{4}$ zu finden, so bemerke man daß $3\frac{1}{4}$ so viel ist als $\frac{13}{4}$, wovon das Quadrat $\frac{169}{16}$ ist, welches 10 und $\frac{9}{16}$ ausmacht. Wir wollen z. E. die Quadraten welche von 3 bis 4 um ein Viertel steigen betrachten, als:

Zahlen	3	$3\frac{1}{4}$	$3\frac{1}{2}$	$3\frac{3}{4}$	4
Quad.	9	$10\frac{9}{16}$	$12\frac{1}{4}$	$14\frac{1}{16}$	16

Woraus man leicht abnehmen kann, daß wann die Wurzel einen Bruch enthält, das Quadrat derselben auch immer einen Bruch enthalte. Also wann die Wurzel ist $1\frac{5}{12}$, so wird das Quadrat derselben gefunden $\frac{289}{144}$, welches ist $2\frac{1}{144}$, und also nur um sehr wenig größer als 2.

120.

Auf eine allgemeine Art, wann die Wurzel a ist, so ist das Quadrat aa: ferner von der Wurzel $2a$ ist das Quadrat $4aa$. Hieraus sieht man, daß wann die Wurzel 2 mal so groß genommen wird, das Quadrat 4 mal größer werde. Ferner ist von der Wurzel $3a$ das Quadrat $9aa$, und von der Wurzel $4a$ ist das Quadrat $16aa$ und so weiter. Heißt aber die Wurzel ab, so ist ihr Quadrat $aabb$, und wann abc die Wurzel ist, so ist ihr Quadrat $aabbcc$.

121.

Wann daher die Wurzel aus 2 oder mehrern Factoren besteht, so muß man die Quadrate derselben mit einander multipliciren, und umgekehrt, wann das Quadrat aus 2 oder mehrern Factoren besteht, deren jeder ein Quadrat ist, so braucht man nur die Wurzel derselben mit einander zu multipliciren. Also da 2304 so viel ist, als $4 \cdot 16 \cdot 36$; so ist die Quadrat-Wurzel davon $2 \cdot 4 \cdot 6$, das ist 48, und in der That ist 48 die Quadrat-Wurzel von 2304, weil $48 \cdot 48$ eben so viel ausmacht, als 2304.

122.

Nun wollen wir auch die Zeichen *plus* und *minus* erwegen, was es mit denselben bey den Quadraten für eine Bewantniß habe. Es erhellet sogleich daß wann die Wurzel das Zeichen $+$ hat, oder eine Positiv-Zahl ist, dergleichen wir bisher angenommen haben, das Quadrat derselben auch eine Positiv-Zahl seyn müße, weil $+$ mit $+$ multiplicirt $+$ giebt. Also wird das Quadrat von $+a$ seyn $+aa$. Wann aber die Wurzel eine Negativ-Zahl ist, als $-a$, so wird ihr Quadrat seyn $+aa$, eben so als wann die Wurzel $+a$ wäre; folglich ist $+aa$ eben so wohl das Quadrat von $+a$ als von $-a$; und können dahero von einem jeden Quadrat zwey Quadrat-Wurzeln angegeben werden, deren eine Positiv, die andere Negativ ist. Also ist die Quadrat-Wurzel von 25 so wohl $+5$, als -5, weil $+5$ mit $+5$ multiplicirt, und auch -5 mit -5 multiplicirt $+25$ giebt.

CAPITEL 12

VON DEN QUADRAT-WURZELN UND DEN DAHER ENTSPRINGENDEN IRRATIONAL-ZAHLEN

123.

Aus dem vorhergehenden erhellet, daß die Quadrat-Wurzel aus einer vorgegebenen Zahl nichts anders ist, als eine solche Zahl, deren Quadrat der vorgegebenen Zahl gleich ist. Also die Quadrat-Wurzel von 4 ist 2, von 9 ist sie 3, von 16 ist sie 4 u. s. w. wobey zu mercken ist, daß diese Wurzeln so wohl mit dem Zeichen plus als minus gesetzt werden können. Also von der Zahl 25, ist die Quadrat-Wurzel so wohl $+5$, als -5, weil -5 mit -5 multiplicirt eben so wohl $+25$ ausmacht, als $+5$ mit $+5$ multiplicirt.

124.

Wann dahero die vorgegebene Zahl ein Quadrat ist und man die Quadrat-Zahlen so weit im Gedächtniß hat, so ist es leicht die Quadrat-Wurzel zu finden: als, wann die vorgegebene Zahl 196 wäre so weiß man, daß die Quadrat-Wurzel davon 14 ist. Mit den Brüchen ist es ebenfalls nicht schwerer, und ist aus dem obigen klar, daß von dem Bruch $\frac{25}{49}$ die Quadrat-Wurzel sey $\frac{5}{7}$, weil man nur so wohl von dem Zehler, als von dem Nenner die Quadrat-Wurzel nehmen darf. Ist die vorgegebene Zahl eine vermischte Zahl als $12\frac{1}{4}$ so bringe man dieselbe auf einen einzeln Bruch, nemlich $\frac{49}{4}$ wovon die Quadrat-Wurzel offenbar $\frac{7}{2}$ ist, oder $3\frac{1}{2}$, welches also die Quadrat-Wurzel von $12\frac{1}{4}$ ist.

125.

Wann aber die vorgegebene Zahl kein Quadrat ist, als z. E. 12, so ist auch nicht möglich die Quadrat-Wurzel davon, das ist eine solche Zahl,