100.

Bisweilen geschieht es auch, daß 2 oder mehr Brüche zusammen addirt, mehr als ein Gantzes ausmachen, welches sodann bemerckt werden muß: als $\frac{2}{3} + \frac{3}{4}$, oder $\frac{8}{12} + \frac{9}{12}$ giebt $\frac{17}{12}$, welches so viel ist als $1\frac{5}{12}$. Eben so wann mehrere gantze Zahlen und Brüche addirt werden sollen, so addirt man erst die Brüche und wann ihre Summa 1 oder mehr gantze enthält, so werden dieselben hernach mit den gantzen Zahlen addirt z. E. es wäre $3\frac{1}{2}$ und $2\frac{2}{3}$ zu addiren; so machen erstlich die Brüche $\frac{3}{6}$ und $\frac{4}{6}$ zusammen $\frac{7}{6}$, oder $1\frac{1}{6}$, welches mit den Gantzen 6 und $\frac{1}{6}$ ausmacht.

## CAPITEL 10

## VON DER MULTIPLICATION UND DIVISION

101.

Wann ein Bruch mit einer gantzen Zahl multiplicirt werden soll, so multiplicirt man damit nur den Zehler, und läßt den Nenner ohnverändert; also

2mal $\frac{1}{2}$ macht $\frac{2}{2}$, oder ein Gantzes;

2mal $\frac{1}{3}$ macht $\frac{2}{3}$; ferner 3mal $\frac{1}{6}$ macht $\frac{3}{6}$ oder $\frac{1}{2}$;

4mal $\frac{5}{12}$ macht $\frac{20}{12}$, oder 1 und $\frac{8}{12}$, oder $1\frac{2}{3}$.

Man schließt hieraus die Regel, daß ein Bruch mit einer gantzen Zahl multiplicirt wird, wann man entweder den Zehler damit multiplicirt oder auch den Nenner durch die ganze Zahl dividirt, welches letztere, wann es angeht, die Rechnung abkürtzt. Z. E. es soll $\frac{8}{9}$ mit 3 multiplicirt werden, so kommt wenn der Zehler mit der ganzen Zahl multiplicirt wird $\frac{24}{9}$ heraus, welches so viel ist als $\frac{8}{3}$; laße ich aber den Zehler unverändert und dividire den Nenner 9 durch 3, so bekomme ich auch $\frac{8}{3}$; das ist 2 und $\frac{2}{3}$. Eben so $\frac{13}{24}$ mit 6 multiplicirt giebt $\frac{13}{4}$ oder $3\frac{1}{4}$.

102.

Überhaupt also, wann ein Bruch $\frac{a}{b}$ durch $c$ multiplicirt werden soll, so bekommt man $\frac{ac}{b}$. Hierbey ist zu mercken, daß wann die gantze Zahl just dem Nenner gleich ist, alsdann das Product dem Zehler gleich werde, also:

$\frac{1}{2}$ zweymal genommen giebt 1;

$\frac{2}{3}$ mit 3 mult. giebt 2;

$\frac{3}{4}$ mit 4 mult. giebt 3;

und allgemein, wann der Bruch $\frac{a}{b}$ mit der Zahl $b$ multiplicirt wird, so ist das Product $a$, wovon der Grund schon oben gezeigt worden; dann da $\frac{a}{b}$ den Quotus ausdruckt, wann das Dividend $a$ durch den Divisor $b$ dividirt wird, und zugleich bewiesen worden, daß der Quotus mit dem Divisor multiplicirt das Dividend geben müße, so ist klar daß $\frac{a}{b}$ mit $b$ multiplicirt die Zahl $a$ geben müße.

103.

Da wir nun gezeigt haben, wie man einen Bruch mit einer gantzen Zahl multiplicire; so müßen wir auch sehen, wie ein Bruch durch eine gantze Zahl zu dividiren sey, ehe wir die Multiplication eines Bruchs mit einem Bruch lehren können. Es ist aber klar, daß wann ich den Bruch $\frac{2}{3}$ durch 2 dividiren soll $\frac{1}{3}$ heraus komme, eben so wie in dem Fall, da $\frac{6}{7}$ durch 3 getheilt werden sollen, $\frac{2}{7}$ herauskommen. Hieraus erhellet, daß man nur den Zehler durch die ganze Zahl theilen müße, da dann der Nenner ohnverändert bleibt. Also:

$\frac{12}{25}$ durch 2 div. giebt $\frac{6}{25}$ und

$\frac{12}{25}$ durch 3 div. giebt $\frac{4}{25}$ und

$\frac{12}{25}$ durch 4 div. giebt $\frac{3}{25}$ und so fort.

104.

Die Sache hat also keine Schwierigkeit, wann sich nur der Zehler durch die vorgegebene Zahl theilen läßt: wann aber dieses nicht angeht, so ist zu bemercken, daß man den Bruch in unendlich viele andere Formen verändern könne, unter welchen sich gewiß solche finden müßen, deren Zehler sich durch die gegebene Zahl theilen laße. Also wann $\frac{3}{4}$ durch 2 getheilt werden soll, so verwandele man diesen Bruch in $\frac{6}{8}$, so giebt es, wann es durch 2 dividirt wird $\frac{3}{8}$.

Auf eine allgemeine Art, wenn der Bruch $\frac{a}{b}$ durch $c$ dividirt werden soll, so verwandele man denselben in diesen $\frac{ac}{bc}$, deßen Zehler $ac$ durch $c$ dividirt $a$ giebt, also ist der gesuchte Quotient $\frac{a}{bc}$.

105.

Hieraus ersehen wir, daß wann ein Bruch, als $\frac{a}{b}$, durch eine gantze Zahl $c$ dividiret werden soll, man nur nöthig habe den Nenner $b$ mit dieser gantzen Zahl zu multipliciren und den Zehler ohnverändert zu laßen. Also, $\frac{5}{8}$ durch 3 dividiret giebt $\frac{5}{24}$, und $\frac{9}{16}$ durch 5 dividirt giebt $\frac{9}{80}$. Wann sich aber der Zehler selbst durch eine ganze Zahl theilen läßt, so wird die Rechnung leichter. Als, $\frac{9}{16}$ durch 3 getheilet, giebt $\frac{3}{16}$. Nach jener Art aber $\frac{9}{48}$. Doch ist dieser Bruch so viel als jener $\frac{3}{16}$. Denn 3 mahl 3 ist 9, und 3 mahl 16 ist 48.

106.

Nun sind wir im Stande zu zeigen, wie ein Bruch $\frac{a}{b}$ mit einem andern Bruch $\frac{c}{d}$ multiplicirt werden soll. Man darf nur bedencken, daß $\frac{c}{d}$ so viel ist als $c$ getheilt durch $d$: und also hat man nur nöthig den Bruch $\frac{a}{b}$ erstlich mit $c$ zu multipliciren, da denn $\frac{ac}{b}$ herauskommt; hernach durch $d$ zu dividiren, da es denn $\frac{ac}{bd}$ giebt: und hieraus entspringt diese Regul, daß um zwey Brüche mit einander zu multipliciren man nur nöthig habe erstlich die Zehler, und hernach auch die Nenner besonders mit einander zu multipliciren.

Also: $\frac{1}{2}$ mit $\frac{2}{3}$ mult. giebt $\frac{2}{6}$ oder $\frac{1}{3}$; ferner

$\frac{2}{3}$ mit $\frac{4}{5}$ mult. giebt $\frac{8}{15}$; und

$\frac{3}{4}$ mit $\frac{5}{12}$ mult. giebt $\frac{15}{48}$ oder $\frac{5}{16}$ u. s. f.

107.

Nun ist noch übrig zu zeigen, wie ein Bruch durch einen andern Bruch dividirt werden soll; wobei erstlich zu mercken, daß wann die Brüche gleiche Nenner haben, die Division nur in den Zehlern verrichtet werde: weil z. E. $\frac{3}{12}$ in $\frac{9}{12}$ eben so viel mal enthalten ist, als 3 in 9, das ist 3 mal. Dahero wann $\frac{8}{12}$ durch $\frac{9}{12}$ dividirt werden soll, so darf man nur 8 durch 9 dividiren, das giebt $\frac{8}{9}$. Ferner $\frac{6}{20}$ in $\frac{18}{20}$ ist 3 mal; $\frac{7}{100}$ in $\frac{49}{100}$ ist 7 mal; $\frac{6}{25}$ durch $\frac{7}{25}$ giebt $\frac{6}{7}$; eben so $\frac{3}{7}$ durch $\frac{4}{7}$ giebt $\frac{3}{4}$.

108.

Wann aber die Brüche nicht gleiche Nenner haben, so weis man wie dieselben auf gleiche Nenner zu bringen sind. Z. E. man soll den Bruch $\frac{a}{b}$ durch $\frac{c}{d}$ dividiren, so bringe man erstlich diese Brüche auf gleiche Nenner, und da bekommt man den Bruch $\frac{ad}{bd}$ durch $\frac{bc}{bd}$ zu dividiren, wo dann eben so viel heraus kommen muß, als wann man den ersten Zehler $ad$ durch den letztern $bc$ dividiret: Folglich wird der gesuchte Quotus seyn $\frac{ad}{bc}$.

Hieraus entspringt diese Regul: man muß den Zehler des Dividends mit dem Nenner des Divisors, und den Nenner des Dividends mit dem Zehler des Divisors multipliciren, so wird jenes Product den Zehler, und dieses den Nenner zum Quotient geben.

109.

Wann also $\frac{5}{8}$ durch $\frac{2}{3}$ dividiret werden soll, so bekommt man nach dieser Regul $\frac{15}{16}$ zum Quotient. Wann ferner $\frac{3}{4}$ durch $\frac{1}{2}$ dividirt werden soll, so bekommt man $\frac{6}{4}$ oder $\frac{3}{2}$, das ist 1 und $\frac{1}{2}$. Ferner wann durch $\frac{5}{6}$ der Bruch $\frac{25}{48}$ dividirt werden soll, so bekommt man $\frac{150}{240}$ oder $\frac{5}{8}$.

110.

Man pflegt diese Regul für die Division auf eine bequemere Art folgender Gestalt vorzutragen. Man kehrt den Bruch, durch welchen dividirt werden soll um, indem man seinen Nenner oben, und seinen Zehler unten schreibt, und multiplicirt den Bruch, welcher getheilt werden soll, mit diesem umgekehrten Bruch, so erhält man den gesuchten Quotient. Also $\frac{3}{4}$ durch $\frac{1}{2}$ dividirt, ist eben so viel als $\frac{3}{4}$ mit $\frac{2}{1}$ multiplicirt, woraus kommt $\frac{6}{4}$ oder $1\frac{1}{2}$. Eben so $\frac{5}{8}$ durch $\frac{2}{3}$ dividirt ist eben so viel als $\frac{5}{8}$ mit $\frac{3}{2}$ multiplicirt, woraus kommt $\frac{15}{16}$; ferner $\frac{25}{48}$ durch $\frac{5}{6}$ dividirt, giebt eben so viel als $\frac{25}{48}$ mit $\frac{6}{5}$ multiplicirt, da denn $\frac{150}{240}$ oder $\frac{5}{8}$ entsteht.

Man sieht also überhaupt, daß durch den Bruch $\frac{1}{2}$ dividirt eben so viel ist, als mit $\frac{2}{1}$ das ist mit 2 multiplicirt; und durch $\frac{1}{3}$ dividirt ist eben so viel als mit $\frac{3}{1}$, das ist mit 3 multiplicirt.

111.

Wann dahero die Zahl 100 durch $\frac{1}{2}$ dividirt werden soll, so giebt es 200; und 1000 durch $\frac{1}{3}$ dividirt giebt 3000. Wann ferner 1 durch $\frac{1}{1000}$ dividirt werden soll, so kommt 1000; und 1 durch $\frac{1}{100\,000}$ dividirt, giebt 100000; woraus man begreiffen kann, daß eine Division, die durch 0 geschiehet, unendlich viel geben müße, weil wann man 1 durch diesen kleinen Bruch $\frac{1}{1\,000\,000\,000}$ dividiret, die große Zahl 1000000000 herauskommt.

112.

Wann ein Bruch durch sich selbsten dividiret werden soll, so versteht sich von selbsten, daß der Quotus 1 seyn werde, weil eine jede Zahl durch sich selbst dividirt 1 giebt: eben dieses weißt auch unsere Regul: als wann z. E. $\frac{3}{4}$ durch $\frac{3}{4}$ dividirt werden soll, so multiplicirt man $\frac{3}{4}$ mit $\frac{4}{3}$ da dann kommt $\frac{12}{12}$, das ist 1. Und wann $\frac{a}{b}$ durch $\frac{a}{b}$ dividirt werden soll, so multiplicirt man $\frac{a}{b}$ mit $\frac{b}{a}$ da dann $\frac{ab}{ab}$ das ist 1 herauskommt.

113.

Es ist noch übrig eine Redens-Art zu erklären, welche öfters gebraucht wird. Z. E. man frägt was die Hälfte von $\frac{3}{4}$ sey, so will das so viel sagen, als man soll $\frac{3}{4}$ mit $\frac{1}{2}$ multipliciren. Eben so wann man frägt, was $\frac{2}{3}$ von $\frac{5}{8}$

sey, so muß man $\frac{5}{8}$ mit $\frac{2}{3}$ multipliciren, da dann kommt $\frac{10}{24}$; und $\frac{3}{4}$ von $\frac{9}{16}$ ist eben so viel als $\frac{9}{16}$ mit $\frac{3}{4}$ multiplicirt und beträgt $\frac{27}{64}$. Welches wohl zu mercken, so oft diese Redens-Art vorkommt.

114.

Endlich ist hier wegen der Zeichen $+$ und $-$ eben das zu bemercken, was oben bey den gantzen Zahlen gesagt worden. Also: $+\frac{1}{2}$ mit $-\frac{1}{3}$ multiplicirt, giebt $-\frac{1}{6}$; und $-\frac{2}{3}$ mit $-\frac{4}{5}$ multiplicirt, giebt $+\frac{8}{15}$. Ferner $-\frac{5}{8}$ durch $+\frac{2}{3}$ dividirt, giebt $-\frac{15}{16}$; und $-\frac{3}{4}$ durch $-\frac{3}{4}$, giebt $+\frac{12}{12}$ oder $+1$.

## CAPITEL 11

## VON DEN QUADRAT-ZAHLEN

115.

Wann eine Zahl mit sich selbsten multiplicirt wird, so wird das Product ein *Quadrat* genennet, so wie in Ansehung deßen die Zahl, daraus es entstanden, seine *Quadrat-Wurtzel* genennt wird.

Also wann man z. E. 12 mit 12 multiplicirt, so ist das Product 144 eine Quadrat-Zahl, deren Wurzel die Zahl 12 ist.

Der Grund dieser Benennung ist aus der Geometrie genommen, wo der Inhalt eines Quadrats gefunden wird, wann man die Seite deßelben mit sich selbsten multipliciret.

116.

Daher werden alle Quadrat-Zahlen durch die Multiplication gefunden, wann man nehmlich die Wurtzel mit sich selbsten multipliciret.

Also weil 1 mit 1 multiplicirt 1 giebt, so ist 1 das Quadrat von 1.

Ferner ist 4 das Quadrat von der Zahl 2; und 2 ist hingegen die Quadrat-Wurtzel von 4.

Eben so ist 9 das Quadrat von 3, und 3 die Quadrat-Wurtzel von 9. Wir wollen demnach die Quadraten der natürlichen Zahlen betrachten, und